Capítol 3

Uniformització p-àdica de corbes de Shimura

Introducció

Les idees per investigar la versió p-àdica de la uniformització clàssica (sobre $\mathbb{C}$) de les corbes van començar amb el treball de John Tate [Tat71] del 1962 (treball que no va ser publicat fins el 1971), en què va veure que les corbes el·líptiques sobre un cos p-àdic amb reducció multiplicativa *split* poden ser uniformitzades analíticament pel grup multiplicatiu si s'utilitza una noció adequada de geometria analítica p-àdica, la geometria analítica rígida. D'altra banda, les corbes el·líptiques amb bona reducció no poden en principi ser p-àdicament uniformitzades, ja que són simplement connexes (com a varietats rígides analítiques).

El 1972, David Mumford [Mum72] va aconseguir estendre el resultat de Tate a les corbes de gènere més gran que 1. Com en el cas complex, l'espai uniformitzador passa a ser el "semiplà superior de Poincaré p-àdic", i el "grup fonamental" ja no és un grup abelià discret sinó un cert subgrup del grup de les matrius 2×2. D'altra banda, com en el cas de les corbes el·líptiques, no totes les corbes poden ser p-àdicament uniformitzades: sols les que tenen reducció "totalment degenerada *split*", anomenades actualment corbes de Mumford. De fet, Mumford no va utilitzar el llenguatge de la geometria rígida analítica, sinó el llenguatge equivalent de la geometria formal; posteriorment L. Gerritzen i M. van der Put [GvdP80] van traduir aquests resultats a la geometria rígida analítica i van estendre els resultats a qualsevol cos complet respecte a un valor absolut no arquimedià.

El 1976, I. V. Čerednik [Che] va observar que les corbes de Shimura amb discriminant multiple de p són de fet corbes de Mumford (sobre una certa extensió finita de $\mathbb{Q}_p$), i va construir explícitament (en funció de l'àlgebra de quaternions) aquesta uniformització. El mateix any 1976, V. G. Drinfeld [Dri76] va aclarir i millorar aquests resultats de Čerednik dotant d'una interpretació de moduli al semiplà superior de Poincaré p-àdic. A la vegada va donar una formulació de la uniformització p-àdica però ara sobre $\mathbb{Q}_p$ perfectament anàloga a la uniformització complexa.

En aquesta xerrada farem una breu ullada a tots aquests resultats, des de les corbes de Mumford i la seva uniformització rígida analítica, el semiplà superior de Poincaré p-àdic i formal juntament amb la seva interpretació de moduli, i, finalment, la uniformització de les corbes de Shimura.

3.1 Corbes de Mumford

Sigui K un cos complet respecte a una valoració discreta, i sigui $C = \widehat{\overline{K}}$ la completació de la clausura algebraica de K. Sigui R l'anell d'enters de K, k el cos residual de R, π un uniformitzant de R i $|\ \ |$ el valor absolut de K i la seva extensió a C.

3.1.1 Definició. Una corba $\mathcal{X}$ sobre R amb fibra genèrica llisa i projectiva s'anomena estable si és pròpia i plana sobre R i la seva fibra sobre k és geomètricament reduïda, connexa, amb singularitats que siguin punts dobles ordinaris i tal que cada component racional interseca les altres en com a mínim tres punts (fet que implica que el gènere de $\mathcal{X}$ és mes gran que 1).

Una corba estable $\mathcal{X}$ sobre R té reducció totalment degenerada *split* si totes les components de (la normalització de) la seva reducció són isomorfes a $\mathbb{P}^1$ i tots els punts dobles són k-racionals.

Finalment, si X és una corba irreductible, llisa i projectiva sobre K, direm que és una corba de Mumford si té un model estable $\mathcal{X}$ sobre R amb reducció totalment degenerada *split*.

Les corbes de Mumford són l'equivalent a les corbes el·líptiques de Tate per a gènere més gran que 1.

3.1.2 Teorema. *Sigui X una corba irreductible, llisa i projectiva sobre K. Si X és una corba de Mumford, aleshores*

1. *La jacobiana $Jac(X)$ té reducció tòrica split, o sigui que la reducció de la component connexa del model de Néron és isomorfa a ${\mathbb{G}_m}^g$.*

2. *La jacobiana* $Jac(X)$ *és isomorfa com a varietat rígida analítica a* ${\mathbb{G}_m}^g$ *mòdul una xarxa.*

3. *Si* ℓ *és un nombre primer diferent de la característica de* k*, aleshores el primer grup de cohomologia étale verifica que*

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^1(X_{et}, \mathbb{Q}_\ell)(1)^{G_K} = g,$$

on G_K *és el grup de Galois absolut de* K*, i* (1) *és el twist de Tate (o sigui és el producte tensorial amb* $\mathbb{Q}_\ell(1) := (\lim \mu_{\ell^n}(\bar{K})) \otimes \mathbb{Q}_\ell$*).*

A més a més, totes les condicions anteriors són equivalents.

