MONODROMIE ET CLASSIFICATION TOPOLOGIQUE DE GERMES DE FEUILLETAGES HOLOMORPHES

DAVID MARÍN ET JEAN-FRANÇOIS MATTEI

Table des matières

Date: 13 avril 2010.
Le premier auteur a été partiallement financé par les projets MTM2007-65122 et MTM2008-02294 du Ministerio de Educación y Ciencia de España / FEDER.

Notations et vocabulaire

- $f_{|A}$ désigne la restriction de f au sous-ensemble A,
- $\mathrm{id}_A : A \to A$ désigne l'application identité de A.
- $\overset{\circ}{A}$ désigne l'intérieur de A et $\overline{A}$ son adhérence,
- $\pi_0(A)$ désigne l'ensemble des composantes connexes de A,
- $f : (A, B) \to (A', B')$ désigne le germe le long de B d'une application $\underline{f}$ définie sur un voisinage U de $A \cap B$, à valeur dans A' et telle que $\underline{f}(A \cap B) \subset A' \cap B'$.
- $\mathbb{D}(\varepsilon)$ le disque $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \leq \varepsilon\}$,
- $\mathbb{B}_r$ la 4-boule euclidienne fermée $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \ / \ |z_1|^2 + |z_2|^2 \leq 1\}$.

Si X est une courbe holomorphe et $Y \subset X$, alors

- $\mathrm{Sing}(X)$ désigne l'ensemble des points singuliers de X,
- $\mathrm{Comp}(X)$ désigne la collection des composantes irréductibles de X,
- X', $X'' \in \mathrm{Comp}(X)$ sont dites *adjacentes* si $X' \cap X'' \neq \emptyset$,
- $v_Y(X') := \#\{D \in \mathrm{Comp}(X) \mid X'' \subset Y,\ X'' \cap X' \neq \emptyset\}$ est appelé *valence de X' dans Y*, $v(X'') := v_X(X'')$.

Pour un feuilletage régulier $\mathcal{G}$ d'une variété M et $B \subset A \subset M$,

- $\mathcal{G}_{|A}$ désignera la partition de A par les composantes connexes des intersections de A avec les feuilles de $\mathcal{G}$ et sera appelée appelée la *restriction de $\mathcal{G}$ à A*; les éléments de cette partition seront appelés *feuilles de $\mathcal{G}_{|A}$*,
- $\mathrm{Sat}_{\mathcal{G}}(B, A) \subset A$ désigne l'union de toute les feuilles de $\mathcal{G}_{|A}$ qui contiennent un point de B et est appelé *saturé de B dans A*,
- $C \subset A$ est dit *invariant par $\mathcal{G}_{|A}$* si $\mathrm{Sat}_{\mathcal{G}}(C, A) = C$.

Si $\mathcal{G}$ est un feuilletage singulier d'une surface complexe V et $S \subset V$ est une courbe holomorphe lisse, alors

- $\mathcal{O}(V, V')$ désigne l'ensemble des applications holomorphes définies sur V et à valeurs dans une variété holomorphe V',
- $\mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ désigne l'ensemble des points singulier de $\mathcal{G}$,
- $\mathcal{G}^{\mathrm{reg}}$ est le feuilletage régulier de $V \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ défini par $\mathcal{G}$,
- $\mathrm{CS}(\mathcal{G}, S, s)$ désigne l'*indice de Camacho-Sad* de $\mathcal{G}$ le long de S au point $s \in S$, la courbe S étant supposée *invariante*, i.e. $S \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ est saturé pour $\mathcal{G}^{\mathrm{reg}}$, cf. [1].

0. Introduction

L'objet de ce travail est de donner une classification topologique complète des germes en $0 \in \mathbb{C}^2$ de feuilletages holomorphes singuliers non-dicritiques, sous des conditions de généricité très faibles. Pour cela nous introduisons un invariant nouveau qui est une représentation du groupe fondamental du complémentaire des séparatrices du feuilletage dans un groupe d'automorphismes approprié, que nous appelons *monodromie du germe de feuilletage* et que nous notons $\mathfrak{M}_S^{\mathcal{F}}$.

En fait, l'origine de se travail fut la conjecture suivante, énoncée en 1986 par D. Cerveau et P. Sad, dans [3], page 246. Elle concerne des germes de feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ donnés par des germes de formes différentielles holomorphes ω et ω' en $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$.

Conjecture (Cerveau-Sad) : *"Si ω et ω' sont topologiquement conjugués et si ω est une courbe généralisée, les holonomies de chaque projectif (en dualité) dans la désingularisation, sont conjuguées."*

Elle est donnée sous deux formes, chacune avec des hypothèses de généricité naturelles qui portent sur le germe de feuilletage $\underline{\mathcal{F}}$, le long du diviseur exceptionnel $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$, obtenu par la réduction $E_{\mathcal{F}} : \mathcal{B}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{C}^2$ des singularités. La forme faible (conjecture A) suppose que les séparatrices de ces feuilletages sont des courbes lisses deux à deux transverses : $E_{\mathcal{F}}$ se réduit à un seul éclatement. La forme forte (conjecture B) demande seulement que le feuilletage réduit $\underline{\mathcal{F}} = E_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{F})$ sur $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ ne possède pas de singularité de type nœud ni selle-nœud.

La conjecture A fut résolue par l'un de nous dans [8]. Nous donnons ici une réponse positive à la conjecture B. Précisément, le théorème I ci-dessous donne une liste d'invariants topologiques, qui résout cette conjecture. Le théorème II énoncé plus loin donne une classification topologique complète.

Comme dans la situation considérée par D. Cerveau et P. Sad, nous nous restreignons à une classe "raisonnable" de feuilletages, que nous nommons de type général génériques. Les conditions (i) et (ii) de la définition de type général donnée en (1.1) permettent d'utiliser les résultats d'incompressibilité des feuilles de [9]. La condition supplémentaire (iii) sert à donner des énoncés plus simples ; elle peut être levée en modifiant les hypothèses, mais pour les énoncés que nous donnons dans cette introduction, elle sert surtout à pouvoir utiliser le théorème de rigidité transverse démontré par J. Rebelo dans [13]. La condition de généricité est la suivante :

(G) *Il existe une composante irréductible du diviseur exceptionnel de la réduction des singularités du feuilletage, dont le groupe d'holonomie n'est pas résoluble.*

Dans l'espace des coefficients du germe de 1-forme holomorphe définissant le feuilletage, cette condition est générique au sens de la topologie de Krull, d'après [5].

Théorème de rigidité transverse. [13] *Toute conjugaison topologique entre de deux germes de feuilletages holomorphes non-dicritiques, dont les singularités locales après réduction sont du type $(\lambda_1 u+\cdots)dv+(\lambda_2 v+\cdots)du$ avec $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}_{<0}$ et qui vérifient la condition de généricité* (G) *ci-dessus, est transversalement holomorphe.*

Un feuilletage satisfaisant les condition (i)-(iii) de (1.1) et la condition (G) ci-dessus sera dit *de type général générique.*

Théorème I. *Pour les germes de feuilletages $\mathcal{F}$ de type général génériques, la famille*

$$\mathcal{SL}(\mathcal{F}) := \Big([S_{\mathcal{F}}]^{\mathrm{top}},\ (\mathrm{CS}(\underline{\mathcal{F}}, D, s))_{s,\,D}\ ,\ ([\underline{\mathcal{F}}_s]^{\mathrm{hol}})_s\,, ([\mathcal{H}_{\underline{\mathcal{F}},\,D}]^{\mathrm{hol}})_D\Big)$$

formée :

- *du type topologique* $[S_{\mathcal{F}}]^{\mathrm{top}}$ *du germe de l'immersion de la séparatrice totale*[1] $S_{\mathcal{F}}$ *de* $\mathcal{F}$ *dans* $(\mathbb{C}^2, 0)$,
- *des indices de Camacho-Sad* $\mathrm{CS}(\underline{\mathcal{F}}, D, s)$ *du feuilletage réduit* $\underline{\mathcal{F}}$ *le long de chaque composante irréductible* D *du diviseur exceptionnel* $\mathcal{E}_{\mathcal{F}} := E_{\mathcal{F}}^{-1}(0)$, *en chaque point singulier* s *de* $\underline{\mathcal{F}}$,
- *des types analytiques locaux* $[\underline{\mathcal{F}}_s]^{\mathrm{hol}}$ *de* $\underline{\mathcal{F}}$ *en chaque point* $s \in \mathrm{Sing}(\underline{\mathcal{F}})$,
- *les types analytiques* $[\mathcal{H}_{\underline{\mathcal{F}}, D}]^{\mathrm{hol}}$ *des représentations d'holonomies* $\mathcal{H}_{\underline{\mathcal{F}}, D}$ *de chaque composante* D *de* $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$,

est un invariant topologique du germe $\mathcal{F}$ *en* $0 \in \mathbb{C}^2$.

