Cohomología cuántica tangencial y números característicos

por

JOACHIM KOCK

Esta memoria explicativa de la tesis es una traducción de una memoria publicada en los *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, **73** (2001), 319–326.

Ulteriormente, mas tres publicaciones resultaron de la tesis:

- T. GRABER, J. KOCK, R. PANDHARIPANDE, *Descendant invariants and characteristic numbers*, Amer. J. Math. **124** (2002), 611–647.
- J. KOCK, *Characteristic numbers of rational curves with cusp or prescribed triple contact*, Math. Scand. **92**, (2003), 223–245.
- J. KOCK, *Tangency quantum cohomology*, Compositio Math. **140** (2004), 165–178.

Cohomología cuántica tangencial y números característicos

Joachim Kock

Departamento de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco
Cidade Universitária 50670-901 Recife – PE — Brasil

Manuscrito recibido el 2 de febrero de 2001; aceptado para publicación el 17 de abril de 2001; presentado por Israel Vainsencher.

Abstract

Este trabajo establece una conexión entre cohomología cuántica gravitacional y geometría enumerativa de curvas racionales (en una variedad proyectiva homogénea) sujeta a condiciones de naturaleza infinitesimal, como por ejemplo tangencia. El concepto clave es lo de clases psi modificadas que son bien apropiadas para los propósitos enumerativos y sustituye las clases psi tautológicas de gravedad 2D. Los resultados principales son dos sistemas de ecuaciones diferenciales para la función generadora de ciertos top productos de tales clases. Una es la recursión topológica mientras que la otra es Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde (WDVV). En ambos los casos, sin embargo, la métrica Riemanniana no es la métrica de Poincaré usual, sino una cierta deformación de este, lo que sorprendentemente codifica toda la combinatoria del modo peculiar por el cual las clases psi modificadas se restringen a la frontera. Esta maquinaría se aplica a varios problemas enumerativos, entre ellos números característicos en cualquier variedad proyectiva homogénea, números característicos para curvas con cusp, triplo contacto prescrito, o puntos dobles.

Palabras clave: Geometría enumerativa, números característicos, cohomología cuántica, invariantes de Gromov-Witten.

1 Introducción

Este artículo expone las ideas y resultados principales de la teoría de *Cohomología cuántica tangencial*, desarrollada en la tesis de doctorado del autor (Universidad Federal de Pernambuco, 2000), dónde se encuentran exposición detallada, demostraciones completas, y muchos ejemplos.

1.1 Vista general del contexto científico. Los problemas mas clásicos de la geometría enumerativa son los de contar curvas sujetas a condiciones de incidencia y de tangencia; las soluciones a estas cuestiones se llaman *números característicos*. Durante la década pasada, esta disciplina ha vivido una verdadera revolución instilada por ideas de la física teorética. El punto de partida fue la descubierta por M. Kontsevich (Kontsevich-Manin, 1994) que los números de curvas racionales en $\mathbb{P}^2$ sujetos a condiciones de incidencia son determinados en todos los grados por un conjunto de ecuaciones diferenciales que junto expresa la asociatividad de un *producto cuántico*, una nueva estructura sobre el espacio de cohomología de $\mathbb{P}^2$, construido mediante *aplicaciones estables*. La solución de Kontsevich a este problema clásico no tiene igual en elegancia — al final, asociatividad es uno de los conceptos mas básicos de toda la matemática.

Desde entonces, las aplicaciones estables han sido usadas para atacar también el problema mas difícil de números característicos, y algunas soluciones han sido descubiertas para curvas racionales en $\mathbb{P}^2$ (o $\mathbb{P}^r$) (Pandharipande, 1999, Ernström-Kennedy, 1998 & 1999). Asimismo, estas soluciones son bastante complicadas, y las teorías subyacentes no tienen mucha conexión con la física.