La demostració d'aquest teorema es basa en diversos resultats: que les corbes de Mumford verifiquen 1 és conseqüència de la seva uniformització no arquimediana i es pot consultar el llibre de Gerritzen i Van der Put [GvdP80] o bé els articles de Bosch i Lütkebohmert [BL85] i [BL84]; que 2 i 3 són equivalents a 1 és una conseqüència de la uniformització rígida analítica de les varietats abelianes (vegeu per exemple l'article de Bosch i Lütkebohmert [BL91]).

3.1.3 Exemple. Les corbes $X_0(p)$, on p és un nombre primer, són corbes de Mumford sobre $\mathbb{Q}_{p^2}$, l'única extensió quadràtica no ramificada de $\mathbb{Q}_p$. No ho són sobre $\mathbb{Q}_p$ ja que les singularitats de la seva reducció (per a un model adequat) estan definides sobre $\mathbb{F}_{p^2}$ doncs es corresponen a corbes el·líptiques supersingulars que estan definides sobre $\mathbb{F}_{p^2}$.

El nostre objectiu és veure que les corbes de Mumford tenen una uniformització rígida analítica similar a la uniformització complexa. Abans cal que definim l'objecte que jugarà el paper del semiplà superior de Poincaré.

3.2 El semiplà superior no arquimedià

Com abans, sigui K un cos complet respecte a una valoració discreta, i sigui $C = \widehat{\overline{K}}$ la completació de la clausura algebraica de K. Sigui R l'anell d'enters de K, k el cos residual de R que suposarem **finit**, π un uniformitzant de R i $|\ \ |$ el valor absolut de K i la seva extensió a C. Molts dels resultats d'aquesta secció són vàlids amb lleugers canvis si el cos residual no és finit (vegeu la remarca 3.2.9)

3.2.1 Definició. El semiplà superior no arquimedià (associat a K) és el conjunt $\Omega := \mathbb{P}^1_C(C) \setminus \mathbb{P}^1_K(K) = C \setminus K$, amb l'estructura de varietat rígida analítica sobre K que definirem seguidament.

3.2.2 Observació. L'anàleg arquimedià de Ω és l'espai $\Omega := \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$; aquest espai és no connex i per això agafem normalment el semiplà superior. En el cas no-arquimedià Ω és connex, i per tant ens hem de quedar amb tot Ω.

Per poder definir una estructura de varietat rígida analítica a Ω hem d'estudiar primer l'arbre de $\mathrm{PGL}(2, K)$, també anomenat arbre de Bruhat-Tits.

Anomenarem xarxa de K^2 un sub-R-mòdul lliure de K^2 de rang 2. Direm que dues xarxes M_1 i M_2 són (homotèticament) equivalents si existeix un $\lambda \in K$ tal que $M_2 = \lambda M_1$. Designarem amb la notació $[M]$ les classes mòdul homotècia de xarxes en K^2.

El graf $\mathcal{T}$ de $\mathrm{PGL}(2, K)$ bé definit aleshores per les dades següents:

(i) Els vèrtexs de $\mathcal{T}$ són les classes mòdul homotècia de xarxes de K^2.

(ii) Dos vèrtexs s i s' estan units per una aresta si i només si existeixen $M_1 \in s$ i $M_2 \in s'$ tals que $\pi M_2 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2$, o, equivalentment, $M_1/M_2 \cong k$.

3.2.3 Proposició. *El graf $\mathcal{T}$ és un arbre. Fixat un vèrtex s, tenim una correspondència entre el conjunt d'arestes amb origen s i els punts de $\mathbb{P}^1_k(k)$.*

3.2.4 Exemple. Suposem que $K = \mathbb{Q}_p$ amb $p = 2$. Aleshores cada vèrtex de l'arbre $\mathcal{T}$ té tres arestes que surten d'ell, i és infinit (però localment finit). Vegeu el dibuix 3.1.

3.2.5 Observació. El grup $\mathrm{PGL}(2, K)$ actua de manera natural en $\mathcal{T}$ de la manera següent: si A és una matriu de $\mathrm{GL}(2, K)$, aleshores

(i) Per a tot vèrtex $[M]$ de $\mathcal{T}$, $A[M] := [AM]$.

(ii) Si tenim dos vèrtexs s i s' units per una aresta $[s, s']$, aleshores $A[s, s'] := [As, As']$.

És senzill comprovar que aquesta acció esta ben definida.