La condition de généricité (G) est strictement nécessaire dans le théorème I compte tenu de la famille d'homéomorphismes $\Psi(x, y) = (x|x|^a, y|y|^b)$ conjuguant les différentes singularités linéaires hyperboliques dont les indices de Camacho-Sad ne sont pas des invariants topologiques.

Pour donner un sens à cet énoncé, précisons la signification du terme "invariant topologique". Deux germes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont *topologiquement conjugués*, s'il existe un homéomorphisme $\Psi : U \to U'$, $\Psi(0,0) = (0,0)$, entre deux voisinages ouvert de l'origine de $\mathbb{C}^2$, qui transforme toute feuille d'un représentant $\mathcal{F}_{|U}$ du germe $\mathcal{F}$ sur U, en une feuille d'un représentant $\mathcal{F}'_{|U'}$ de $\mathcal{F}'$ sur U'. Nous demandons aussi que Ψ préserve les orientations de $\mathbb{C}^2$ et celle des feuilles. Cette hypothèse est importante pour avoir l'implication : Ψ transversalement conforme $\Rightarrow$ Ψ transversalement holomorphe. Remarquons aussi que si $\mathcal{F}$ est donné par une forme différentielle holomorphe à coefficients réels alors l'homéomorphisme $\Psi(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$ conjugue $\mathcal{F}$ à lui même, préserve l'orientation de $\mathbb{C}^2$ mais reverse l'orientation des feuilles. Il peut exister aussi des homéomorphismes conjuguant $\mathcal{F}$ à lui même qui ne préservent l'orientation de $\mathbb{C}^2$ mais nous ne connaissons que le cas où $\mathcal{F}$ est régulier : $\mathcal{F} = \{dx = 0\}$ et $\Psi(x, y) = (\bar{x}, y)$ ou $(x, \bar{y})$.

Une telle conjugation topologique entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ transforme $S_{\mathcal{F}}$ en $S_{\mathcal{F}'}$. On lui associe un homéomorphisme

$$\Psi^\sharp : \mathcal{E}_{\mathcal{F}} \to \mathcal{E}_{\mathcal{F}'}\,, \quad \Psi^\sharp(\mathrm{Sing}(\underline{\mathcal{F}})) = \mathrm{Sing}(\underline{\mathcal{F}}')$$

entre les diviseurs exceptionnels, qui est unique à isotopie près ; cela grâce au théorème de marquage énoncé ci-après, obtenu dans un précédent travail [10]. *L'invariance de* $\mathcal{SL}(\mathcal{F})$ *par la conjugaison* Ψ *entre* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{F}'$, signifie alors que pour chaque composante D de $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ et chaque point $s \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$, les propriétés suivantes sont satisfaites :

a) $\mathrm{CS}(\underline{\mathcal{F}}', \Psi^\sharp(D), \Psi^\sharp(s)) = \mathrm{CS}(\underline{\mathcal{F}}, D, s))$ et $[\underline{\mathcal{F}}'_{\Psi^\sharp(s)}] = [\underline{\mathcal{F}}_s]$

b) il existe un germe de biholomorphisme ψ d'un germe (Δ, m) de courbe transverse à D en un point $m \in D \setminus \mathrm{Sing}(\underline{\mathcal{F}})$, sur un germe (Δ', m') de courbe transverse à $D' := \Psi^\sharp(D)$ au point $m' := \Psi^\sharp(m)$, qui fait

[1] Le germe $S_{\mathcal{F}} = (\cup_j S_j, 0)$ est formé des courbes analytiques irréductibles S_j *invariantes pour* $\mathcal{F}$, i.e. $S_j \setminus \{0\}$ est une feuille de $\mathcal{F}$. Celles-ci sont en nombre fini, par l'hypothèse de non-dicriticité.

commuter le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(D^\circ,\, m) \arrow[r, "\mathcal{H}_D^{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\Psi_*^\sharp"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Diff}(\Delta, m) \arrow[d, "\psi_*"] \\
\pi_1(D'^\circ,\, m') \arrow[r, "\mathcal{H}_{D'}^{\mathcal{F}'}"] & \mathrm{Diff}(\Delta', m')
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

avec $\psi_*(\varphi) := \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$ et $\Psi_*^\sharp(\dot\gamma) := \Psi^\sharp \circ \dot\gamma$.

Théorème de marquage. [10] *Soit S et S' deux germes de courbes holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^2$ et $h : (\mathbb{C}^2, 0) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C}^2, 0)$ un germe d'homéomorphisme tel que $h(S) = S'$. Désignons par E_S et $E_{S'}$ les applications de réduction (minimale) des singularités de S, resp. S'. Alors il existe un germe d'homéomorphisme $h_1 : (\mathbb{C}^2, 0) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C}^2, 0)$ tel que :*

- *(i) $h_1(S) = S'$ et les restrictions de h et h_1 aux complémentaires de S et de S' sont homotopes,*
- *(ii) $E_{S'}^{-1} \circ h_1 \circ E_S$ s'étend en un homéomorphisme d'un voisinage de $\mathcal{D}_S := E_S^{-1}(S)$ sur un voisinage de $E_{S'}^{-1}(S')$, qui est holomorphe sur un voisinage ouvert de* $\mathrm{Sing}(\mathcal{D})$ *et qui est compatible aux fibrations de Hopf en dehors d'un autre voisinage ouvert de* $\mathrm{Sing}(\mathcal{D})$*.*

Notons que $\mathcal{SL}(\mathcal{F})$ est un invariant "semi-local", dans la mesure où il ne tient compte que du comportement du feuilletage au voisinage de chaque composante de $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$, mais n'apporte pas d'information sur la combinatoire topologique globale de ces données. Il ne peut pas raisonnablement constituer, un invariant complet. L'idée clé sera de considérer la séparatrice totale $S_{\mathcal{F}}$ comme le "centre organisateur" de la topologie de $\mathcal{F}$, ainsi que l'avait conjecturé René Thom dans les années 70. Le théorème d'incompressibilité des feuilles de dans le complémentaire de $S_{\mathcal{F}}$, que nous avons obtenu dans [9] et qui joue un rôle essentiel ici, indique que le groupe fondamental du complémentaire de $S_{\mathcal{F}}$ "organise" la topologie des feuilles de $\mathcal{F}$. Il suggère aussi la possibilité de remplacer la notion d'holonomie, par celle de monodromie. La première consiste en le pseudo-groupe des automorphismes locaux de l'espace, qui proviennent des ambiguïté des intégrales premières (multiformes). La seconde rend compte du groupe des automorphismes de l'ensemble des intégrales premières (multiformes), qui proviennent des ambiguïtés de l'espace ambiant. De manière générale nous définissons :

Définition 0.0.1. *Soient $\mathcal{G}$ un feuilletage différentiable M et $q : \widetilde{M} \to M$ un revêtement universel de M. Désignons par $\widetilde{\mathcal{G}}$ le relevé de $\mathcal{G}$ sur $\widetilde{M}$ et par $\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{G}}$ l'espace des feuilles*[2] *de $\widetilde{\mathcal{G}}$. Nous appelons* monodromie de $\mathcal{G}$ *le morphisme*

$$\mathfrak{M}_M^{\mathcal{G}} : \mathrm{Aut}(\widetilde{M}, q) \to \mathrm{Aut}(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{G}})\,,$$

qui à un élément φ du groupe des automorphisme du revêtement q, fait correspondre l'automorphisme de $\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{G}}$ factorisant φ, i.e. $\mathfrak{M}_M^{\mathcal{G}}(\varphi) \circ \tau = \tau \circ$

[2]dont la structure, à part de celle d'espace topologique, sera précisé en notre situation.

