Géométrie énumérative et théorie d'intersection

Exposé par JOACHIM KOCK, 13/02/2002.

Référence principale: GRIFFITHS-HARRIS [2], Chapitre 6.

1 Introduction

(1.1) La question. — *Combien de coniques lisses sont tangentes à* 5 *coniques données en position générale ?* [1] Cette question a été formulée par STEINER en 1848. En 1859, la réponse fausse 7666 a été donnée par STEINER et BISCHOFF. La réponse correcte 3264 a été trouvée en 1864 par DE JONQUIÈRES et CHASLES. (Voir KLEIMAN [4].)

Pour la géométrie énumérative moderne via la théorie d'intersection (d'après FULTON [1]), le problème n'est pas difficile à résoudre. Dans le présent exposé, on donne les principaux arguments de la solution, avec l'intention de servir comme illustration des techniques utilisées dans la géométrie énumérative : espaces de paramètres, compactifications réalisées par éclatement, multiplicités détectées par des familles à un paramètre, arguments géométriques intuitifs, et calculs avec des classes de Chern.

(1.2) Les étapes typiques du traitement d'un problème énumératif via théorie d'intersection.

① Décrire un espace de paramètres U pour les objets qu'on veut compter.
② Décrire dans U les sous-variétés définies par les conditions imposées (et vérifier que leur intersection est un nombre fini de points, toutes des intersections transversales).
③ Trouver une compactification lisse $\widetilde{\mathrm{X}} \supset \mathrm{U}$ (pour y appliquer la théorie d'intersection).
④ Vérifier que les intersections constituent toujours un nombre fini de points dans U (et sont transversales), même lorsque les sous-variétés sont étendues au espace compact. Ou envisager une manière de contrôler les solutions erronées.
⑤ Théorie d'intersection de $\widetilde{\mathrm{X}}$: Décrire les classes de diviseurs de $\widetilde{\mathrm{X}}$ et déterminer toutes les nombres d'intersection d'entre eux.
⑥ Calculer la classe de chaque condition, en termes des diviseurs.
⑦ Calculer le produit des classes correspondantes aux condition imposées.

Les étapes ① et ② font partie de la formulation du problème. Les étapes cruciales sont ③ et ④ : les choix les plus évidentes de compactification entraînent souvent des problèmes pour la transversalité ④, tandis que les espaces plus ingénieux peuvent rendre trop difficiles les calculs des étapes ⑤ et ⑥. Donc, dans la pratique le procédé est beaucoup moins linéaire, et on doit souvent accomplir ④⑤⑥ avant de savoir si la compactification est adéquate. Les calculs de ⑤⑥ peuvent être très fastidieux, mais souvent on peut se faire aider par un ordinateur.

[1] On travaille sur le corps des nombres complexes.

(1.3) Première approche (insuffisante). — Voici comment STEINER et BISCHOFF ont procédé (des détails seront donnés à suivre): ① L'espace des coniques planes est un ouvert U dans $\mathbb{P}^5$. ② La condition pour une conique d'être tangente à une conique donnée coupe dans U une hypersurface de degré 6. Si les cinq coniques données sont en position générale, les cinq hypersurfaces s'intersectent dans des points isolés, transversalement. ③ La compactification naturelle est $\mathbb{P}^5$. ④ L'erreur est ici : l'intersection des cinq hypersurfaces n'est plus transversale dans la clôture. ⑤ La théorie d'intersection de $\mathbb{P}^5$ est facile : la seule classe est H (celle d'un hyperplan), et $\mathrm{H}^5 = 1$. ⑥ La classe de la condition est 6H, comme il a déjà été signalé. Donc, ⑦ le nombre de solutions au problème serait $(6\mathrm{H})^5 = 7666$.