Finalment observem que els "punts limit" de l'arbre $\mathcal{T}$ són els punts de $\mathbb{P}^1_K(K)$.

3.2.6 Observació. Definim semilínea de $\mathcal{T}$ les successions infinites de vèrtexs $\{s_n\}$ sense repetició tal que s_i està connectada a a s_{i-1} per a tot

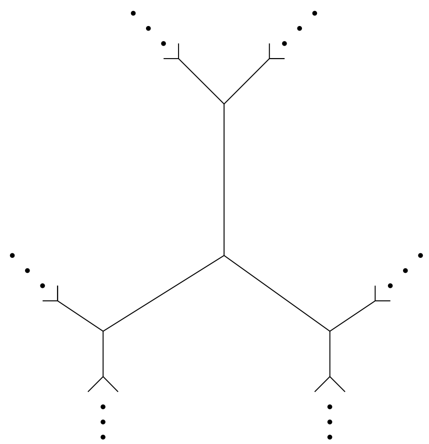

Figura 3.1: Arbre $\mathcal{T}$ per a $\mathbb{Q}_2$.

i. Aleshores el conjunt de semilínees de $\mathcal{T}$ (amb la relació d'equivalència natural) és correspon de manera natural als punts de $\mathbb{P}^1_K(K)$.

En efecte, només hem de prendre un representant M_i de s_i per a cada i i considerar el subespai $\bigcap_i M_i \otimes_R K \subset K^2$; aquest subespai ens determina el punt buscat.

Per definir una estructura d'espai rígid analític a Ω el que farem serà identificar $\mathcal{T}$ amb el graf dual de la reducció d'un cert model formal de Ω sobre R. Recordem que els espais rígids analítics són sempre la "fibra genèrica" de esquemes formals (sota unes certes condicions de finitud). En general no tenim un model formal canònic d'un espai rígid analític; en el nostre cas, però, en construirem un.

Observem que donar una xarxa M de K^2 mòdul homotècia és equivalent a donar un esquema X sobre R isomorf a la recta projectiva $\mathbb{P}^1_R$ amb fibra genèrica $\mathbb{P}^1_K$,

$$\mathbb{P}(M) := \mathbf{Proj}(\mathrm{Sym}(\mathrm{Hom}_R(M, R))).$$

Els punts R-racionals de $\mathbb{P}(M)$ és corresponen aleshores als morfismes com a R-mòduls $M \to R$. Tenim que dues xarxes M i M' són equivalents mòdul homotècia si i només si l'isomorfisme canònic entre les fibres genèriques de $\mathbb{P}(M)$ i $\mathbb{P}(M')$ puja a un isomorfisme entre $\mathbb{P}(M)$ i $\mathbb{P}(M')$.

Ara, donada una aresta $[s, s']$ de $\mathcal{T}$, escollim $M \in s$ i $M' \in s'$ tal que $\pi M \subsetneq M' \subsetneq M$. Tenim que el morfismes exhaustius $M \to M/M' \cong k$ i $M' \to M'/\pi M \cong k$ ens determinen punts $p \in \mathbb{P}(M)$ i $p' \in \mathbb{P}(M')$. Considerem l'esclatament (*blowing up*) $B_p(\mathbb{P}(M))$ de $\mathbb{P}(M)$ en el punt p i igualment $B_{p'}(\mathbb{P}(M'))$; aquests dos esquemes són canònicament isomorfs i el designarem mitjançant $\mathbb{P}(M, M')$.

3.2.7 Observació. La fibra en k de l'esquema $\mathbb{P}(M, M')$ és isomorfa a dues rectes projectives que es tallen en un punt.

3.2.8 Observació. Es pot donar una descripció més explícita de $\mathbb{P}(M, M')$ de la següent forma: si escollim com abans $M \in s$ i $M' \in s'$ tal que $\pi M \subsetneq M' \subsetneq M$ i prenem e_0, e_1 una base de M tal que e_0, πe_1 sigui una base de M', aleshores tenim que

$$\mathbb{P}(M) \cong \mathbf{Proj}(R[X_0, X_1]))$$

$$\mathbb{P}(M') \cong \mathbf{Proj}(R[Y_0, Y_1])$$

$$\mathbb{P}(M, M') \cong \text{ la clausura de } Y_0X_1 - \pi X_0Y_1 = 0 \text{ a}$$

$$\mathbf{Proj}(R[X_0Y_0, X_0Y_1, X_1Y_0, X_1Y_1]),$$

on $X_i : M \to R$ donats per $X_i(e_j) = \delta_{ij}$, i $Y_i : M \to R$ donats per $Y_i(e_0) = \delta_{i0}$ i $Y_i(\pi e_1) = \delta_{i1}$.