φ, où τ désigne l'application qui à $p \in \widetilde{M}$ associe la feuille $\tau(p) \in \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{G}}$ contenant p.

Dans [9] nous avons construit un système fondamental $(U_\alpha)_\alpha$ de voisinages de $S_{\mathcal{F}}$ dans une boule de Milnor, tels que l'espaces des feuilles du revêtement universel $\widetilde{U}_\alpha^* \to U_\alpha^*$ de $U_\alpha^* := U_\alpha \setminus S_{\mathcal{F}}$, est une variétés holomorphe, non-séparée en général. La monodromie du feuilletage global $\mathcal{F}_{|U_\alpha^*}$ est donc une représentation de $\pi_1(U_\alpha^*, \cdot)$ à valeurs dans le groupe des automorphismes holomorphe de l'espace des feuilles de $\widetilde{U}_\alpha^*$. Elle dépend du choix de l'ouvert sur lequel est représentée le germe $\mathcal{F}$. En passant en (2.1) à la *catégorie des pro-objets*, nous germifions cette notion, ce qui nous permet de définir en (2.4.1) une notion de *monodromie d'un germe de feuilletage.* Nous définissons ensuite la notion clé de *conjugaison géométrique de monodromies* (2.5.1) qui est *réalisable sur des transversales* (2.7.1) qui permet de comparer les monodromies de deux germes de feuilletages. La puissance de cette notion vient du fait qu'elle prend simultanément en compte les "structures transverses des feuilletages" et la topologie du complémentaire de leurs séparatrices. Le théorème principal de ce travail s'énonce alors :

Théorème II *Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont de type général générique, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont conjugués par un germe d'homéomorphisme qui conserve les orientations de l'ambiant $(\mathbb{C}^2, 0)$ et celle des feuilles,*
2. *$\underline{\mathcal{F}}$ et $\underline{\mathcal{F}'}$ sont conjugués par un germe d'homéomorphisme transversalement holomorphe qui préserve l'orientation, d'un voisinage du diviseur exceptionnel $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ sur un voisinage de $\mathcal{E}_{\mathcal{F}'}$,*
3. *il existe une conjugaison géométrique des monodromies des germes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, préservant les indices de Camacho-Sad, qui est réalisée sur des germes de courbes holomorphes transverses aux séparatrices de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$.*

En fait les théorèmes (4.0.2) et (4.0.3) que nous démontrons sont plus précis que le Théorèmes I et II, l'hypothèse de généricité n'y figurant pas, mais ils s'énoncent de manière plus technique. L'énoncé de ces théorèmes et la preuve des théorèmes I et II sont faites dans le chapitre 4.

Notons que le corollaire (4.0.5) garde tout son intérêt lorsque les germes de feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont identiques. Dans ce cadre il donne le résultat suivant sur le groupe $\mathrm{Aut}_+^0(\mathcal{F})$ des germes d'homéomorphismes $h : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ qui préservent les orientations et laissent $\mathcal{F}$ invariant.

Corollaire. *Si $\mathcal{F}$ est de type général générique, pour tout $h \in \mathrm{Aut}_+^0(\mathcal{F})$ il existe un homéomorphisme $h_1 \in \mathrm{Aut}_+^0(\mathcal{F})$ qui satisfait la propriété (ii) du théorème de marquage et qui est homotope à h en restriction au complémentaire de la séparatrice totale $S_{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$.*

Cette condition d'homotopie est donnée de manière précise dans [10] ; elle équivaut à l'égalité, à automorphisme intérieur près, des applications induites par des représentants des germes h et h_1, sur le complémentaire de

$S_{\mathcal{F}}$ dans une petite boule de centre 0.

Dans un travail en préparation, nous pensons étendre ces résultats au cas des germes de feuilletages singuliers, le long d'une courbe compacte.

1. Notions préliminaires

Dans tout ce texte $S \subset \mathbb{C}^2$ désigne une courbe holomorphe fermée à singularité isolée l'origine $0 = (0, 0)$ de $\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{B} = \mathbb{B}_{r_0}$ est une *boule de Milnor* fermée pour cette courbe, i.e. chaque sphère $\partial\mathbb{B}_r$, $0 < r \leq r_0$, est transverse à S. Nous désignons par $E_S : \mathcal{B}_S \to \mathbb{B}$ l'application de *désingularisation* (minimale) de S, i.e. le *diviseur total* $\mathcal{D}_S := E_S^{-1}(S)$ est à croisement normaux. Nous notons $\mathcal{E}_S := E_S^{-1}(0)$ *le diviseur exceptionnel* et $\mathcal{S} := \overline{\mathcal{D}_S \setminus \mathcal{E}_S}$ *le transformé strict de* S. Nous adoptons aussi les conventions suivantes : pour un sous-ensemble A de $\mathbb{B}$, ou $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}_S$,

$$A^* := A \setminus S \quad \text{et} \quad \mathcal{A}^* := \mathcal{A} \setminus \mathcal{D}_S\,. \tag{2}$$

1.1. **Incompressibilité des feuilles.** Donnons-nous maintenant un feuilletage holomorphe singulier non-dicritique $\mathcal{F}$ défini au voisinage de $\mathbb{B}$, avec 0 comme seule singularité et de *séparatrice totale* le germe de S en 0 ; cela signifie que les germes de courbes (holomorphes) irréductibles invariantes de $\mathcal{F}$, sont exactement les germes des composantes irréductibles de S. Désignons par $E_{\mathcal{F}} : \mathcal{B}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{B}$ l'application de réduction minimale des singularités de $\mathcal{F}$ et par $\underline{\mathcal{F}}$ le feuilletage à singularités isolées sur $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$, défini par $E_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{F})$. Comme en [9] nous dirons que $\mathcal{F}$ est *de type général*, si les singularités de $\underline{\mathcal{F}}$ qui ne sont pas linéarisables, sont résonantes, précisément :

(TG) *en tout point singulier de $\underline{\mathcal{F}}$, il existe des coordonnées holomorphes locales u, v telles que $\underline{\mathcal{F}}$ soit localement défini par une 1-forme holomorphe qui s'écrit :*

- *(i) ou bien $\lambda_1 u dv + \lambda_2 v du$, avec $\lambda_1\lambda_2 \notin \mathbb{Q}_{<0}$ (singularité linéarisable),*
- *(ii) ou bien $(\lambda_1 u + \cdots)dv + (\lambda_2 v + \cdots)du$, avec λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{N}^*$, (selle résonante).*

En particulier $\mathcal{F}$ est une *courbe généralisée* dans la terminologie de [2] et $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \mathcal{B}_S$, $E_S = E_{\mathcal{F}}$. Pour simplifier le texte nous ferons l'hypothèse supplémentaire suivante :

(iii) *les singularités linéarisables vérifient : $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{R}_{<0}$;*

Cette hypothèse n'est pas essentielle et on peut l'enlever à condition de faire des modifications mineurs convenables dans les énoncés et les preuves des théorèmes principaux. Ceci sera fait dans un travail ultérieur.