El trabajo presente, restablece esta conexión, tornando el poder de la *cohomología cuántica gravitacional* disponible a la geometría enumerativa. Eso no solo resuelve el problema de los números característicos para curvas racionales de una manera conceptualmente mucho mas sencilla, para *cualquier* variedad proyectiva homogénea, sino también permite una variedad de nuevas aplicaciones. El mas sorprendente de estos resultados es la construcción de un *producto cuántico tangencial*. Se trata de una deformación del producto cuántico usual, basada en *clases psi modificadas*. La asociatividad de este producto proporciona una solución al problema de los números característicos tan sencillo cuanto la solución de Kontsevich a la cuestión que involucra solo las condiciones de incidencia.

2 Clases psi modificadas y clases diagonales

2.1 Punto de partida. Sea X una variedad proyectiva homogénea sobre los números complejos. Fije una base $T_0, \ldots, T_r$ para el espacio de cohomología $H = H^*(X, \mathbb{Q})$.

Todas las construcciones tienen lugar en el stack $\overline{M}_{0,n}(X, \beta)$ de aplicaciones estables n-marcadas de género 0, con codominio X y de clases β. Denote por $\nu_i : \overline{M}_{0,n}(X,\beta) \to X$ el i'ésimo morfismo de avaluación Pull-backs de clases de cohomología de X vía morfismo de avaluación se llaman clases de avaluación, y top productos de clases de avaluación se llaman invariantes de Gromov-Witten. El lector es referido a Fulton-Pandharipande (1997) para propiedades básicas de aplicaciones estables, invariantes de Gromov-Witten invariantes y cohomología cuántica.

2.2 Clases psi. La clase psi tautológica $\boldsymbol{\psi}_i$ es la primera clases de Chern del fibrado lineal sobre $\overline{M}_{0,n}(X,\beta)$ cuya fibra al punto de moduli $[\mu : C \to X]$ es la línea cotangente C al i-ésimo punto marcado. La introducción de las clases psi en el invariantes Gromov-Witten corresponde en la física teorética a introducir gravedad en las teorías de campos cuánticas (Witten, 1991). La teoría de intersección de las clases psi lleva el nombre de *cohomología cuánticas gravitacional* (Manin, 1999). Las clases psi tautológicas no es compatible con pull-back al lo largo de morfismos de olvido, y por esta razón no es directamente interpretable en geometría enumerativa. Para este fin, una modificación de la clase psi es introducida.

2.3 Clases psi modificadas. La *clases psi modificada* $\overline{\boldsymbol{\psi}}_i$ es definida para $\beta > 0$ como el pull-back del espacio 1-marcado $\overline{M}_{0,1}(X,\beta)$ de la clase psi usual $\boldsymbol{\psi}_i$. La motivación para esta definición es que muchas condiciones de la geometría enumerativa admiten expresiones sencillas en termos de las clases psi modificadas, cf. §§5 y 6 abajo.

2.4 Clases diagonales. La ij'ésima *clase diagonal* $\boldsymbol{\delta}_{ij}$ es definida como la suma de todos los divisores de la frontera que tienen las marcas p_i y p_j juntas en una rama contrayente. El nombre es justificado por la siguiente propiedad básica de la cual gozan las clases diagonales: primero, se π_i es el morfismo que olvida p_i entonces $\pi_{i*}\boldsymbol{\delta}_{ij} = 1$, la clase fundamental. Y segundo,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}_{ij}\boldsymbol{\delta}_{ik} &= \boldsymbol{\delta}_{ij}\boldsymbol{\delta}_{jk} \\ -\boldsymbol{\delta}_{ij}^2 = \boldsymbol{\delta}_{ij}\overline{\boldsymbol{\psi}}_i &= \boldsymbol{\delta}_{ij}\overline{\boldsymbol{\psi}}_j. \end{aligned}$$

Sigue que todo top producto involucrando clases de avaluación, clases de psi modificadas y clases diagonales, se puedo reducir a un producto involucrando solo clases de evaluación y clases psi modificadas.