On va donner les détails et faire les corrections nécessaires :

2 Géométrie des coniques planes

(2.1) Espace de paramètres pour les conique planes. — Soit X le système linéaire complète $\mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))) = \mathbb{P}^5$ de toute les coniques dans le plan projectif $\mathbb{P}^2$ (lisses ou dégénérées). Si $[x_0 : x_1 : x_2]$ sont des coordonnées de $\mathbb{P}^2$ alors toute conique est donnée par un polynôme de degré 2, qu'on peut écrire de façon matricielle :

$$[x_0 : x_1 : x_2] \begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} \\ q_{01} & q_{11} & q_{12} \\ q_{02} & q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

pour une matrice symétrique $\mathrm{Q} = (q_{ij})$. Donc on peut regarder X aussi comme l'espace projectif des matrices symétriques 3×3. Les coniques lisses constituent un ouvert $\mathrm{U} \subset \mathrm{X}$. Dans la description matricielle, c'est le lieu des matrices de rang maximal 3. Le complément est l'hypersurface W formée des matrices de rang 2 ou moins. La conique générale de W est un paires-de-droites. Le lieu des matrices de rang 1 est une sous-variété V de dimension 2. Les coniques là-dedans sont les droites-doubles. La variété V est l'image du plongement de Veronese $\mathbb{P}^2 \to \mathrm{X}$, qui envoie une forme linéaire (une droite) dans son carré (la droite double). (Par la description matricielle on peut vérifier que W est une cubique et que V est exactement son lieu singulier. En plus, W est la variété des sécantes de V.)

Avec ça, on a accompli ①. En plus, on a déjà décrit la compactification naïve $\mathrm{X} = \mathbb{P}^5$ utilisée dans la première approche (et on est bien préparé pour construire la compactification définitive : elle sera l'éclatement de X le long V).

(2.2) Coniques tangentes à une conique donnée. — Soit $\mathrm{C} \subset \mathbb{P}^2$ une conique lisse fixée. Une autre conique est tangente à C si leur intersection consiste en moins que 4 points (ou alors si les deux coniques coïncident).

Lemme (2.3) — *Le lieu des coniques tangentes à une conique donnée* C *est une hypersurface* $\mathrm{S_C} \subset \mathrm{X}$ *de degré* 6.

Démonstration. — Le degré d'une hypersurface est le nombre d'intersection avec une droite générale. Une droite dans X paramétrise un pinceau de coniques, et la question est donc : dans un pinceau de coniques, combien sont tangentes à C ? Le pinceau coupe sur C un système linéaire sans points de base, de degré 4 et dimension (vectorielle) 2. Ce système linéaire à son tour définit un morphisme $C \to \mathbb{P}^1$ qui est un recouvrement de degré 4. Par le théorème de Riemann-Hurwitz, il y a 6 points de ramification. Or, un point de ramification correspond à une conique qui coupe C en moins que 4 point, i.e. une conique tangente à C. Dans le système linéaire il y a donc 6 coniques qui sont tangentes à C. Conclusion : la droite intersecte S_C en 6 points, donc le degré de S_C est 6. □

(2.4) Questions de tangence pour les coniques dégénérées. — Une paire-de-droites Q peut être tangente à C : ou bien si une des droites est tangente à C, ou bien si le point singulier de Q (l'intersection des deux droites) tombe sur C. Mais bien entendue le cas général c'est que une paire-de-droites intersecte C en 4 points, et donc n'est pas tangente à C. C'est-à-dire que S_C ne contient pas W comme composante.

Par contre, toute droite-double est tangente à C parce qu'une droite intersecte C dans deux points seulement (chacun avec multiplicité 2). On conclut que S_C *contient toute* V *comme sous-variété.* En fait on peut être plus précis :

Lemme (2.5) — *La hypersurface* S_C *contient* V *comme sous-variété avec multiplicité* 2.

Ça veut dire que S_C est singulier le long V et que chaque droite qui intersecte S_C dans un point $x \in V$ a multiplicité 2 avec S_C. (La droite générale (qui n'intersecte pas V) intersecte S_C dans 6 points (comme on a déjà expliqué).)

Démonstration. — On considère une droite dans X qui intersecte S_C dans un point général $x \in V \subset S_C$. Donc, x correspond à une droite double 2L et pour être générale cette droite est transversale à C. Le pinceau des coniques correspondantes coupe sur C un système linéaire de degré 4 (sans points de base), définissant un recouvrement $C \to \mathbb{P}^1$ de degré 4, avec 6 points de ramification. Tout ça est comme en (2.3), mais maintenant deux des points de ramification sont les deux points dans intersection $L \cap C$. (Il y a encore 4 points qui sont en général distincts des deux premiers.) Donc, l'élément 2L du système linéaire apparaît deux fois comme tangent, donc le pinceau intersecte S_C avec multiplicité 2 dans x. (Intuitivement, la multiplicité 2 dit que chaque droite double est tangente à C deux fois.) □

(2.6) Cinq coniques données. — Soient maintenant cinq coniques générales C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 données. On demande quelles sont les coniques Q qui sont tangentes a toutes ? C'est l'intersection

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap S_5$$

dans X. On doit montrer que cette intersection est transversale dans U. (Pour le moment je ne me rappelle pas de l'argument, mais il doit se trouver dans GRIFFITHS-HARRIS [2].)