Ara, donat un vèrtex s de $\mathcal{T}$, sigui Ω_s l'esquema $\mathbb{P}(M) \setminus \mathbb{P}(M)(k)$ i $\widehat{\Omega_s}$ la completació de Ω_s al llarg de la fibra tancada. I, donada una aresta $[s, s']$ designarem mitjançant $\Omega_{[s,s']}$ l'esquema $\mathbb{P}(M, M')$ menys els seus punts k-racionals i mitjançant $\widehat{\Omega_{[s,s']}}$ la seva completació al llarg de la fibra tancada.

Tenim que els esquemes formals $\widehat{\Omega_s}$ i $\widehat{\Omega_{s'}}$ són de manera natural subesquemes formals oberts de $\widehat{\Omega_{[s,s']}}$. Això ens permet d'anar enganxant els diferents esquemes formals $\widehat{\Omega_{[s,s']}}$ per a totes les arestes de $\mathcal{T}$ fins a obtenir l'esquema formal $\widehat{\Omega}$.

3.2.9 Remarca. De fet aquest procediment no el podem fer a menys que l'arbre $\mathcal{T}$ sigui localment finit, o sigui que a cada vèrtex li arriben sols un nombre finit d'arestes. Per exemple, si el cos residual k és finit, aleshores $\mathcal{T}$ és localment finit.

En el cas que el nostre cos residual no és finit, l'únic que podem aconseguir és construir un espai superior no arquimedià per a qualsevol subarbre localment finit.

3.2.10 Observació. La fibra especial de $\widehat{\Omega}$ és l'arbre de rectes projectives sobre k intersecant-se en el punts k-racionals. El seu graf associat és $\mathcal{T}$ (o sigui que $\mathcal{T}$ és el graf dual de la fibra especial de $\widehat{\Omega}$).

Finalment ens cal veure que la fibra genèrica de $\widehat{\Omega}$ es pot identificar amb Ω. En fer-ho obtindrem de pas un recobriment per oberts afinoides de Ω que ens definirà la seva estructura rígida analítica.

Comencem per identificar qui és la fibra genèrica de $\widehat{\Omega_s}$ i de $\widehat{\Omega_{[s,s']}}$.

3.2.11 Lema. *La fibra genèrica de $\widehat{\Omega_s}$ és isomorfa al subconjunt de C*

$$\{\xi \in C \,|\, |\xi| \leq 1\} \ \setminus \bigcup_{\substack{a \in R \\ \mathrm{mod}\ \pi R}} \{\xi \in C \,|\, |\xi - a| \leq 1\}$$

3.2.12 Lema. *La fibra genèrica de $\widehat{\Omega_{[s,s']}}$ és isomorfa al subconjunt de C*

$$\{\xi \in C \,|\, |\xi| \leq 1\} \ \setminus \bigcup_{\substack{a \in R \\ \mathrm{mod}\ \pi R}} \{\xi \in C \,|\, |\xi - a| < 1\}$$

$$\setminus \bigcup_{\substack{b \in \pi R \\ \mathrm{mod}\ \pi^2 R}} \{\xi \in C \,|\, |\xi - a| < |\pi|\}$$

on la fibra genèrica de $\widehat{\Omega_s}$ s'identifica amb el conjunt definit al lema anterior i la fibra genèrica de $\widehat{\Omega_{s'}}$ s'identifica amb

$$\{\xi \in C \,|\, |\xi| \leq |\pi|\} \ \setminus \bigcup_{\substack{b \in \pi R \\ \mathrm{mod}\ \pi^2 R}} \{\xi \in C \,|\, |\xi - a| < |\pi|\}.$$

La demostració d'aquests lemes és senzilla; per demostrar el segon cal identificar $\mathbb{P}(M, M')$ amb l'esclatament $B_p(\mathbb{P}(M))$ de $\mathbb{P}(M)$ en el punt $p : M \to M/M' \cong k$. Vegeu el dibuix 3.2 del obert del lema anterior en el cas $K = \mathbb{Q}_2$.

Tampoc és difícil de comprovar que cadascun d'aquests conjunts són varietats rígides analítiques afinoides. Podeu consultar per exemple l'excellent article de Boutot i Carayol [BC].

Ara s'han d'identificar aquest conjunts amb subconjunts de Ω. És clar que només és necessari fer-ho per a la fibra genèrica de $\widehat{\Omega_{[s,s']}}$.