2.5 Fórmula clave. Las clases diagonales aparecen como termos de corrección cuando restringiendo clases psi modificadas a un divisor de la frontera D cuyas ambas ramas tienen grado positivo. Si D es la imagen del morfismo de pegado

$$\rho_D : \overline{M}_{0,n'+1}(X,\beta') \times_X \overline{M}_{0,n''+1}(X,\beta'') \longrightarrow \overline{M}_{0,n}(X,\beta),$$

entonces
$$\rho_D^* \overline{\boldsymbol{\psi}}_i = \overline{\boldsymbol{\psi}}_i + \boldsymbol{\delta}_{i\bullet},$$

donde $\bullet$ denota la marca de pegado.

3 El potencial cuántico tangencial y la recursión topológica

3.1 El potencial cuántico tangencial. Definimos un *descendente enumerativo* como siendo un top producto de clases psi modificadas y clases de avaluación, y ponemos (para $\gamma_i \in H$)

$$\langle\, \overline{\tau}_{k_1}(\gamma_1) \cdots \overline{\tau}_{k_n}(\gamma_n)\,\rangle_\beta := \int \overline{\boldsymbol{\psi}}_1^{k_1} \cup \nu_1^*(\gamma_1) \cup \cdots \cup \overline{\boldsymbol{\psi}}_n^{k_n} \cup \nu_n^*(\gamma_n) \cap [\overline{M}_{0,n}(X,\beta)].$$

De interese particular son los *descendentes enumerativos primeros*, o sea aquellos cuyo exponente de cada clase psi modificada es menor o igual a 1:

$$\langle\, \overline{\boldsymbol{\tau}}_0^{\mathbf{a}}\, \overline{\boldsymbol{\tau}}_1^{\mathbf{b}}\,\rangle_\beta := \langle\, \prod_{k=0}^{r} (\overline{\tau}_0(T_k))^{a_k} (\overline{\tau}_1(T_k))^{b_k}\,\rangle_\beta.$$

La función generadora de estos invariantes se llama el *potencial cuántico tangencial*:

$$\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{\beta>0} \sum_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}!} \frac{\mathbf{y}^{\mathbf{b}}}{\mathbf{b}!} \langle\, \overline{\boldsymbol{\tau}}_0^{\mathbf{a}}\, \overline{\boldsymbol{\tau}}_1^{\mathbf{b}}\,\rangle_\beta.$$

Aquí, $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_r)$ y $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_r)$ son parámetros formales, y empleamos la notación de las multi-índices $\mathbf{a}! = a_0! a_1! \cdots a_r!$, y $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_0^{a_0} x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r}$. Los variables $\mathbf{x}$ son los variables usuales de la cohomología cuántica, luego cuándo $\mathbf{y}$ es puesto igual a cero, Γ se reduce a (la parte cuántica) del potencial de Gromov-Witten en género 0.

3.2 Deformación de la métrica de Poincaré. Mientras el potencial cuántico usual es basado en la aplicación traza $\int_{\mathbf{0}} : H \to \mathbb{Q}$ (integración sobre la clase fundamental), y la métrica de Poincaré $g_{ij} = \int_{\mathbf{0}} T_i \cup T_j$, el potencial cuántico tangencial se relaciona mas naturalmente a una deformación de estos estructuras, una cierta "métrica" a valores en $\mathbb{Q}[[\mathbf{y}]]$. La aplicación traza deformada es

$$\int_{\mathbf{y}} \mathbf{z} \;:=\; \sum_{\mathbf{s}} \frac{(-2\mathbf{y})^{\mathbf{s}}}{\mathbf{s}!} \int_{\mathbf{0}} \mathbf{T}^{\mathbf{s}} \cup \mathbf{z}, \qquad\qquad \mathbf{z} \in H,$$

y la nueva métrica es dada por

$$\gamma_{ij} := \int_{\mathbf{y}} T_i \cup T_j.$$

Sea (γ^{ij}) la matriz inversa de (γ_{ij}).