Fixons maintenant une courbe holomorphe $\Sigma \subset \mathbb{B}$ non-nécessairement irréductible, intersectant S, lisse et transverse à $\mathcal{F}$ en dehors de S, qui satisfait la propriété suivante (toujours réalisée sous l'hypothèse (iii) précédente) :

a. *pour tout voisinage ouvert W de S dans $\mathbb{B}$, $\mathrm{Sat}_{\mathcal{F}_{|W^*}}(\Sigma \cap W^*, W^*) \cup S$ est aussi un voisinage (ouvert) de S dans $\mathbb{B}$.*

Nous dirons qu'un voisinage ouvert U de S dans $\mathbb{B}$ est $(\mathcal{F},\Sigma)$-*admissible*, si pour chaque feuille L du feuilletage régulier $\mathcal{F}_{|U^*}$, les propriétés suivantes sont satisfaites :

b. *L est incompressible dans U^*, i.e. l'inclusion $L \subset U^*$ induit un monomorphisme $\pi_1(L,p) \hookrightarrow \pi_1(U^*,p)$, $p \in L$; de plus l'application $\pi_1(U^*,p) \to \pi_1(\mathbb{B}^*,p)$ induite par l'inclusion $U^* \subset \mathbb{B}^*$ est un isomorphisme ;*

c. *tout chemin tracé dans L à extrémité dans Σ^*, homotope dans U^* à un chemin tracé dans Σ^*, est un lacet homotope dans L à un point.*

Nous désignons par $\mathfrak{U}_{\mathcal{F},\Sigma}$ la collection des voisinages ouverts connexes de S, qui sont $(\mathcal{F},\Sigma)$-admissibles.

La propriété c. ci-dessus, exprime la 1-*connexité feuilletée* de $\Sigma \cap U^*$ dans U^*. Cette notion introduite dans [9], intervient de manière essentielle dans ce travail. Le théorème principal et le théorème (6.1.1) de [9], peuvent se résumer par l'énoncé suivant :

Théorème 1.1.1. *Si $\mathcal{F}$ est de type général, $\mathfrak{U}_{\mathcal{F},\Sigma}$ est un système fondamental de voisinages de S, dans la boule (fermée) de Milnor $\mathbb{B}$.*

1.2. **Espaces des feuilles.** Pour toute la suite de cet article, nous fixons un revêtement universel $q : \widetilde{\mathbb{B}}^* \to \mathbb{B}^*$ de $\mathbb{B}^*$, que nous appelons *le revêtement universel de* $\mathbb{B}^*$; pour tout $A \subset \mathbb{B}$, nous noterons :

$$\widetilde{A}^* := q^{-1}(A^*) \quad \text{et} \quad q_A := q_{|\widetilde{A}^*} : \widetilde{A}^* \longrightarrow A^* . \tag{3}$$

Si $U \in \mathfrak{U}_{\mathcal{F},\Sigma}$, alors q_U est un revêtement universel de U^* ; nous l'appelons *le revêtement universel de U^**. Le groupe

$$\Gamma := \mathrm{Aut}_q(\widetilde{\mathbb{B}}^*)$$

des automorphismes du revêtement q, s'identifie par l'application de restriction $g \mapsto g_{|\widetilde{U}^*}$, à chaque groupe Γ_U des automorphismes du revêtement q_U. Aussi nous ferons l'identification :

$$\Gamma_\infty := \varprojlim_{U \in \mathcal{U}_{\mathcal{F},\Sigma}} \Gamma_U \simeq \Gamma . \tag{4}$$

Sur $\widetilde{\mathbb{B}}^*$ considérons le feuilletage régulier $\widetilde{\mathcal{F}}$, image réciproque de $\mathcal{F}$ par q. Pour $U \in \mathfrak{U}_{\mathcal{F},\Sigma}$, nous désignons par $\widetilde{\mathcal{F}}_U$ sa restriction à $\widetilde{U}^*$ et par

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_U^{\mathcal{F}} := \left(\widetilde{U}^* \big/ \widetilde{\mathcal{F}}_U\right) , \quad \varrho_U : \widetilde{U}^* \to \widetilde{\mathcal{Q}}_U^{\mathcal{F}} , \tag{5}$$

l'espace des feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}_U$, muni de la topologie quotient et de l'application ϱ_U de passage au quotient. Les propriétés a. b. et c. vérifiées par les ouverts de $\mathfrak{U}_{\mathcal{F},\Sigma}$, s'interprètent comme des propriétés du feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_U$, relativement à la transversale $\widetilde{\Sigma}_U^* := \widetilde{\Sigma}^* \cap \widetilde{U}^*$, cf. [9], (6.2) :

- *toute feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}_U$ est simplement connexe ;*
- *l'intersection d'une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}_U$ avec une composante connexe de $\widetilde{\Sigma}_U^*$ est soit vide, soit réduite à un point ;*
- *les restrictions de ϱ_U aux composantes connexes de $\widetilde{\Sigma}_U$, sont des homéomorphismes sur leurs images ;*

Les applications inverses des homéomorphismes ϱ_U forment visiblement un atlas holomorphe de $\widetilde{\mathcal{Q}}_U^{\mathcal{F}}$, définissant ainsi l'unique structure de variété holomorphe (non-séparée en général) telle que

- *pour toute application holomorphe $g : \mathbb{D}(1) \to \widetilde{U}^*$, l'application composée $\varrho_U \circ g : \mathbb{D}(1) \to \widetilde{\mathcal{Q}}_U^{\mathcal{F}}$ est aussi holomorphe.*

Il est clair que chaque élément g de Γ_U laisse invariant le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_U$ et se factorise en un élément noté $g_U^\flat$, du groupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{An}}(\widetilde{\mathcal{Q}}_U^{\mathcal{F}})$ des automorphismes holomorphes de $\widetilde{\mathcal{Q}}_U^{\mathcal{F}}$. Dans [9] nous avons défini *la monodromie de* $\mathcal{F}_U$, comme le morphisme de groupes

$$\mathfrak{M}_U^{\mathcal{F}} : \Gamma_U \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{An}}(\widetilde{\mathcal{Q}}_U^{\mathcal{F}}) , \qquad g \mapsto g_U^\flat . \tag{6}$$

Cette représentation de Γ_U est visiblement un invariant du feuilletage $\mathcal{F}_U$ de l'ouvert U^*. Pour obtenir un invariant du germe de $\mathcal{F}$ en 0, ou le long de S, nous allons "germifier" cette notion.

2. Monodromie d'un germe de feuilletage

2.1. **Germification.** L'ensemble $\mathfrak{U}_{\mathcal{F},\Sigma}$ est filtrant à droite pour la relation d'ordre $U \preceq V :\Longleftrightarrow U \supset V$. Les applications

$$\rho_{UV} : \widetilde{\mathcal{Q}}_V^{\mathcal{F}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{Q}}_U^{\mathcal{F}} , \quad V \subset U, \quad U, V \in \mathcal{U}_{\mathcal{F},\Sigma} , \tag{7}$$

qui associent à toute feuille L de $\widetilde{\mathcal{F}}_V$, la feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}_U$ contenant L, sont holomorphes, ouvertes et forment un système projectif que nous notons

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_\infty^{\mathcal{F}} := \left(\left(\widetilde{\mathcal{Q}}_U^{\mathcal{F}} \right)_{U \in \mathfrak{U}_{\mathcal{F},\Sigma}} , \ (\rho_{UV})_{U,V \in \mathfrak{U}_S,\, U \preceq V} \right) . \tag{8}$$

Nous appelons ce système, *pro-espace des feuilles de* $\widetilde{\mathcal{F}}$. C'est un objet de la catégorie $\underleftarrow{\mathrm{An}}$ des pro-objets associée à la catégorie An des variétés holomorphes (non-nécessairement séparées) et applications holomorphes.

Rappelons que les *objets de* $\underleftarrow{\mathrm{An}}$ sont les familles projectives de variétés holomorphes ; d'autre part, étant donnés deux ensembles ordonnés filtrants à droite $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, ainsi que deux objets de $\underleftarrow{\mathrm{An}}$:

$$M = ((M_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{A}}, \, (\zeta_{\alpha\alpha'})_{\alpha \geq \alpha'}) \quad \text{et} \quad M' = \left((M'_\beta)_{\beta \in \mathfrak{B}}, \, (\zeta'_{\beta\beta'})_{\beta \geq \beta'} \right) ,$$

l'espace des $\underleftarrow{\mathrm{An}}$-*morphismes* de M vers M' est par définition l'ensemble :

$$\mathrm{Hom}_{\underleftarrow{\mathrm{An}}}(M, \, M') := \varprojlim_{\beta \in \mathfrak{B}} \varinjlim_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{O}(M_\alpha, \, M'_\beta) , \tag{9}$$

où $\mathcal{O}(M_\alpha, \, M'_\beta)$ désigne l'ensemble des applications holomorphes de M_α dans M'_β. Nous allons apporter quelques précisions sur cette notion dans les cas qui nous seront utiles. Pour plus de généralité, le lecteur pourra par exemple consulter l'ouvrage [4] de Régine et Adrien Doudy.