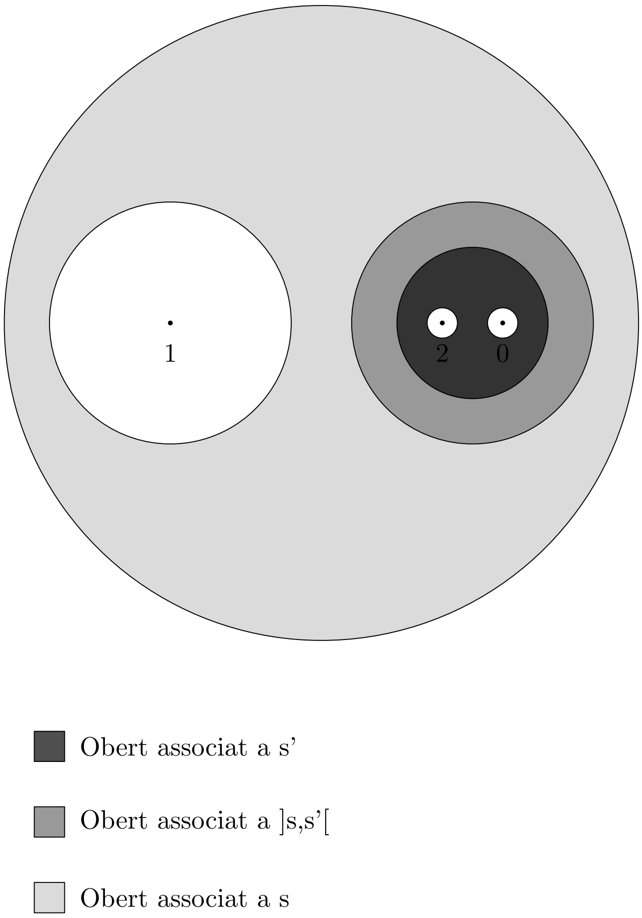

Figura 3.2: Fibra genèrica de $\widehat{\Omega_{[s,s']}}$ per a $\mathbb{Q}_2$.

Escollim com abans $M \in s$ i $M' \in s'$ tal que $\pi M \subsetneq M' \subsetneq M$ i prenem e_1, e_2 una base de M tal que e_1, πe_2 sigui una base de M'. Aleshores $e_1 = (e_1^1, e_1^2) \in K^2$ i $e_2 = (e_2^1, e_2^2) \in K^2$, i podem identificar Ω amb $C \setminus K$ mitjançant l'aplicació que a cada $[a : b] \in \Omega = \mathbb{P}^1_C \setminus \mathbb{P}^1_K$ li associa

$$\begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & C \setminus K \\ [a:b] & \longmapsto & \frac{ae_1^1+be_1^2}{ae_2^1+be_2^2} \end{array}$$

Utilitzem aquest morfisme per identificar la fibra genèrica de $\widehat{\Omega_{[s,s']}}$ amb un subconjunt de Ω.

3.2.13 Proposició. *La construcció anterior ens dona un recobriment de Ω per a varietats rígides analítiques afinoides que ens determina una estructura de varietat rígida analítica sobre K de Ω.*

La reducció d'aquesta varietat respecte a aquest recobriment és el graf infinit de rectes projectives que es tallen en els seus punts k-racionals.

La demostració d'aquest fet és estàndard. Per a reduccions de varietats rígides analítiques respecte a recobriments podeu consultar el llibre [BGR84] o bé el llibre [GvdP80].

3.3 Uniformització de corbes de Mumford

Situem-nos a partir d'ara en el cas que K és una extensió finita de $\mathbb{Q}_p$; aquest és, de fet, el cas que necessitem per estudiar les corbes de Shimura i ens simplificarà alguns dels resultats. La teoria general es pot consultar per exemple en el llibre [GvdP80] o bé de forma molt resumida en l'article [Sch00].

La resultat de Mumford és basa a associar a cada corba de Mumford X ùtal com les hem definit en la primera seccióù un cert subgroup Γ de $\mathrm{PGL}(2, K)$ i demostrar que X és de fet isomorfa a $\Gamma\backslash\Omega'$, per a una certa subvarietat analítica rígida de Ω.

La idea és senzilla: considerem el graf associat a la reducció de X (si es vol el graf dual de la reducció de X) i el seu recobriment universal G. Es pot veure que el recobriment universal és de fet un subarbre (localment finit) $\mathcal{T}'$ de l'arbre $\mathcal{T}$ de Bruhat-Tits. El grup de transformacions Γ d'aquest recobriment universal és el grup buscat. Observeu que és un grup lliure amb g generadors, on g és el nombre de "llaços" del graf. Construïm aleshores el subespai $\Omega' := \Omega_{\mathcal{T}'}$ de Ω associat a $\mathcal{T}'$ (vegeu la remarca 3.2.9).