3.3 Recursión topológica. Como $\overline{\boldsymbol{\psi}}_i$ admite una expresión en termos de divisores de la frontera, un tipo de recursión topológica funciona. Observe no obstante que en contraste con la recursión topológica para las clases psi usuales (Witten, 1991), la Fórmula clave 2.5 introduce muchas clases diagonales que deben ser eliminadas como explicado en 2.4. Miraculosamente, la métrica deformada codifica toda la combinatoria de las clases diagonales. Ponga $\Gamma_{x_i} := \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma$ y $\Gamma_{(x_i x_j)} := \sum_{k=0}^{r} g_{ije} g^{ef}\ \Gamma_{x_f}$ (la derivada direccional con respecto a $T_i \cup T_j$). Entonces, *el potencial tangencial satisface las ecuaciones diferenciales*

$$\Gamma_{y_k x_i x_j} = \Gamma_{x_k (x_i x_j)} - \Gamma_{(x_k x_i) x_j} - \Gamma_{(x_k x_j) x_i} + \sum_{e,f} \Gamma_{x_k x_e}\ \gamma^{ef}\ \Gamma_{x_f x_i x_j}.$$

Estas ecuaciones determinan todos los descendentes enumerativos primeros de los invariantes de Gromov-Witten.

4 El producto cuántico tangencial y estructura de Frobenius

4.1 El producto cuántico tangencial. Define una multiplicación sobre $H \otimes \mathbb{Q}[[\mathbf{x}, \mathbf{y}]]$ por la regla

$$T_i * T_j := T_i \cup T_j + \sum_{e,f} \Gamma_{ije}\ \gamma^{ef}\ T_f.$$

Aquí y abajo, para simplicidad, ponemos $\Gamma_i = \Gamma_{x_i}$.

Ahora el resultado crucial es que este *producto cuántico tangencial* es asociativo. La demostración sigue la demostración de la asociativo del producto cuántico usual (cf. Fulton-Pandharipande, 1997), y otra vez la métrica deformada entra en los termos cuadráticos para codificar la combinatoria de las clases diagonales. (En el caso especial de $X = \mathbb{P}^2$, este producto había previamente sido construido por métodos ad hoc en Ernström-Kennedy (1999).)

4.2 Estructura de Frobenius. De la observación que $T_i \cup T_j = \sum \gamma_{ije}\gamma^{ef} T_f$, sigue que si extendemos el potencial cuántico tangencial a $\beta = 0$ poniendo

$$\Phi \ := \ \Gamma \ + \ \sum_{i,j,k} \frac{x_i x_j x_k}{3!} \int_{\mathbf{y}} T_i \cup T_j \cup T_k,$$

entonces el producto cuántico tangencial se puedo escribir

$$T_i * T_j = \sum_{e,f} \Phi_{ije} \ \gamma^{ef} \ T_f,$$

y las ecuaciones de asociatividad se tornan

$$\sum_{e,f} \ \Phi_{ije} \ \gamma^{ef} \ \Phi_{fk\ell} = \sum_{e,f} \ \Phi_{jke} \ \gamma^{ef} \ \Phi_{fi\ell}.$$

Sigue fácilmente de estas construcciones que *La* $\mathbb{Q}[[\mathbf{y}]]$*-module de cohomología* $H[[\mathbf{y}]]$ *con pareamiento bilineal no-degenerado* $\gamma : H[[\mathbf{y}]] \otimes H[[\mathbf{y}]] \to \mathbb{Q}[[\mathbf{y}]]$*, equipado con el potencial cuántico tangencial* $\Phi \in \mathbb{Q}[[\mathbf{x}, \mathbf{y}]]$ *constituye una variedad de Frobenius formal sobre* $\mathbb{Q}[[\mathbf{y}]]$*.* (Vea Manin (1999) para definiciones y teoría de variedades de Frobenius.)

5 Números característicos

5.1 Condiciones de tangencia. Sea $Z \subset X$ una hipersuperficie muy amplia, y denote por $\boldsymbol{\eta}_i$ el pull-back de la clase de Z al lo largo del i'ésimo morfismo de avaluación. Se puede demostrar que el lugar de las aplicaciones que son tangentes a Z al i'ésimo punto marcado es de clase

$$\boldsymbol{\eta}_i(\boldsymbol{\eta}_i + \overline{\boldsymbol{\psi}}_i).$$

La demostración involucra una construcción de jatos la fórmula de Porteous, y un argumento de transversalidad. Además, las top intersecciones de tales lugares son transversas para hipersuperficies generales, luego los números característicos son expresados como top productos de clases psi modificadas y clases de avaluación.

