

# Votacions amb més de dues opcions

Xavier Mora Giné

Departament de Matemàtiques, UAB

Barcelona, 27 de gener de 2014

Com és ben sabut, darrerament Catalunya s'està plantejant la possibilitat d'esdevenir un estat independent. Per tal de saber si els catalans ho volem realment així, convindria fer un referèndum. La pregunta més senzilla seria òbviament la següent:

**Pregunta 1.** Vol que Catalunya esdevingui un estat independent? Sí o no.

En altres paraules, aquesta pregunta demana de pronunciar-se per una de les dues opcions següents:

*Opció A:* Esdevenir un estat independent;

*Opció N:* No esdevenir un estat independent.

Però el passat 12 de desembre de 2013 les formacions polítiques favorables a consultar l'opinió dels catalans van pactar una pregunta una mica més complexa. Segons la corresponent nota de premsa de la Presidència de la Generalitat de Catalunya, es tracta d' "una pregunta amb dos apartats", a saber:

**Pregunta 2.** Vol que Catalunya esdevingui un Estat? Sí o no; En cas de resposta afirmativa, vol que aquest Estat sigui independent? Sí o no.

Aquest plantejament equival a una pregunta amb un sol apartat però amb tres opcions de resposta:

*Opció A:* Esdevenir un estat independent;

*Opció B:* Esdevenir un estat, però no independent;

*Opció C:* No esdevenir un estat.

Concretament, l'opció A correspon a respondre afirmativament als dos apartats de la pregunta 2 (resposta "sí-sí"), l'opció B correspon a respondre afirmativament al primer apartat

i negativament al segon (resposta "sí-no"), i l'opció C correspon a respondre negativament al primer apartat (resposta "no"). Així doncs, l'única diferència respecte al plantejament de la pregunta 1 és que l'opció N està dividida en dues parts, B i C.

---

El problema és que quan es plantegen més de dues opcions de vegades no està gens clar quin és la decisió col·lectiva més encertada. En particular, si cada individu es limita a indicar la seva opció més preferida, aleshores l'opció més votada pot ser al mateix temps la més indesitjada. Per exemple, si tenim tres opcions A, B, C, que obtenen respectivament el 40%, 25%, 35% dels vots, podria ser que els votants que es pronuncien per B i els que es pronuncien per C, que totalitzen un 60%, estiguessin tots ells d'acord que l'opció A és la pitjor possible. Dit d'una altra manera, si es plantejés una votació entre A i no-A, aleshores podria guanyar no-A. Per tant, el procediment d'elegir l'opció més votada pot donar resultats realment inadequats.

D'aquest problema en parlaven ja els autors grecs i llatins de l'antiguitat. Alguns d'ells deixen constància de diversos casos reals del seu temps en què també es va dubtar entre plantejar dues opcions o bé dividir una d'elles en dues parts i considerar per tant tres opcions. D'una situació semblant a la que hem assenyalat en el paràgraf precedent en deien el problema dels set jutges (que haurien donat a A, B, C respectivament 3, 2, 2 vots) i aquest problema l'arriben a qualificar d' "insoluble". Entre els autors que van parlar d'aquestes coses hi ha Polibi, Ciceró, Quintilià, Plini el Jove, Gelli i Heliodor d'Emesa.

Per suposat, el problema desapareix quan una de les opcions aconsegueix una majoria absoluta, és a dir, un nombre de vots superior al 50%. Però tot sovint no serà aquest el cas, de manera que cal un criteri més general.

---

D'aquesta qüestió se'n van ocupar a l'edat mitjana en Ramon Llull i en Nicolau de Cusa.<sup>1</sup>

D'entrada, és obvi que per poder resoldre el problema que hem apuntat cal que els votants donin més informació que no solament la seva opció més preferida. En relació amb això, en Ramon Llull proposava que el votants es pronunciessin sobre cada parella d'alternatives. Una altra possibilitat, com proposava en Nicolau de Cusa, és que cada votant expressi un ordre de preferència (que no és més que una manera especial de pronunciar-se sobre cada parella d'alternatives).