Tenim aleshores un morfisme recobridor de la reducció de Ω' a la reducció de X amb grup de transformacions Γ. Aquest morfisme puja a un morfisme d'esquemes formals de $\widehat{\Omega'}$ a la completació formal respecte la fibra especial del model de X escollit, que ens dona un isomorfisme entre aquesta completació formal i $\Gamma\backslash\widehat{\Omega'}$ Finalment aquest Γ es pot identificar amb un subgrup de $\mathrm{PGL}(2,K)$, grup de transformacions de la recta projectiva sobre K.

3.3.1 Definicions. Un subgrup Γ de $\mathrm{PGL}(2,K)$ diem que es un subgrup de Schottky si és discret, lliure de torsió i lliure amb dos o més generadors.

Donat un subgrup de Schottky Γ, sigui Σ_Γ és conjunt de punts de $\mathbb{P}^1_K$ que són fixes per algun element de Γ diferent de l'identitat. Tenim que $\Sigma_\Gamma \subset \mathbb{P}^1(K)$ i que és infinit (ja que Γ té dos o més generadors).

Ara, donat un subconjunt infinit $\Sigma \subset \mathbb{P}^1(K)$, definim el subgraf $\mathcal{T}_\Sigma$ de $\mathcal{T}$ que té com a vèrtexs

$$Ver(\mathcal{T}_\Sigma) := \{[s(x_0,x_1,x_2)] \mid (x_0,x_1,x_2) \in \Sigma^3\},$$

on $[s((x_0,x_1,x_2))]$ és l'únic vèrtex de $\mathcal{T}$ intersecció de les tres semilinees associades a cada un dels x_i (vegeu 3.2.6), i com a arestes totes les arestes entre els vèrtexs donats.

Finalment, denotem per Ω_Γ el subespai rígid analític de Ω associat a l'arbre $\mathcal{T}_\Sigma$ per a $\Sigma = \Sigma_\Gamma$, i per $\widehat{\Omega_\Gamma}$ el subesquema formal de Ω associat.

El següent teorema va ser demostrat per David Mumford [Mum72].

3.3.2 Teorema. (Mumford) *Sigui K una extensió finita de $\mathbb{Q}_p$ amb anell d'enters R. Aleshores,*

(i) *Donat Γ un grup de Schottky de $\mathrm{PGL}(2,K)$ existeix una corba estable $\mathcal{X}_\Gamma$ sobre R amb reducció totalment degenerada split tal que la seva completació formal respecte a la fibra especial és isomorfa a $\Gamma\backslash\widehat{\Omega_\Gamma}$.*

(ii) *Donada una corba estable $\mathcal{X}$ sobre R amb reducció totalment degenerada split existeix un subgrup de Schottky Γ de $\mathrm{PGL}(2,K)$ i un isomorfisme entre $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}_\Gamma$.*

Del teorema es dedueix fàcilment la següent versió rígida analítica.

3.3.3 Teorema. *Sigui K una extensió finita de $\mathbb{Q}_p$. Aleshores*

(i) *Donat Γ un grup de Schottky de $\mathrm{PGL}(2,K)$ existeix una corba de Mumford X_Γ sobre K que és isomorfa a $\Gamma\backslash\Omega_\Gamma$ com a varietat rígida analítica.*

(ii) *Donada una corba de Mumford X sobre K existeix un subgrup de Schottky Γ de* $\mathrm{PGL}(2, K)$ *i un isomorfisme entre X i X_Γ.*

Per a veure una generalització a cossos complets respecte un valor absolut no arquimedià podeu consultar [GvdP80].

3.3.4 Exemple. Ja hem dit que les corbes $X_0(p)$, on p és un nombre primer, són corbes de Mumford sobre $\mathbb{Q}_{p^2}$, l'única extensió quadràtica no ramificada de $\mathbb{Q}_p$. No es coneix, però, una interpretació aritmètica del subgrup de Schottky associat.

3.4 El teorema de Čerednik-Drinfeld

Recordem primer alguna notació per a les corbes de Shimura.

3.4.1 Notació. Sigui B una àlgebra de quaternions indefinida de discriminant $D > 1$, i sigui $N \geq 1$ un nombre enter coprimer amb D. Fixem $\mathcal{O}(D, N)$ un ordre d'Eichler de conductor N a B, i $\mathcal{O}(D)$ un ordre maximal. Sigui $X(D, N)$ la corba de Shimura associada a $\mathcal{O}(D, N)$ (vegeu l'exposició 2). Sabem, gràcies a Shimura, que $X(D, N)$ té un model projectiu i de tipus finit a $\mathbb{Z}[1/N]$, interpretant-la com lla corba associada a un cert problema de moduli.