5.2 Potencial de números característicos y cambio de coordenadas. Sea G la función generadora para los números característicos de curvas racionales en X. Ahora un argumento combinatorio muestra que G

es un cambio linear de coordenadas de Γ. De esta forma, una aplicación sencilla de la regla de la cadena traduce las ecuaciones de 3.3 y 4.1 en ecuaciones diferenciales para G, determinando completamente los números característicos de los números involucrando solo condiciones de incidencia (o sea, los invariantes de Gromov-Witten).

5.3 Ejemplo: curvas planas. Para dar la idea, sea $N_d(a, b, c)$ el números de curvas racionales planas de grado d, que pasan por a punto, son tangentes a b líneas, y son tangentes a c líneas a puntos dados (con $a+b+2c = 3d-1$). El potencial de los números característicos

$$G(s, u, v, w) = \sum_{d>0} \exp(ds) \sum_{a,b,c} \frac{u^a}{a!} \frac{v^b}{b!} \frac{w^c}{c!} \, N_d(a, b, c)$$

es relacionado al potencial cuántico tangencial Γ por

$$G(s, u, v, w) = \Gamma(x_1, x_2, y_1, y_2),$$

sujeto al cambio de variables:

$$\begin{array}{lll} x_0 = 0 & x_1 = s & x_2 = u + v \\ y_0 = 0 & y_1 = v & y_2 = w \end{array}$$

La métrica deformada es

$$(\gamma^{ef}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2y_1 \\ 1 & 2y_1 & 2y_1^2 + 2y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2v \\ 1 & 2v & 2v^2 + 2w \end{pmatrix},$$

y 3.3 se traduce en la siguiente ecuación diferencial satisfecha por G.

$$G_{vs} = G_{us} - G_u + \tfrac{1}{2} G_{ss} G_{ss} + 2v G_{ss} G_{us} + (v^2 + w) G_{us} G_{us}.$$

6 Aplicaciones ulteriores

6.1 Correcciones de codimensión 2. En muchas aplicaciones ulteriores, curvas con una "punto doble marcado" contribuyen donde ellos no lo deberían. Sea Π_1 la soma de todas los ciclos de codimensión 2 cuyos rama intermedio tiene grado 0 y llevan la marca p_1, mientras que las otras ramas tienen grado positivo. El potencial para "los descendentes enumerativos primeros integrados sobre Π_1" está relacionado con Γ a través de una ecuación cuadrática diferencial, ya que un integral sobre Π_1 se puede expresar como un producto de integrales sobre los espacios de modulo correspondiendo a sus ramas. (Una observación similar se aplica al potencial de "enumerativos descendentes primeros integradas contra un factor único $\overline{\boldsymbol{\psi}}_1^2$": esto sigue de un paso de la recursión topológico.)

6.2 Curvas cuspidales. Llevando en consideración las clases de la frontera descritas más arriba, las técnicas de las clases psi modificadas también proporcionan los números característicos de curvas racionales cuspidales (en $\mathbb{P}^2$ o en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$). Por ejemplo, para $\mathbb{P}^2$, el lugar de las curvas con une cusp a la primera marca se muestra siendo de clase

$$3\boldsymbol{\eta}_1^2 + 3\boldsymbol{\eta}_1\overline{\boldsymbol{\psi}}_1 + \overline{\boldsymbol{\psi}}_1^2 - \Pi_1.$$

En el contexto cuspidal, la fórmula de tangencia de 5.1 falla, porque el cusp aplicándose a una línea dada contará como tangencia a pesar de no ser un límite de una tangencia honesta. La fórmula correcta en este case es

$$\boldsymbol{\eta}_i(\boldsymbol{\eta}_i + \overline{\boldsymbol{\psi}}_i - \boldsymbol{\delta}_{1i}).$$

Ahora, el problema de los números característicos se resuelve así: Primero, las clases diagonales son expandidas utilizando las fórmulas de 2.4, y después las ecuaciones diferenciales para el potencial enriquecido de 6.1 es usado para eliminar Π_1 y $\overline{\boldsymbol{\psi}}_1^2$. El resultado final de estas manipulaciones son tres ecuaciones diferenciales que efectivamente determinan los números característicos cuspidales de los números característicos usuales.