Avec ça on a complété ③.

(2.7) Position générale. — Qu'est-ce que ça veut dire, cinq coniques *générales* ? A priori il n'y a pas de signification précise. On donnera un sens à ça peu à peu, chaque fois qu'on veut exclure une configuration particulière pour contrôler le nombre des solutions. La démonstration du lemme suivant consiste à faire de telles exclusions :

Lemme (2.8) — *Pour cinq coniques générales, un point de l'intersection* $\mathrm{S}_1 \cap \mathrm{S}_2 \cap \mathrm{S}_3 \cap \mathrm{S}_4 \cap \mathrm{S}_5$ *qui est dans* W *est aussi dans* V. *En autres mots, les paires-de-droites ne contribuent pas à l'intersection.*

Démonstration. — Il faut montrer qu'une conique de type paire-de-droites ne peut jamais être tangente à cinq coniques *générales* : une droite peut être tangente à deux coniques générales au maximum, donc deux droites peuvent en tangencier quatre. Donc pour que ça soit vrai, il y a deux cas qu'on doit exclure comme non-généraux : (1) la possibilité d'avoir trois coniques ayant une droite tangente en commun, et (2) la configuration où il y a deux droites qui sont tangentes chacune à deux coniques, et dont l'intersection tombe sur la cinquième conique. □

(2.9) Le problème avec la compactification $\mathbb{P}^5$. — En conclusion, le seul problème avec la compactification $\mathbb{P}^5$ est avec les droites doubles, et c'est un problème assez sérieux : n'importe quelle droite double est tangente à n'importe quelle conique donnée. Donc, indépendant de la position des 5 coniques données, *l'intersection* $\mathrm{S}_1 \cap \mathrm{S}_2 \cap \mathrm{S}_3 \cap \mathrm{S}_4 \cap \mathrm{S}_5$ *contient toujours* V. C'est-à-dire que si on veut compter aussi les coniques dégénérées alors on a le problème qu'il y a un nombre infini de solutions (toute V), et si on ne veut pas les compter on a un problème pour faire la correction de leur contribution : comment compter les bonnes solutions (un nombre fini) parmi une infinité de solutions erronées ?

Le problème est que l'espace de paramètres n'est pas suffisamment spacieux là en V, où tout le monde se bascule...

(2.10) Nouvelle compactification : l'éclatement. — La solution pour ce problème sera d'éclater X le long V. Soit $\pi : \widetilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$ l'éclatement de X le long V, dénotant le diviseur exceptionnel $\mathrm{E} = \pi^{-1}(\mathrm{V})$. On a le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E} \arrow[r, hook, "\jmath"] \arrow[d] & \widetilde{\mathrm{X}} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{V} \arrow[r, hook, "\nu"'] & \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

Maintenant $\widetilde{\mathrm{X}}$ est notre nouvelle compactification de U : au lieu de calculer l'intersection des cinq hypersurfaces dans $\mathrm{X} = \mathbb{P}^5$, on cherche l'intersection de leurs transformées strictes dans $\widetilde{\mathrm{X}}$. Le lemme suivant montre que l'éclatement résout vraiment le problème :

Lemme (2.11) — *Pour cinq coniques assez générales, on a*

$$\mathrm{E} \cap \widetilde{\mathrm{S}}_1 \cap \widetilde{\mathrm{S}}_2 \cap \widetilde{\mathrm{S}}_3 \cap \widetilde{\mathrm{S}}_4 \cap \widetilde{\mathrm{S}}_5 = \emptyset.$$

C'est-à-dire que l'intersection des cinq hypersurfaces a lieu hors de E, et hors de E on est dans U (se rappelant que hors du diviseur exceptionnel le morphisme de l'éclatement est un isomorphisme).

Une esquisse de la démonstration du lemme sera donnée plus tard.