3.4.2 Notació. Sigui $\mathbb{C}_p$ la completació de la clausura algebraica de $\mathbb{Q}_p$.

Si K és una extensió finita de $\mathbb{Q}_p$, desiganarem mitjançant Ω_K el semiplà superior no-arquimedià associat a K; o sigui,

$$\Omega_K := \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p}(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{P}^1_K(K),$$

amb l'estructura d'espai rígid analític definida a la secció 3.2. Per a simplificar la notació, quan $K = \mathbb{Q}_p$ utilitzarem Ω.

Igualment $\widehat{\Omega_K}$ i $\widehat{\Omega}$ seran els esquemes formals associats.

Finalment, designarem per $\mathbb{Q}_{p^2}$ a l'extensió quadràtica no ramificada de $\mathbb{Q}_p$.

Fixem p un primer que divideixi D (i no divideixi N), i considerem $X(D, N)$ sobre $\mathbb{Q}_p$ i sobre $\mathbb{Z}_p$. El teorema de Čerednik-Drinfeld ens diu que $X(D, N)$ és de fet una corba de Mumford sobre $\mathbb{Q}_{p^2}$, i a més ens determina quin grup de Schottky hem de prendre. De fet, el teorema ens dona també una mena d'uniformització de $X(D, N)$ sobre $\mathbb{Q}_p$: és la torçada del quocient d'una corba de Mumford.

La idea bàsica prové de la següent construcció de Čerednik, anomenada l'intercanvi d'invariants locals.

3.4.3 Definició. Sigui B una àlgebra de quaternions indefinida de discriminant $D > 1$, i p un nombre primer dividint p. Aleshores l'àlgebra de quaternions $B^{(p)}$ obtinguda a partir de B intercanviant els invariants locals p i ∞ és l'àlgebra de quaternions definida amb discriminant D/p.

3.4.4 Lema. *Sigui $\mathcal{O}(D,N)^{(p)}$ un ordre d'Eichler de conductor N a $B^{(p)}$. Sigui*

$$\widetilde{\Gamma} := \mathcal{O}(D,N)^{(p)}[1/p]^* \subset (B^{(p)} \otimes \mathbb{Q}_p)^* \cong \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}_p)$$

i

$$\widetilde{\Gamma}_+ = \{\gamma \in \widetilde{\Gamma} \mid v_p(\det(\gamma)) \cong 0 \mod 2\}$$

Aleshores, la imatge Γ_+ de $\widetilde{\Gamma}_+$ dins de $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{Q}_{p^2})$ és un subgrup de Schottky.

Observem que Γ, la imatge de $\widetilde{\Gamma}$ a dins de $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{Q}_p)$, no és un grup de Shottky, ja que no és lliure de torsió. Tot i així podem considerar $\Gamma\backslash\Omega$, que és una corba però no és $X(D,N)$. Per obtenir $X(D,N)$ ens cal fer una construcció una mica més elaborada.

Sigui $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ l'anell de Witt de la clausura algebraica de $\mathbb{F}_p$ (o l'anell d'enters de la maxima extensió no ramificada de $\mathbb{Q}_p$). Considerem l'acció de Γ a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ donada a través del Frobenius:

$$\gamma(\lambda) = \mathrm{Frob}^{n(\gamma)}(\lambda)$$

$\forall\lambda \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$ i $\forall\gamma \in \Gamma$, on $n(\gamma) := v_p(\det(\gamma))$ i Frob és el Frobenius de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$.

Podem fer operar així Γ a $\widehat{\Omega}\widehat{\otimes}\mathbb{Z}_{p^\infty}$, que considerem com a esquema formal sobre $\mathbb{Z}_p$. Tenim aleshores el teorema següent.

3.4.5 Teorema. (Čerednik-Drinfeld) *La completació formal respecte a la fibra especial de la corba $X(D,N)$ sobre $\mathbb{Z}_p$ és canònicament isomorfa a l'esquema formal*

$$\Gamma\backslash\left(\widehat{\Omega}\widehat{\otimes}\mathbb{Z}_{p^\infty}\right)$$

Aquest teorema de fet es pot explicitar una mica més. Tenim que l'acció de Γ a Ω factoritza a través de Γ_+, d'on

$$\Gamma_+\backslash\left(\Omega\widehat{\otimes}\mathbb{Z}_{p^\infty}\right) \cong (\Gamma_+\backslash\Omega)\,\widehat{\otimes}\mathbb{Z}_{p^2}$$

3.4.6 Corol·lari. $X(D,N) \otimes \mathbb{Q}_{p^2} \cong \Gamma_+\backslash\Omega_{\mathbb{Q}_{p^2}}$ *com a varietats rígides analítiques sobre $\mathbb{Q}_{p^2}$.*

Finalment podem veure que de fet la corba de Shimura $X(D, N)$ és una torçada de $\Gamma_+ \backslash \Omega$.