2.2. **Pro-germes à l'infini.** Soit T une variété holomorphe et K une sous-variété holomorphe de $\widetilde{\mathbb{B}}^*$. Le système

$$(K, \infty) := \left((K \cap \widetilde{U}^*)_{U \in \mathfrak{U}_{\mathcal{F},\Sigma}}, \, (\iota_{UV})_{U,V \in \mathfrak{U}_{\mathcal{F},\Sigma}, V \subset U} \right) , \tag{10}$$

formé des applications d'inclusion ι_{UV} de $K\cap\widetilde{V}^*$ dans $K\cap\widetilde{U}^*$, est un objet de $\underleftarrow{\mathrm{An}}$. Nous appelons *germe à l'infini de K vers T* et notons $g:(K,\infty)\to T$, tout élément de l'ensemble :

$$\mathcal{O}((K,\infty),\,T) := \varinjlim_{U\in\mathfrak{U}_{\mathcal{F},\Sigma}}\mathcal{O}(K\cap\widetilde{U}^*,\,T)\,. \tag{11}$$

En considérant T comme un système projectif constant, $\mathcal{O}((K,\infty),T)$ s'identifie trivialement à $\mathrm{Hom}_{\underleftarrow{\mathrm{An}}}((K,\infty),\,T)$.

Remarque 2.2.1. Pour la topologie de K induite par $\widetilde{\mathbb{B}}^*$, le pré-faisceau $W\mapsto\mathcal{O}((W,\infty),\,T)$ n'est pas un faisceau et deux pro-germes distincts $f,g\in\mathcal{O}((K,\infty),T)$ peuvent coïncider, comme éléments de $\mathcal{O}((K\cap V_j,\infty)$, sur intersection de K avec chaque ouvert d'un recouvrement $(V_j)_{j\in J}$. En particulier, si K possède un nombre infini de composantes connexes K^α, chacune d'elle vérifiant $\overline{q(K^\alpha)}\cap S\neq\emptyset$, alors l'application de restriction $\mathcal{O}(K,\infty)\to\prod_\alpha\mathcal{O}(K^\alpha,\infty)$ n'est jamais surjective.

Supposons maintenant que T est contenu dans $\widetilde{\mathbb{B}}^*$. Nous appelons *pro-germe à l'infini de K vers T* et notons $f:(K,\infty)\to(T,\infty)$ les éléments de l'ensemble

$$\mathcal{O}((K,\infty),\,(T,\infty)) := \mathrm{Hom}_{\underleftarrow{\mathrm{An}}}((K,\infty),(T,\infty))\,.$$

En d'autres termes, f est une famille de pro-germes

$$f=(f_V)_{V\in\mathcal{U}_{\mathcal{F},\,\Sigma}}\in\prod_{V\in\mathfrak{U}_{\mathcal{F},\Sigma}}\mathcal{O}((K,\infty),\,T\cap V)\,,$$

telle que pour $W\subset V$, $\varsigma_{VW}\circ f_W=f_V$, ς_{WV} désignant l'application d'inclusion de $T\cap W$ dans $T\cap V$.

Remarque 2.2.2. Les mêmes notions avec la catégorie Top des espaces topologiques et applications continues, définissent l'ensemble

$$C^0((K,\infty),\,(T,\infty)) := \mathrm{Hom}_{\underleftarrow{\mathrm{Top}}}((K,\infty),(T,\infty))$$

des pro-germes continus.

Notons que le groupe des pro-germes à l'infini d'automorphismes de revêtement, s'identifie canoniquement au groupe Γ_∞ défini en (4) :

$$\Gamma_\infty\simeq\left\{\varphi\in\mathrm{Aut}_{\underleftarrow{\mathrm{An}}}(\widetilde{\mathbb{B}}^*,\infty)\ \mid q_\infty\circ\varphi=q_\infty\right\}\,, \tag{12}$$

$q_\infty:(\widetilde{\mathbb{B}}^*,\infty)\to\mathbb{B}$ désignant le germe à l'infini de l'application de revêtement.

2.3. **Pro-germes canoniques.** Désignons par $\tau_{K,U}:(K,\infty)\to\widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}}_U$, $U\in\mathfrak{U}_{\mathcal{F},\Sigma}$, le germe à l'infini de la restriction à K de l'application de passage au quotient $\widetilde{U}\to\widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}}_U$. L'élément

$$\tau_K := (\tau_{K,U})_{U\in\mathfrak{U}_{\mathcal{F},\,\Sigma}}\in\mathrm{Hom}_{\underleftarrow{\mathrm{An}}}((K,\infty),\,\widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}}_\infty)\subset\prod_{U\in\mathfrak{U}_{\mathcal{F},\Sigma}}\mathcal{O}((K,\infty),\,\widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}}_U) \tag{13}$$

sera appelé *le pro-morphisme canonique associé à K*. La proposition suivante se déduit sans peine des propriétés du feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_U$ relativement à $\widetilde{\Sigma}^*_U$, énoncées en (1.1).

Proposition 2.3.1. *Si K est une composante connexe de $\widetilde{\Sigma}^*$, alors τ_K est un monomorphisme de la catégorie $\underleftarrow{\mathrm{An}}$.*

2.4. **Monodromie du germe de $\mathcal{F}$.** Soit g un élément de Γ_∞ et U, V deux ouverts de $\mathcal{U}_{\mathcal{F},\,\Sigma}$, $V \subset U$. Avec les notations (6) et (7) nous avons les relations de commutation :

$$g_U^\flat \circ \rho_{UV} = \rho_{UV} \circ g_V^\flat \in \mathcal{O}(\widetilde{\mathcal{Q}}_V^{\mathcal{F}}\,,\ \widetilde{\mathcal{Q}}_U^{\mathcal{F}})\,.$$

Ainsi, en notant $\mathcal{O}(\widetilde{\mathcal{Q}}_\infty^{\mathcal{F}},\ \widetilde{\mathcal{Q}}_U^{\mathcal{F}}) := \varinjlim_{V \in \mathfrak{U}_{\mathcal{F},\,\Sigma}} \mathcal{O}(\widetilde{\mathcal{Q}}_V^{\mathcal{F}},\ \widetilde{\mathcal{Q}}_U^{\mathcal{F}})$, les éléments

$$g_{U\infty}^\flat := \varinjlim_V (g_U^\flat \circ \rho_{UV}) \in \mathcal{O}(\widetilde{\mathcal{Q}}_\infty^{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathcal{Q}}_U^{\mathcal{F}})$$

forment une famille projective. Le $\underleftarrow{\mathrm{An}}$-endomorphisme

$$g^\flat := (g_{U\infty}^\flat)_{U \in \mathfrak{U}_{\mathcal{F},\,\Sigma}} \in \mathrm{End}_{\underleftarrow{\mathrm{An}}}(\widetilde{\mathcal{Q}}_\infty^{\mathcal{F}}) \subset \prod_{U \in \mathfrak{U}_{\mathcal{F},\,\Sigma}} \mathcal{O}(\widetilde{\mathcal{Q}}_\infty^{\mathcal{F}},\ \widetilde{\mathcal{Q}}_U^{\mathcal{F}})\,, \tag{14}$$

est inversible et, avec ces notations, son inverse est égal à $(g^{-1})^\flat$. Plus généralement, nous avons les relations de co-variance :

$$(g \circ h)^\flat = g^\flat \circ h^\flat\,, \quad g,\ h \in \Gamma_\infty\,.$$

Nous sommes maintenant en mesure de définir une notion de monodromie qui dépend uniquement du germe de $\mathcal{F}$ le long de S.