3 Théorie d'intersection

(3.1) L'anneau de cohomologie. — Soit X une variété lisse de dimension n. On regarde son anneau de cohomologie

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{X}) = \bigoplus_{k=0}^{2n} \mathrm{H}^{2k}(\mathrm{X}).$$

Les éléments sont les classes de cohomologie. Il y a deux manières d'avoir des classes : soit à partir de cycles (sous-variétés), soit comme classes de Chern d'un fibré vectoriel. On n'a pas le temps ici de donner la définition (voir Fulton [1]). On se borne à rappeler leurs principales propriétés :

(3.2) Propriétés des classes de cycles. — Une fois que X est lisse, la dualité de Poincaré nous permet de confondre les classes de cohomologie et les classes d'homologie. Chaque sous-variété V de X de codimension k définit une classe de cohomologie $[\mathrm{V}] \in \mathrm{H}^{2k}(\mathrm{X})$. L'espace de cohomologie est l'espace de toutes les combinaisons linéaires de tout ça. Deux sous-variétés V_0 et V_1 définissent la même classe s'il sont homologues.

L'opération de multiplication de l'anneau est définie comme intersection de sous-variétés, et on le dénote $\cup$. Donc, si V et W sont deux sous-variétés (en position générale) alors le produit de leurs classes est

$$[\mathrm{V}] \cup [\mathrm{W}] = [\mathrm{V} \cap \mathrm{W}].$$

Position générale signifie qu'elles s'intersectent transversalement dans la codimension espérée. Si l'intersection n'est pas transversale alors le produit est définie par déformation : on bouge une des variété jusqu'à ce que l'intersection soit transversale, et alors on prends la classe de cette intersection. (Avec ces définitions, la multiplication préserve la graduation (les codimensions).)

Pour X connexe on a une isomorphisme canonique $\mathrm{H}^{2n}(\mathrm{X}) \simeq \mathbb{Z}$ qui signifie *compter les points*. Les réponses aux problèmes énumératifs apparaissent toujours comme le degré d'un cycle de dimension 0 comme ça.

(3.3) Exemple : Cohomologie de $\mathbb{P}^n$. — Soit $h \in \mathrm{H}^*(\mathbb{P}^n)$ la classe d'un hyperplan. Alors l'anneau de cohomologie de $\mathbb{P}^n$ est engendré par h. Une base canonique pour $\mathrm{H}^*(\mathbb{P}^n)$ comme espace vectoriel est $h^0 = 1, h, h^2, \ldots, h^n$. La dernière est la classe d'un point. En codimension maximale on écrit abusivement des choses comme $h^n = 1$. Ça veut dire h^n est la classe de 1 point.

(3.4) Auto-intersection de deux diviseurs. — Comme exemple d'une intersection qui n'est pas du tout transversale, on regarde l'auto-intersection $[\mathrm{D}] \cup [\mathrm{D}]$ où D est un diviseur. On bouge une des copies de D et prends l'intersection. Ça va couper un diviseur sur la sous-variété D (donc le résultat est en premier lieu une classe de cohomologie de D, mais après on peut toujours l'interpréter comme classe sur X par inclusion). Or, les déformations infinitésimales de D sont paramétrisées par les sections du fibré normal N_D qui est un fibré en droites sur D. Donc l'intersection est le schéma des zéros d'une telle section sur D. La classe du schéma des zéros d'une section d'un fibré en droites L est justement $c_1(\mathrm{L})$, la première classe de Chern de L. Donc, le produit $[\mathrm{D}] \cup [\mathrm{D}]$ dans la cohomologie de X est égale à $c_1(\mathrm{N_D})$ dans la cohomologie de D (qui à son tour s'injecte dans $\mathrm{H}^*(\mathrm{X})$). Ça nous lève à l'autre notion, les classes de Chern :

(3.5) Propriétés des classes de Chern. — Soit F un fibré vectoriel de rang r sur une variété lisse X de dimension n. Les classes de Chern de F sont des classes de cohomologie

$$c_k(\mathrm{F}) \in \mathrm{H}^{2k}(\mathrm{X}), \quad k = 0, \dots, r$$

et le polynôme de Chern est la somme

$$c(\mathrm{F}) = \sum_{k=0}^{r} c_k(\mathrm{F}) \in \mathrm{H}^*(\mathrm{X}).$$

La définition n'est pas très importante. Voici les propriétés plus importantes.