En qualsevol cas, una cosa és la manera de votar i una altra la manera en què es processaran els vots per tal d'arribar a una decisió col·lectiva. Tot sovint s'especifica la primera part però no la segona, com si la segona es deduís automàticament de la primera. Però no és pas així; *amb més de dues opcions, en general hi ha diversos procediments raonables els quals poden donar resultats diferents.*

Des del punt de vista de les comparacions o enfrontaments per parelles a l'estil del Ramon Llull, el problema no és tan diferent d'una competició esportiva. Els competidors són aquí les diverses opcions de les quals en volem escollir una. Donades dues opcions, X i Y, s'entén que X guanya Y si els votants que prefereixen X a Y superen en nombre als que prefereixen Y a X. Fins i tot podem prendre la quantitat de votants que prefereixen X a Y com a mesura de l'acceptació que té X davant de Y. En general també hi pot haver empats, però aquí farem cas omís d'aquesta possibilitat per tal d'anar al gra.

---

<sup>1</sup>Vegi's M. Drton, G. Hägele, F. Pukelsheim, W. Reif, 2001–09: The Augsburg Web Edition of Llull's Electoral Writings (<http://www.math.uni-augsburg.de/stochastik/llull/>) i les referències allí contingudes.

En un dels seus escrits, Llull proposava un procediment d'eliminació successiva: Comencem per dues opcions concretes, i mirem quina d'elles guanya a l'altra. La perdedora és eliminada i la guanyadora passa a ser comparada amb una tercera opció. Repetim aquesta operació fins esgotar totes les opcions. La que resti al final és declarada guanyadora de tota la competició, que en el nostre cas correspon a dir que resulta adoptada com a decisió col·lectiva. El lector difícilment se sorprendrà si diem que en general el resultat final pot dependre de l'ordre en què siguin considerades les diverses opcions.

En altres escrits, Llull havia proposat un altre criteri més global que té en compte tots els enfrontaments per parelles: Aquesta proposta consisteix en adoptar com a decisió col·lectiva l'opció que guanya un nombre més gran d'alternatives. Més concretament, Llull feia una taula de tots els enfrontaments, en cada cel·la marcava amb un punt l'opció guanyadora, i després comptava quants punts havia obtingut cada opció. Com es pot veure, és molt similar al que es fa per determinar el guanyador de la lliga de futbol.

En canvi, Nicolau de Cusa proposava un procediment que equival a adoptar com a decisió col·lectiva l'opció que obté un valor més gran en sumar les quantitats de votants que prefereixen aquesta opció a cadascuna de les altres. En la lliga de futbol, seria similar a utilitzar la diferència de gols com a criteri bàsic per determinar el campió.

En el segle XVIII, poc abans de la Revolució Francesa, el procediment de Nicolau de Cusa va ser proposat de nou per Jean-Charles de Borda, i Condorcet va fer una contraproposta molt relacionada amb el criteri global de Ramon Llull.

Quan només hi ha dues opcions, aquests procediments són tots ells equivalents. Tanmateix, amb més de dues opcions poden donar resultats diferents. Davant d'això, s'imposa de definir amb precisió quines propietats volem que tingui el procediment de decisió i d'anàlitzar amb rigor els diferents procediments possibles per veure si les compleixen o no. Tot

plegat dona lloc a una disciplina que es coneix com a *teoria de l'elecció social*.<sup>2</sup>

En particular, una de les condicions que convé demanar és el següent *principi de majoria*: Si una majoria absoluta de votants posen una mateixa opció en primer lloc, llavors aquesta opció ha de ser adoptada com a decisió col·lectiva. Això porta a descartar el procediment de Cusa i Borda, ja que és fàcil trobar exemples on incompleix aquesta condició. En canvi, els dos procediments de Llull la compleixen sempre.

---

Hi ha situacions especials en què el problema és menys complicat. Segons com es miri, la pregunta 2 es trobaria en una d'aquestes situacions menys complicades. En efecte, és bastant raonable creure que els partidaris de l'opció A (estat independent) prefereixen B (estat no independent) abans que C (no estat); i que, similarment, els partidaris de C prefereixen B abans que A. En altres paraules, estem suposant que les preferències de cadascú són sempre coherents amb l'ordre A-B-C, el qual reflecteix el diferent grau d'independentisme o unionisme de cada opció.