Définition 2.4.1. *Nous appelons* monodromie du germe de $\mathcal{F}$ le long de S, *le morphisme de groupes :*

$$\mathfrak{M}_S^{\mathcal{F}} : \Gamma_\infty \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\underleftarrow{\mathrm{An}}}(\widetilde{\mathcal{Q}}_\infty^{\mathcal{F}})\,, \qquad g \mapsto \mathfrak{M}_S^{\mathcal{F}}(g) := g^\flat\,.$$

2.5. **Conjugaison de monodromies.** Fixons maintenant, et pour toute la suite de cet article, une seconde courbe $S' \subset \mathbb{C}^2$ à singularité isolée $\{0\}$, ainsi qu'une boule de Milnor fermée $\mathbb{B}'$ pour S'. Désignons encore par $E_{S'} : \mathcal{B}'_{S'} \to \mathbb{B}'$, $\mathcal{D}_{S'}$, $\mathcal{E}_{S'}$, $\mathcal{S}'$, respectivement : l'application de réduction minimale de S', la transformée totale, le diviseur exceptionnel et la transformé stricte de S'. Pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté avec la notation (2), nous posons :

$$A^\star := A \setminus S'\,, \quad \mathcal{A}^\star := \mathcal{A} \setminus \mathcal{D}_{S'}\,, \quad \text{pour} \quad A \subset \mathbb{B}' \quad \text{et} \quad \mathcal{A} \subset \mathcal{B}'_{S'}\,. \tag{15}$$

Fixons aussi un feuilletage $\mathcal{F}'$ holomorphe sur un voisinage de $\mathbb{B}'$, à singularité isolée $\{0\}$, non-dicritique, de type général et de séparatrice totale S'. Considérons une courbe holomorphe $\Sigma' \subset \mathbb{B}'$, $\Sigma' \cap S' \neq \emptyset$, non-nécessairement irréductible, lisse et transverse à $\mathcal{F}'$ en dehors de S', telle que pour tout voisinage ouvert W de S' dans $\mathbb{B}'$, l'ensemble $\mathrm{Sat}_{\mathcal{F}'_{|W^\star}}(W^\star \cap \Sigma', W^\star) \cup S'$ soit un voisinage (ouvert) de S' dans $\mathbb{B}'$. Enfin désignons par $\mathfrak{U}_{\mathcal{F}',\Sigma'}$ l'ensemble des voisinages ouverts de S' dans $\mathbb{B}'$, qui sont $(\mathcal{F}', \Sigma')$-admissibles et fixons un revêtement universel $q' : \widetilde{\mathbb{B}}'^\star \to \mathbb{B}'^\star$. Pour $A \subset \mathbb{B}'$, nous posons :

$$\widetilde{A}^\star := q'^{-1}(A^\star)\,, \quad \text{et} \quad q'_A := q'_{|\widetilde{A}^\star} : \widetilde{A}^\star \to A^\star\,. \tag{16}$$

Comme en (4) et en (12), nous identifions la limite projective des groupes Γ'_U des automorphismes des revêtements $q'_{U'}$, avec le groupe des pro-automorphismes à l'infini de $\mathbb{B}'$, qui "respectent" le germe q'_∞ de q' à l'infini :

$$\Gamma'_\infty := \varprojlim_{U \in \mathfrak{U}_{\mathcal{F}',\Sigma'}} \Gamma'_U \simeq \left\{ \varphi \in \mathrm{Aut}_{\underleftarrow{\mathrm{An}}}(\mathbb{B}', \infty) \ \middle|\ q'_\infty \circ \varphi = q'_\infty \right\}\,.$$

2.5.1. **Notions de conjugaison.** Nous dirons que les monodromies $\mathfrak{M}_S^{\mathcal{F}}$ et $\mathfrak{M}_{S'}^{\mathcal{F}'}$ sont *algébriquement équivalentes*, s'il existe des isomorphismes de groupes

$$\mathfrak{g} : \Gamma_\infty \xrightarrow{\sim} \Gamma'_\infty \quad \text{et} \quad \mathfrak{h} : \mathrm{Aut}_{\underleftarrow{\mathrm{An}}}(\widetilde{\mathcal{Q}}_\infty^{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_{\underleftarrow{\mathrm{An}}}(\widetilde{\mathcal{Q}}_\infty^{\mathcal{F}'})$$

satisfaisant la relation de commutation : $\mathfrak{h} \circ \mathfrak{M}_{S'}^{\mathcal{F}'} = \mathfrak{M}_S^{\mathcal{F}} \circ \mathfrak{g}$. Si de plus il existe un élément h de $\mathrm{Isom}_{\underleftarrow{\mathrm{An}}}(\widetilde{\mathcal{Q}}_\infty^{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathcal{Q}}_\infty^{\mathcal{F}'})$, tel que $\mathfrak{h}$ soit le *morphisme de conjugaison* h_*,

$$\mathfrak{h} = h_* : \varphi \mapsto h \circ \varphi \circ h^{-1}\,, \tag{17}$$

nous dirons que le couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est une *conjugaison algébrique entre* $\mathfrak{M}_S^{\mathcal{F}}$ *et* $\mathfrak{M}_{S'}^{\mathcal{F}'}$.

Définition 2.5.1. *Une* conjugaison géométrique des monodromies $\mathfrak{M}_S^{\mathcal{F}}$ et $\mathfrak{M}_{S'}^{\mathcal{F}'}$, *est une conjugaison algébrique* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *telle qu'il existe un germe d'homéomorphisme* g *de* $(\mathbb{B}, S)$ *sur* $(\mathbb{B}', S')$ *préservant les orientations de* $\mathbb{B}$, $\mathbb{B}'$ *et de* S, S' *et un pro-germe à l'infini* $\widetilde{g}$ *de* $(\widetilde{\mathbb{B}}^*, \infty)$ *vers* $(\widetilde{\mathbb{B}}'^{\star}, \infty)$ *relevant* g, *i.e.* $q'_\infty \circ \widetilde{g} = g \circ q_\infty$, *tels que* $\mathfrak{g}$ *soit égal au* morphisme de conjugaison *défini par* $\widetilde{g}$ *:*

$$\mathfrak{g} = \widetilde{g}_* : \Gamma_\infty \to \Gamma'_\infty\,, \quad \varphi \mapsto \widetilde{g} \circ \varphi \circ \widetilde{g}^{-1}\,. \tag{18}$$

Nous avons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_\infty & \xrightarrow{\mathfrak{M}_S^{\mathcal{F}}} & \mathrm{Aut}_{\underleftarrow{\mathrm{An}}}(\widetilde{\mathcal{Q}}_\infty^{\mathcal{F}}) \\ {\scriptstyle \mathfrak{g}=\widetilde{g}_*} \downarrow & \circlearrowright & \downarrow {\scriptstyle \mathfrak{h}=h_*} \\ \Gamma'_\infty & \xrightarrow{\mathfrak{M}_{S'}^{\mathcal{F}'}} & \mathrm{Aut}_{\underleftarrow{\mathrm{An}}}(\widetilde{\mathcal{Q}}_\infty^{\mathcal{F}'}) \end{array}\,. \tag{19}$$

Nous dirons que le triplet $(g, \widetilde{g}, h)$ *représente géométriquement* la conjugaison $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Remarque 2.5.2. Si $(\mathfrak{f}, \mathfrak{h})$ est une conjugaison géométrique entre $\mathfrak{M}_S^{\mathcal{F}}$ et $\mathfrak{M}_{S'}^{\mathcal{F}'}$, alors pour tout $\varphi \in \Gamma_\infty$ et tout $\varphi' \in \Gamma'_\infty$, les couples

$$(\mathfrak{f} \circ \varsigma_\varphi,\, \mathfrak{h} \circ \mathfrak{M}_S^{\mathcal{F}}(\varphi)) \quad \text{et} \quad (\varsigma_{\varphi'} \circ \mathfrak{f},\, \mathfrak{M}_{S'}^{\mathcal{F}'}(\varphi') \circ \mathfrak{h})$$

sont aussi des conjugaisons géométriques de ces monodromies, ς_φ et $\varsigma_{\varphi'}$ désignant ici les automorphismes intérieurs de Γ_∞ et de Γ'_∞, définis respectivement par φ et par φ'.