- On a toujours $c_0(\mathrm{F}) = 1$.
- Si L est un fibré de rang 1, alors $c_1(\mathrm{L})$ est la classe des diviseurs du système $|\mathrm{L}|$. En autres mots, $c_1(\mathrm{L}) = [\mathrm{D}]$, $\mathrm{D} \in |\mathrm{L}|$. En particulier, pour le fibré trivial on a $c_1(\mathcal{O}_\mathrm{X}) = 0$ et donc $c(\mathcal{O}_\mathrm{X}) = 1$.
- Plus généralement, si F est de rang r, alors $c_r(\mathrm{F})$ est la classe de la variété des zéros d'une section régulière de F, c'est-à-dire, $c_r(\mathrm{F}) = [\mathrm{Z}(s)]$, $s \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{F})$.
- Les classes $c_k(\mathrm{F})$ sont nulles pour $k > n$ et aussi pour $k > r$.
- Donnée une suite exacte $0 \to \mathrm{F}' \to \mathrm{F} \to \mathrm{F}'' \to 0$, alors on a

$$c(\mathrm{F}) = c(\mathrm{F}')c(\mathrm{F}'').$$

(3.6) Polynôme de Chern du fibré tangent de $\mathrm{X} = \mathbb{P}^n$**.** — Soit $h \in \mathrm{H}^2(\mathrm{X})$ la classe d'un hyperplan. (C'est-à-dire, $c(\mathcal{O}_\mathrm{X}(1)) = 1 + h$.) De la suite exacte d'Euler,

$$0 \to \mathcal{O}_\mathrm{X} \to \mathcal{O}_\mathrm{X}(1)^{\oplus(n+1)} \to \mathrm{T_X} \to 0,$$

on obtient (utilisant les propriétés données en haut)

$$c(\mathrm{T_X}) = (1+h)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} h^k.$$

Par exemple, $c(\mathrm{T}_{\mathbb{P}^2}) = 1 + 3h + 3h^2$ (tenant compte du fait que $h^3 = 0$).

(3.7) Anneau de cohomologie d'un fibré projectif. — Soit F un fibré vectoriel de rang r sur une variété lisse X de dimension n. Soit $\mathrm{A} := \mathrm{H}^*(\mathrm{X})$. Le fibré projectif $\mathbb{P}(\mathrm{F})$ est une variété de dimension $n + r - 1$; elle est munie d'un fibré tautologique $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathrm{F})}(-1)$ (dont la fibre sur un point est la droite représentée par le point). Posons $\xi := c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathrm{F})}(1))$. La restriction de ξ à une fibre $\mathbb{P}^{r-1}$ est donc la classe d'un hyperplan de $\mathbb{P}^{r-1}$. Maintenant on a : *L'anneau de cohomologie de* $\mathbb{P}(\mathrm{F})$ *est la quotient de* $\mathrm{A}[\xi]$ *par la relation*

$$0 = \sum_{k=0}^{r} \xi^{r-k} c_k(\mathrm{F}).$$

(3.8) Éclatement. — Soit $\nu : \mathrm{V} \hookrightarrow \mathrm{X}$ un plongement régulier avec fibré normal N_ν. Soit $\pi : \widetilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$ l'éclatement de X le long V, avec diviseur exceptionnel $\mathrm{E} := \pi^{-1}(\mathrm{V}) \overset{\jmath}{\hookrightarrow} \widetilde{\mathrm{X}}$. La cohomologie de $\widetilde{\mathrm{X}}$ est engendrée par [E] et la cohomologie de X (les images inverses des classes de X). L'observation qu'il y a un isomorphisme canonique $\mathrm{E} = \mathbb{P}(\mathrm{N}_\nu)$ permet de trouver des relations dans la cohomologie de $\widetilde{\mathrm{X}}$, si on connaît les classes de Chern de N_ι. Par 3.7 on connaît la cohomologie de E, et pour lier ça avec la cohomologie de $\widetilde{\mathrm{X}}$ l'observation pertinente est que le fibré normal de E dans $\widetilde{\mathrm{X}}$ coïncide avec le fibré tautologique de $\mathbb{P}(\mathrm{N}_\nu)$, donc :

$$e := \jmath^*[\mathrm{E}] = c_1(\mathrm{N}_\jmath) = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathrm{N}_\nu}(-1)) = -\xi.$$

On verra en détails comment ça marche.