3.4.7 Corol·lari. *Si designem $W := \Gamma/\Gamma_+$, aleshores W és un grup d'ordre 2, generat per w operant a $\Omega_{\mathbb{Q}_{p^2}}$ via el Frobenius, i tenim*

$$X(D, N) \cong W \backslash \left(\Gamma_+ \backslash \Omega_{\mathbb{Q}_{p^2}} \right).$$

Aquests dos corol·laris són conseqüències més o menys directes del teorema. Per donar una idea de com es demostra aquest teorema necessitem veure la interpretació de moduli que dóna Drinfeld del semiplà superior formal.

Ens podem preguntar com es que hem de fer el procés d'intercanviar invariants locals. Un idea sobre aquest fet ens la pot donar la següent proposició, conseqüència dels resultats de Serre i Tate sobre varietats abelianes sobre cossos finits.

3.4.8 Proposició. *Hi ha una única classe mòdul isogènia de parelles (A, i), on A és una superfície abeliana sobre $k := \overline{\mathbb{F}_p}$ i*

$$i : \mathcal{O}(D) \hookrightarrow End_k(A)$$

és una acció de $\mathcal{O}(D)$ a A. A més, A és isògena al producte de dues corbes el·líptiques supersingulars.

Finalment, tenim un isomorfisme natural entre $B^{(p)}$ i

$$End_{\mathcal{O}(D)}((A, i)) \otimes \mathbb{Q}$$

.

Com hem dit, la demostració de Drinfeld del teorema anterior es basa en una interpretació del semiplà superior p-àdic com a espai de moduli: és essencialment l'espai de moduli dels grups formals de pes 4 amb acció quaterniònica amb certes condicions de rigidificació. O sigui, els grups formals que es comporten com el grup formal associat a la varietat abeliana determinada en la proposició anterior. Aquest és el pas més difícil de la demostració, on s'utilitzen tècniques de Grups formals i de mòduls de Dieudonné (vegeu l'article [BC] per a una exposició més detallada).

3.4.9 Teorema. (Drinfeld) *Sigui A una superfície abeliana sobre $\overline{\mathbb{F}_p}$ amb acció de $\mathcal{O}(D)$. Sigui Φ el grup formal associat a A.*

Donada una $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-àlgebra B on p és nilpotent, designem per $F(B)$ el conjunt de classes d'isomorfisme de parelles (X, ρ) on X és un esquema *formal sobre B de dimensió dos i alçada 4 amb acció de* $\mathcal{O}(D,N)$ *i* ρ *és una quasi-isogènia d'alçada 0*

$$\rho : \Phi_{B/pB} \to X_{B/pB}.$$

Aleshores el functor F és representat per l'esquema formal sobre $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ *donat per* $\widehat{\Omega}\widehat{\otimes}\mathbb{Z}_{p^\infty}$

Bibliografia

[BC] J.-F. Boutot and H. Carayol, *Uniformisation p-adique des courbes de Shimura: Les theoremes de Cerednik et de Drinfeld. (p-adic uniformization of Shimura curves: The theorems by Cerednik and Drinfeld).*, Asterisque **196-197**, 45–158.

[BGR84] S. Bosch, U. Guentzer, and R. Remmert, *Non-archimedean analysis. a systematic approach to rigid analytic geometry*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 261, Springer Verlag, 1984.

[BL84] Siegfried Bosch and Werner Luetkebohmert, *Stable reduction and uniformization of abelian varieties. II.*, Invent. Math. **78** (1984), 257–297.

[BL85] Siegfried Bosch and Werner Luetkebohmert, *Stable reduction and uniformization of abelian varieties. I.*, Math. Ann. **270** (1985), 349–379.

[BL91] Siegfried Bosch and Werner Luetkebohmert, *Degenerating abelian varieties*, Topology **30** (1991), no. 4, 653–698.

[Che] I.V. Cherednik, *Uniformization of algebraic curves by discrete arithmetic subgroups of $PGL_2(k_w)$ with compact quotients.*, Math. USSR **29**, 55–78.

[Dri76] V.G. Drinfel'd, *Coverings of p-adic symmetric regions.*, Funct. Anal. Appl. **10** (1976), 107–115.

[GvdP80] Lothar Gerritzen and Marius van der Put, *Schottky groups and Mumford curves*, Springer, Berlin, 1980.

[Mum72] David Mumford, *An analytic construction of degenerating curves over complete local rings.*, Compositio Math. **24** (1972), 129–174.

[Sch00] Thorsten Schmechta, *Mumford-Tate curves*, pp. 111–119, Prog. Math., Birkhaeuser, 2000.

[Tat71] J. Tate, *Rigid analytic spaces*, Invent. Math. **12** (1971), 257–289.