Remarque 2.5.3. Soit $\Theta_t : U \xrightarrow{\sim} \Theta_t(U)$, $U \subset \mathbb{B}$, *une* S*-isotopie*, c'est à dire une famille d'homéomorphismes dépendant continûment du paramètre $t \in [0, 1]$, telle que : U et $\Theta_t(U)$ sont des voisinages ouverts de S dans $\mathbb{B}$, $\Theta_0 = \mathrm{id}_U$, $\Theta_t(S) = S$ et, pour tout $p \in U \cap \partial\mathbb{B}$, $\Theta_t(p) = p$. Désignons par $\widetilde{\Theta}_t$ le plongement ouvert de $\widetilde{U}^*$ dans $\widetilde{\mathbb{B}}^*$ qui relève Θ_t, i.e. $q' \circ \widetilde{\Theta}_t = \Theta_t \circ q$ et tel que $\widetilde{\Theta}_t(\widetilde{p}) = \widetilde{p}$ pour $q(\widetilde{p}) \in \partial\mathbb{B}$. Il dépend continûment de t et $\widetilde{\Theta}_0 = id_{\widetilde{U}^*}$. Alors, si $(g, \widetilde{g}, h)$ est une représentation d'une conjugaison $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, il en est de même[3] de $(g \circ \Theta_1, \widetilde{g} \circ \widetilde{\Theta}_1, h)$. On voit aussi que si $\Theta'_t : U' \xrightarrow{\sim} \Theta'_t(U')$,

[3]Les application induites $(\widetilde{g} \circ \Theta_t)_* : \Gamma_\infty \to \Gamma'_\infty$ "dépendent continûment" de t, elles sont donc constantes.

$U' \in \mathbb{B}'$, $t \in [0,1]$, est une S'-isotopie, alors $(\Theta'_1 \circ g, \widetilde{\Theta}'_1 \circ \widetilde{g}, h)$ est encore une représentation de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

2.6. **Marquage d'un germe de courbe.** Dans [10] nous avons défini la notion de marquage du germe de courbe $(S', 0)$ par le germe $(S, 0)$, comme une classe de la relation d'*équivalence fondamentale*. Celle-ci porte sur l'ensemble des germes de $\mathcal{C}^0$-automorphismes de $(\mathbb{C}^2, 0)$ qui transforment le germe $(S, 0)$ en le germe $(S', 0)$. D'après la proposition (2.8) de [10], ϕ_0 est fondamentalement équivalent à ϕ_1 si et seulement si les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées

(1) *il existe $\varepsilon > 0$ et une homotopie $\Phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{B}^*_\varepsilon \times [0,1], \mathbb{B}'^\star)$ telle que $\Phi(\cdot, 0)$ et $\Phi(\cdot, 1)$ sont respectivement des représentants des restrictions au complémentaire de S, des germes ϕ_0 et ϕ_1 ;*

(2) *sur une boule $\mathbb{B}_\varepsilon$, il existe des représentants $\underline{\phi}_0$, $\underline{\phi}_1$ des germes ϕ_0 et ϕ_1 et pour tout $p \in \mathbb{B}^*_\varepsilon$, il existe un chemin α tracé dans $\mathbb{B}'^\star$ d'origine $\underline{\phi}_0(p)$, d'extrémité $\underline{\phi}_1(p)$, tel que le morphisme $\alpha_* : \dot{\gamma} \mapsto \dot{\alpha}^{-1} \vee \dot{\gamma} \vee \dot{\alpha}$ fait commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{B}^*_\varepsilon, p) & \xrightarrow{\underline{\phi}_{0*}} & \pi_1(\mathbb{B}'^\star, \underline{\phi}_0(p)) \\ & \searrow_{\underline{\phi}_{1*}} & \downarrow \alpha_* \\ & & \pi_1(\mathbb{B}'^\star, \underline{\phi}_1(p)) \end{array} .$$

Remarque 2.6.1. Le morphisme $\mathfrak{g}$ d'une conjugaison géométrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ des monodromies $\mathfrak{M}_S^{\mathcal{F}}$ et $\mathfrak{M}_{S'}^{\mathcal{F}'}$, définit sans ambiguïté un marquage de $(S', 0)$ par $(S, 0)$, que nous désignerons aussi par $\mathfrak{g}$.

Nous avons montré dans [10] que tout marquage peut être représenté par un homéomorphisme possédant de bonnes propriétés de régularité. Pour préciser celles-ci, fixons pour chaque composante irréductible D de $\mathcal{D}_S$ et D' de $\mathcal{D}_{S'}$, des germes de submersions holomorphes

$$\pi_D : (\mathcal{D}_S, D) \to D \quad \text{et} \quad \pi_{D'} : (\mathcal{D}_{S'}, D) \to D' \tag{20}$$

dont les restrictions à D, resp. D', sont l'identité. Nous les appelons *fibrations de Hopf de D et de D'*. Donnons nous aussi en chaque point $s \in \mathrm{Sing}(\mathcal{D}_S)$ et $s' \in \mathrm{Sing}(\mathcal{D}_{S'})$, des cartes holomorphes $(x_s, y_s) : \mathcal{W}_s \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(1)^2$, $(x_{s'}, y_{s'}) : \mathcal{W}_{s'} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(1)^2$, dont les domaines de définitions ne s'intersectent pas et telles que $\mathcal{D}_S$ et $\mathcal{D}_{S'}$ soient monomiaux dans ces cartes. Nous appelons [4] *système local*, la collection de ces données :

$$\mathcal{L} := ((\pi_D)_D,\, (x_s, y_s)_s)\,, \quad \mathcal{L}' := ((\pi_{D'})_{D'},\, (x_{s'}, y_{s'})_{s'})\,. \tag{21}$$

Définition 2.6.2. *Un germe d'homéomorphisme g de $(\mathbb{B}, S)$ sur $(\mathbb{B}', S')$ sera dit* excellent dans les systèmes locaux $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$*, s'il se relève en un germe d'homéomorphisme G de $(\mathcal{B}_S, \mathcal{D}_S)$ sur $(\mathcal{B}'_{S'}, \mathcal{D}_{S'})$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

(1) $G(\mathcal{D}_S) = \mathcal{D}_{S'}$ et $G(\mathcal{D}_S \cap \mathcal{W}_s) = \mathcal{D}_{S'} \cap \mathcal{W}'_{G(s)}$, $s \in \mathrm{Sing}(\mathcal{D}_S)$,

[4] Cette définition est moins riche que celle introduite en [10]

(2) *sur un voisinage de* $\mathrm{Sing}(\mathcal{D}_S)$*, G est holomorphe et vérifie les égalités*[5] *:* $x_{s'} \circ G = x_s$*,* $y_{s'} \circ G = y_s$*,*

(3) *en restriction à un voisinage de l'adhérence de* $\mathcal{D}_S \setminus \bigcup_{s \in \mathrm{Sing}(\mathcal{D}_S)} \mathcal{W}_s$*, G commute aux fibrations de Hopf, i.e.* $\pi_{G(D)} \circ G = G \circ \pi_D$*,*

Les systèmes locaux $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ étant fixés, le théorème de marquage évoqué dans l'introduction s'écrit maintenant de manière précise.