4 Théorie d'intersection de l'éclatement de $\mathbb{P}^5$.

Maintenant on peut oublier le fait que les espaces ont une interprétation en termes de coniques. Les arguments passent à être plus formels.

(4.1) Fibré normal de la Veronese. — Soient $\mathrm{X} := \mathbb{P}^5$ et $\mathrm{V} := \mathbb{P}^2$, et soit $\nu : \mathrm{V} \hookrightarrow \mathrm{X}$ la Veronese (des droites doubles). Soit $\mathrm{H} \in \mathrm{H}^2(\mathrm{X})$ la classe d'un hyperplan dans $\mathbb{P}^5$ et soit $h \in \mathrm{H}^2(\mathrm{V})$ la classe d'une droite dans $\mathbb{P}^2$. L'image inverse d'un hyperplan est une conique, donc

$$\nu^*\mathrm{H} = 2h.$$

Le fibré normal N_ν est défini par la suite exacte

$$0 \to \mathrm{T}_\mathrm{V} \to \nu^*\mathrm{T}_\mathrm{X} \to \mathrm{N}_\nu \to 0.$$

donc $c(\mathrm{N}_\nu) = c(\nu^*\mathrm{T}_\mathrm{X})/c(\mathrm{T}_\mathrm{V})$. Utilisant les expressions obtenues pour les polynômes de Chern des espaces projectifs (3.6), et substituant $\mathrm{H} = 2h$ on obtient

$$c(\mathrm{N}_\nu) \;=\; \frac{(1+\mathrm{H})^6}{(1+h)^3} \;=\; \frac{(1+2h)^6}{(1+h)^3} \;=\; \frac{1+12h+60h^2}{1+3h+3h^2} \;=\; 1+9h+30h^2.$$

Ici on utilise tou le temps le fait que $h^3 = 0$ (parce que la dimension de V est 2).

(4.2) L'éclatement. — On a le diagramme d'éclatement

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E} \arrow[r, hook, "\jmath"] \arrow[d] & \widetilde{\mathrm{X}} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{V} \arrow[r, hook, "\nu"'] & \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

La cohomologie de $\widetilde{\mathrm{X}}$ est engendrée par E et la cohomologie de X; celle-ci est bien connue. On connaît aussi la cohomologie de V, ainsi que la relation entre les deux (la relation $\nu^*\mathrm{H} = 2h$). La connaissance du fibré normal N_ν permet le calcul de la cohomologie de E, et l'interpretation du fibré normal de E dans $\widetilde{\mathrm{X}}$ en termes du fibré projectif $\mathbb{P}\mathrm{N}_\nu$ permet d'effectuer les intersections dans $\widetilde{\mathrm{X}}$ en les restreignant à E.

(4.3) Les intersections dans E. — La cohomologie de E est engendrée par les classes h et e, où $e = \jmath^*[\mathrm{E}] = c_1(\mathrm{N}_\jmath) = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathrm{N}_\nu}(-1)) = -\xi$. La formule générale pour un fibré projectif (3.7) devient maintenant

$$-e^3 + e^2 \cdot 9h - e \cdot 30h^2 = 0.$$

Maintenant nous pouvons calculer toutes les intersections maximales

$$h^4,\ eh^3,\ e^2h^2,\ e^3h,\ e^4.$$

Les deux premières sont nulles. On a

$$e^2h^2 = 1$$

pour la raison suivante : h^2 représente un point dans V, et la fibre au-dessus est un plan projectif $\mathbb{P}^2$. Or, dans ce plan, ξ est la classe d'une droite, donc $e^2 = \xi^2 = 1$ est l'intersection de deux droites.

Ensuite on calcule e^3h. Multipliant la relation par h on obtient

$$-e^3h + 9e^2h^2 = 0,$$

mais on sait déjà $e^2h^2 = 1$, donc

$$e^3h = 9.$$

Finalement, multipliant la relation par e on arrive à

$$e^4 = 9e^3h - 30e^2h^2 = 81 - 30 = 51.$$

(4.4) Les intersections dans $\widetilde{\mathrm{X}}$. — Les classes de cohomologie de $\widetilde{\mathrm{X}}$ sont [E] et π^*[H]. Pour simplicité on les dénote E e H. On veut calculer les intersections

$$\mathrm{H}^5,\ \mathrm{EH}^4,\ \mathrm{E}^2\mathrm{H}^3,\ \mathrm{E}^3\mathrm{H}^2,\ \mathrm{E}^4\mathrm{H},\ \mathrm{E}^5.$$