6.3 Otros ejemplos. Muchas otras condiciones admiten descripciones sencillas en termos de las clases introducidas más arriba. Por ejemplo, el lugar de las aplicaciones estables que tienen un contacto triplo a una dada hipersuperficie $V \subset \mathbb{P}^r$ es de clases $\boldsymbol{\eta}_i(\boldsymbol{\eta}_i + \overline{\boldsymbol{\psi}}_i)(\boldsymbol{\eta}_i + 2\overline{\boldsymbol{\psi}}_i) - [\mathrm{I}_i]_3 - \boldsymbol{\eta}_i\Pi_i$. (Aquí $[\mathrm{I}_i]_3$ denota una cierta corrección que consiste en aplicaciones de dos ramas con una rama lineal aplicándose dentro de V, pero se revela que jamás contribuye.) El lugar de las aplicaciones estables que son secantes a un plano de codimensión 2 (a p_1 y a p_2) es de clase $\boldsymbol{\eta}_1^2\boldsymbol{\eta}_2^2 - \boldsymbol{\delta}_{12}\big(2\boldsymbol{\eta}_1^3 + \boldsymbol{\eta}_1^2\overline{\boldsymbol{\psi}}_1\big) - \boldsymbol{\eta}_1^2\Pi_{12}$. (En el case del plano, esto es el lugar de curvas con punto doble especificado.) Cortando este lugar con $\boldsymbol{\delta}_{12}$ obliga los dos puntos del secante a coincidir, y encontramos la clase de ser tangente a un plano de codimensión 2.

Agradecimientos

Los estudios de doctorado del autor fueron financiados por el Consejo de investigación en ciencias naturales de Dinamarca, por lo que se agradece. El autor también agradece al Departamento de Matemáticas de la Universidad Federal de Pernambuco por cuatro años encantadores, y particularmente a su director de tesis Israel Vainsencher por encaminamiento y estímulo preciosos.

Referencias

[1] L. Ernström and G. Kennedy. *Recursive formulas for the characteristic numbers of rational plane curves.* J. Alg. Geom. **7** (1998), 141–181. (alg-geom/9604019).

[2] L. Ernström and G. Kennedy. *Contact cohomology of the projective plane.* Amer. J. Math. **121** (1999), 73–96. (alg-geom/9703013).

[3] W. Fulton and R. Pandharipande. *Notes on Stable Maps and Quantum Cohomology.* In J. Kollár, R. Lazarsfeld and D. Morrison, editors, *Algebraic Geometry, Santa Cruz 1995*, vol. 62, II of Proc. Symp. Pure. Math. (1997), pp. 45–96. (alg-geom/9608011).

[4] J. Kock. *Tangency quantum cohomology and enumerative geometry of rational curves.* PhD thesis, Recife, Brazil, March 2000. Available at `http://www-math.unice.fr/~kock/GW/TESE.ps`.

[5] M. Kontsevich and Yu. I. Manin. *Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry.* Comm. Math. Phys. **164** (1994), 525–562. (hep-th/9402147).

[6] Yu. I. Manin. *Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces.* AMS Colloquium Publications, Providence, RI, 1999.

[7] R. Pandharipande. *Intersections of $\mathbb{Q}$-divisors on Kontsevich's moduli space $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ and enumerative geometry.* Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 1481–1505. (alg-geom/9504004).

[8] E. Witten. *Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space.* Surveys in Diff. Geom. **1** (1991), 243–310.