Doncs bé, quan hi ha una coherència d'aquesta mena entre les preferències i un ordre concret —en aquest cas A-B-C— aleshores el problema esdevé més tractable. En efecte, aleshores els dos procediments de Llull donen sempre el mateix resultat (en particular, el resultat final del procediment d'eliminació successiva no depèn de l'ordre en què es considerin les diferents opcions); a més, l'opció que resulta escollida guanya aleshores a totes i cadascuna de les altres en els enfrontaments per parelles. Per ser exactes, això val a condició que el nombre de votants sigui senar, la qual cosa evita certes possibilitats d'empat; per simplificar l'exposició, en el que segueix mantindrem aquesta suposició d'un nombre senar de votants.

D'altra banda, sota la hipòtesi que estem

---

<sup>2</sup>X. Mora, 2010: Votar, no tan fàcil com sembla, però podríem fer-ho millor! <http://mat.uab.cat/matmat/PDFv2010/v2010n01.pdf>

considerant de coherència de les preferències amb l'ordre A-B-C, el resultat d'aplicar els procediments de Llull també es pot obtenir fàcilment a partir de la llista que especifica simplement l'opció més preferida de cada votant. Concretament, n'hi ha prou amb arranjar aquesta llista en l'ordre A-B-C i seleccionar l'opció que llavors ocupa la posició central, la qual opció es coneix com a *mediana*. Per exemple, si hi hagués només 7 votants i les seves opcions més preferides fossin respectivament ACBACAA, aleshores la llista ordenada seria AAAABCC i per tant la mediana seria A. En la pràctica, la informació sobre les opcions més preferides dels votants fàcilment vindrà donada mitjançant els corresponents percentatges. En tal cas, per a determinar l'opció mediana n'hi ha prou amb calcular els corresponents percentatges acumulats i veure en quina opció se supera el 50%. Per exemple, si tenim A 40%, B 25%, C 35%, la mediana és B, ja que  $40% < 50% < 40% + 25%$ .

Totes aquestes consideracions es generalitzen fàcilment a un nombre arbitrari d'opcions. Els arguments precedents són deguts a l'economista escocès Duncan Black, que els va presentar el 1948. Tanmateix, la regla de la mediana ja havia estat proposada el 1907 per Sir Francis Galton, i encara abans, el 1625 i 1642, pel jurista holandès Hugo de Groot.

---

Tornant a la pregunta 2 sobre el futur de Catalunya, ja hem dit que és raonable creure que les preferències dels votants són coherents amb l'ordre A-B-C. *En la mesura que sigui efectivament així*, correspondria, per tant, adoptar com a decisió col·lectiva la que determini la regla de la mediana: Segons hem vist, aquesta regla selecciona l'opció A sempre que aquesta sigui la més preferida per a una majoria absoluta de votants. El mateix val per a l'opció C. En qualsevol altre cas, però, el resultat és l'opció B, *encara que ella per sí sola no comptés amb una majoria absoluta*. És de notar que això no perjudica pas l'opció A en comparació amb la pregunta 1, on per guanyar també necessita una majoria absoluta.

Tanmateix, hom pot posar en dubte la validesa de la hipòtesi de coherència de les preferències amb l'ordre A - B - C. En efecte, també es pot entendre que hi hagi qui prefereixi evitar les mitges tintes, de manera que el seu ordre de preferència sigui  $A > C > B$  o  $C > A > B$ . Això ens deixa en la situació general on *no n'hi ha prou amb conèixer la quantitat de partidaris de cada opció*. Però aquesta és l'única informació que pot proporcionar la pregunta 2 en la manera que està formulada. Així doncs, si cap opció obté una majoria absoluta, aleshores ens trobem davant del problema que els autors clàssics consideraven insoluble. I si tanquem els ulls i apliquem de tota manera la regla de la mediana, aleshores estem afavorint més del compte l'opció intermèdia B.