La première est claire : c'est la classe d'un point, $\mathrm{H}^5 = 1$. Les autres contiennent toutes un facteur E, donc on peut effectuer l'intersection sur E, par la formule

$$\int_{\widetilde{\mathrm{X}}} \mathrm{E} \cdot \alpha = \int_{\mathrm{E}} \jmath^*\alpha, \qquad \alpha \in \mathrm{H}^*(\widetilde{\mathrm{X}}).$$

Il reste à observer que $\jmath^*\mathrm{E} = e$, et que $\jmath^*\mathrm{H} = 2h$ (comme nous avons déjà observé en bas dans X). Donc,

$$\begin{array}{rcl}
\int_{\tilde{\mathrm{X}}} \mathrm{H}^5 & = & 1 \\
\int_{\tilde{\mathrm{X}}} \mathrm{EH}^4 & = & \int_{\mathrm{E}} (2h)^4 = 0 \\
\int_{\tilde{\mathrm{X}}} \mathrm{E}^2\mathrm{H}^3 & = & \int_{\mathrm{E}} e(2h)^3 = 0 \\
\int_{\tilde{\mathrm{X}}} \mathrm{E}^3\mathrm{H}^2 & = & \int_{\mathrm{E}} e^2(2h)^2 4 \\
\int_{\tilde{\mathrm{X}}} \mathrm{E}^4\mathrm{H} & = & \int_{\mathrm{E}} e^3(2h) = 18 \\
\int_{\tilde{\mathrm{X}}} \mathrm{E}^5 & = & \int_{\mathrm{E}} e^4 = 51.
\end{array}$$

(On peut observer que les deux intersections nulles s'expliquent géométriquement par le fait qu'une droite ou un plan généraux dans X n'intersectent pas la Veronese.)

(4.5) Le nombre de coniques tangentes à cinq coniques données. — C'est le nombre d'intersection

$$(6\mathrm{H} - 2\mathrm{E})^5 = \underline{\underline{3264}}.$$

5 Dualité, coniques complètes

Dans le passage de U à $\mathrm{X} = \mathbb{P}^5$ on garde l'interprétation géométrique des objets paramétrisés : au lieu de paramétriser seulement les coniques lisses, on paramétrise maintenant aussi les dégénérées. On peut faire des arguments avec les coniques dégénérées aussi, et comme ça on a réussi à détecter certaines multiplicités. Donc c'est important d'avoir une notion géométrique aussi pour les objets paramétrisés par les points dans la frontière de la compactification, dans notre cas le diviseur exceptionnel de l'éclatement. (Autre exemple : de l'espace des courbes lisses on passe à la compactification qui inclut aussi les courbes stables...) (On appelle parfois ça une *compactification modulaire*.)

Dans le cas de notre éclatement il y a une interprétation sympathique. Un objet dans E est une droite avec deux points marqués, appelés de *foyer*. Pour un pinceau de coniques qui dégénèrent dans une droite-double, les foyers de la droite-double est la position limite des foyers des coniques lisses (foyer d'une conique lisse étant la notion qu'on connaît de la géométrie analytique).

Maintenant on montre qu'une droite-double avec ses deux foyers est à considérer comme tangente à une courbe donnée si et seulement si elle est ou tangente à la courbe honnêtement (comme droite), ou si un des foyers tombe sur la courbe.

Avec cette description on peut prouver le lemme 2.11. Une droite-double considérée comme conique complète n'est plus tangente à n'importe quoi : chaque foyer peut tomber sur l'intersection de deux des coniques données, et c'est tout : ça permet seulement quatre tangences. Il faut bien sûr exclure les configurations où trois des coniques données ont un point en commun ! Il faut aussi exclure le cas où une droite qui joint deux points d'intersection d'entre quatre coniques soit tangente à la cinquième conique...

La notion de coniques complètes permet aussi une interprétation plus symétrique de l'espace $\widetilde{\mathrm{X}}$:

(5.1) Dualité. — En fait, l'espace $\widetilde{\mathrm{X}}$ est l'espace des coniques complètes : il a une description symétrique comme la correspondance en $\mathbb{P}^5 \times \check{\mathbb{P}}^5$ des coniques et des coniques duales. (C'est l'adhérence du graphe du morphisme birationnel qui associe à une conique sa conique duale.) Ainsi, l'espace peut être considéré aussi comme l'éclatement de $\check{\mathbb{P}}^5$ des coniques duales le long le lieu des coniques duales qui sont des paires-de-droites (c'est le lieu dual au lieu des coniques droites-doubles). Dénote par T la classe hyperplane de $\check{\mathbb{P}}^5$. Interpretée en X, c'est la condition qu'une conique soit tangente à une droite donnée. C'est une hypersurface dans X de degré 2 qui contient V avec multiplicité 1 (comme on vérifie facilement suivant les arguments employés pour calculer $\mathrm{S_C}$). Donc dans l'éclatement on a $\mathrm{T} = 2\mathrm{H} - \mathrm{E}$. On avait déjà calculé la classe de $\widetilde{\mathrm{S}}_\mathrm{C}$ en termes de H et E. Maintenant on peut l'écrire de mainère plus symétrique comme

$$\widetilde{\mathrm{S}}_\mathrm{C} = 2\mathrm{T} + 2\mathrm{H}.$$

On peut calculer maintenant les nombres caractéristiques fondamentaux suivants, sans utiliser toute la machinerie des classes de Chern.

$$\mathrm{H}^5 = 1, \quad \mathrm{TH}^4 = 2, \quad \mathrm{T}^2\mathrm{H}^3 = 4, \quad \mathrm{T}^3\mathrm{H}^2 = 4, \quad \mathrm{T}^4\mathrm{H} = 2, \quad \mathrm{T}^5 = 1.$$

Voyons : $H^5 = 1$ est évident, et par dualité $T^5 = 1$ aussi. $TH^4 = 2$ est le nombre de coniques dans un pinceau qui sont tangentes à une droite (comme on peut calculer regardant le système linéaire correspondant (degré 2, donc par Riemann-Hurwitz, il y a 2 points de ramification dans le morphisme défini par le système)). Ensuite, T^2H^3 est le nombre de coniques tangentes à deux droites. Pour calculer ça, on peut faire une transformation de Cremona : utilisant le système linéaire sur $\mathbb{P}^2$ qui consiste en toutes les coniques qui passent par trois points, on obtient $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, qui transforme ces coniques en droites et transforme les droites en des coniques. On vérifie qu'aux coniques tangentes à deux droites correspondent les droites tangentes à deux coniques, et il y'en a 4. Donc $T^2H^3 = 4$, et par dualité on a aussi $T^3H^2 = 4$.

Finalement on peut calculer

$$(2T+2H)^5 = 32(T+H)^5 = 32\sum_{i=0}^{5}\binom{5}{i}T^iH^{5-i} = 32(1+5\cdot 2+10\cdot 4+10\cdot 4+5\cdot 2+1) = \underline{\underline{3264}}.$$

6 Maple

Le programme SCHUBERT [3] pour MAPLE permet de faire beaucoup de calculs avec les classes de Chern. Le code suivant est extrait du manuel du programme.

```
#--------------------------------------------------------------------------
# Conics tangent to 5 plane conics.  Each tangency is a degree 6
# condition on the P^5 of conics; but it contains the degenerate conics
# with multiplicity 2.

proj(5,H,tan):             # The P^5 of conics.  Tangent bundle needed for
                           # blowup.
proj(2,h,tan):             # The P^2 of double lines.
morphism(f,Ph,PH,[H=2*h]): # The Veronese embedding.
blowup(f):                 # Construct Bf, the space of complete conics.
integral((6*H-2*Ef)^5);    # Ef is the exceptional divisor.
#--------------------------------------------------------------------------
```

Bibliographie

[1] WILLIAM FULTON. *Intersection Theory.* Springer-Verlag, New York, 1985.

[2] PHILLIP GRIFFITHS and JOE HARRIS. *Principles of Algebraic Geometry.* John Wiley and Sons, 1978.

[3] SHELDON KATZ and STEIN ARILD STRØMME. Schubert. Maple package for intersection theory. Available from http://www.mi.uib.no/~stromme/schubert/.

[4] STEVEN L. KLEIMAN. *Chasles's enumerative theory of conics: a historical introduction.* In *Studies in algebraic geometry*, pp. 117–138. MAA, Washington, D.C., 1980.