Théorème 2.6.3. [10] *Tout marquage de S' par S, possède un représentant excellent dans les systèmes locaux $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$.*

Corollaire 2.6.4. *Toute conjugaison géométrique des monodromies $\mathfrak{M}_S^{\mathcal{F}}$ et $\mathfrak{M}_{S'}^{\mathcal{F}'}$, peut être représentée géométriquement par un triplet $(g, \widetilde{g}, h)$ où g est excellent dans les systèmes locaux $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$.*

Remarque 2.6.5. Notons que d'après le corollaire (3.19) de [10], un marquage équivaut aussi à la donnée d'un isomorphisme entre les groupes fondamentaux de $\mathbb{B}^*$ et de $\mathbb{B}'^\star$, qui respecte les structures périphériques et les méridiens canoniques, cf. section (3.3) de [10]. Cette notion se traduit ici par la donnée de collections $\mathrm{Per}(S)$ et $\mathrm{Per}(S')$ de sous-groupes de Γ et Γ', que le lecteur pourra préciser après avoir lu le chapitre (5). Il vient alors :

– *une conjugaison algébrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ entre $\mathfrak{M}_S^{\mathcal{F}}$ et $\mathfrak{M}_{S'}^{\mathcal{F}'}$, est géométrique si et seulement si $\mathfrak{g}$ respecte les structures périphériques, i.e.* $\mathfrak{g}(\mathrm{Per}(S)) = \mathrm{Per}(S')$*.*

On voit facilement que la classe d'isotopie de la restriction aux diviseurs totaux d'un représentant excellent d'un marquage de $(S', 0)$ par $(S, 0)$, ne dépend pas du choix de ce représentant. Un marquage définit ainsi un "marquage semi-local" au sens développé par M. Seguy dans sa thèse [14].

2.7. **Réalisation de conjugaisons.** Soient $V \subset \mathbb{B}$ et $V' \subset \mathbb{B}'$ tels que $\overline{V^*} \cap S$ et $\overline{V'^\star} \cap S'$ soient non-vides. Désignons par $\Gamma_{\widetilde{V}^*, \infty}$, resp. $\Gamma'_{\widetilde{V}'^\star, \infty}$, le sous-groupe de $\mathrm{Aut}_{\underleftarrow{\mathrm{An}}}(\widetilde{V}^*, \infty)$, resp. $\mathrm{Aut}_{\underleftarrow{\mathrm{An}}}(\widetilde{V}'^\star, \infty)$, constitué des germes à l'infini φ qui satisfont : $q_\infty \circ \varphi = q_\infty$, resp. $q' \circ \varphi = q'_\infty$. Visiblement les applications de restriction définissent des monomorphismes de groupes $\iota : \Gamma_\infty \hookrightarrow \Gamma_{\widetilde{V}^*, \infty}$ et $\iota : \Gamma'_\infty \hookrightarrow \Gamma'_{\widetilde{V}'^\star, \infty}$.

Définition 2.7.1. *Une conjugaison $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ des monodromies $\mathfrak{M}_S^{\mathcal{F}}$ et $\mathfrak{M}_{S'}^{\mathcal{F}'}$, est dite* réalisable sur les germes (V, S) et (V', S')*, s'il existe un triplet $(\psi, \widetilde{\psi}, h)$ constitué : d'un $\underleftarrow{\mathrm{An}}$-isomorphisme h de $\widetilde{\mathcal{Q}}_\infty^{\mathcal{F}}$ sur $\widetilde{\mathcal{Q}}_\infty^{\mathcal{F}'}$ tel que $\mathfrak{h} = h_*$, cf. (17), d'un germe d'homéomorphisme ψ de (V, S) vers (V', S') et d'un pro-germe à l'infini $\widetilde{\psi} \in \mathrm{Hom}_{\underleftarrow{\mathrm{Top}}}((\widetilde{V}^*, \infty), (\widetilde{V}'^\star, \infty))$ relevant ψ, i.e. $q'_\infty \circ \widetilde{\psi} = \psi \circ q_\infty$, tels que les les diagrammes suivants soient commutatifs :*

$$
(\star)_{\widetilde{\psi}} \quad
\begin{array}{ccc}
(\widetilde{V}^*, \infty) & \xrightarrow{\widetilde{\psi}} & (\widetilde{V}'^\star, \infty) \\
\tau_{\widetilde{V}^*} \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \tau_{\widetilde{V}'^\star} \\
\widetilde{\mathcal{Q}}_\infty^{\mathcal{F}} & \xrightarrow{h} & \widetilde{\mathcal{Q}}_\infty^{\mathcal{F}'}
\end{array}
\ , \qquad
(\star\star)_{\widetilde{\psi}} \quad
\begin{array}{ccc}
\Gamma_\infty & \overset{\iota}{\hookrightarrow} & \Gamma_{\widetilde{V}^*, \infty} \\
\mathfrak{g} \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \widetilde{\psi}_* \\
\Gamma'_\infty & \overset{\iota'}{\hookrightarrow} & \Gamma'_{\widetilde{V}'^\star, \infty}
\end{array}
$$

[5] Cette propriété ne figure pas dans [10], mais elle est satisfaite par l'homéomorphisme construit dans la démonstration du théorème (2.6.3).

où $\tau_{\widetilde{V}^*}$ et $\tau_{\widetilde{V}'^\star}$ sont les pro-germes canoniques définis en (2.3) et $\widetilde{\psi}_*$ est le morphisme de conjugaison $\varphi \mapsto \widetilde{\psi} \circ \varphi \circ \widetilde{\psi}^{-1}$. Nous dirons alors que le triplet $(\psi, \widetilde{\psi}, h)$ est une réalisation de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sur les germes (V, S) et (V', S')*, ou plus simplement sur V et V'.*

Remarque 2.7.2. Si $g : (\mathbb{B}, S) \to (\mathbb{B}', S')$ désigne une conjugaisons transversalement holomorphe entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, tout relevé $\widetilde{g} : (\widetilde{\mathbb{B}}^*, \infty) \to (\widetilde{\mathbb{B}}'^*, \infty)$ de g, définit un $\underleftarrow{\mathrm{An}}$-isomorphisme h de $\widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}}_\infty$ sur $\widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}'}_\infty$. Le couple $(\widetilde{g}_*, h_*)$ formé des isomorphismes de conjugaison (18) et (17), est une conjugaison géométrique entre les monodromies de ces germes de feuilletages et $(g, \widetilde{g}, h)$ réalise cette conjugaison sur $\mathbb{B}$.

Remarque 2.7.3. Si W est une sous variété de V telle que $\overline{W^*} \cap S \neq \emptyset$, la restriction $(\psi_{|W}, \widetilde{\psi}_{|\widetilde{W}^*}, h)$ d'une réalisation $(\psi, \widetilde{\psi}, h)$ de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sur (V, S), est une réalisation de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sur W et $\psi(W)$.

Appelons *$\mathcal{F}$-isotopie* toute S-isotopie $\Theta_t : U \to \Theta_t(U)$, $U \subset \mathbb{B}$, au sens de (2.5.3), qui satisfait la propriété supplémentaire : pour tout $p \in U$, l'application $[0, 1] \ni t \mapsto \Theta_t(p)$ est à valeurs dans une feuille de $\mathcal{F}$. On définit de même la notion de $\mathcal{F}'$-isotopie. Nous avons la propriété d'invariance suivante :

Proposition 2.7.4. *Soit $\Theta_t : U \to \Theta_t(U)$, resp. $\Theta'_t : U' \to \Theta'_t(U')$, $t \in [0, 1]$, une $\mathcal{F}$-isotopie resp. $\mathcal{F}'$-isotopie, définie sur un voisinage ouvert $U \supset S$ de $\mathbb{B}$, resp. $U' \supset S'$ de $\mathbb{B}'$ et soit $(g, \widetilde{g}, h)$ une réalisation d'une conjugaison $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ des monodromies de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, sur des sous-ensembles V et V' de $\mathbb{B}^*$ et $\mathbb{B}'^\star$. Alors $(\Theta'_1 \circ g \circ \Theta_1^{-1}, \widetilde{\Theta}'_1 \circ \widetilde{g} \circ \widetilde{\Theta}_1^{-1}, h)$ est une réalisation de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sur les germes $\Theta_1(V)$ et $\Theta_1'^{-1}(V')$, les relevés $\widetilde{\Theta}_t$ et $\widetilde{\Theta}'_t$ étant définis comme en (2.5.3).*

Preuve. L'idée de la preuve est simple : d'une part $\tilde{\Theta}_t$ préserve les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$, ce qui donne la commutativité du diagramme $(\star)_{\tilde{\Theta}'_1 \circ \tilde{g} \circ \tilde{\Theta}_1^{-1}}$; d'autre part, la remarque (2.5.3) donne l'égalité $(\tilde{\Theta}'_1 \circ \tilde{g} \circ \tilde{\Theta}_1^{-1})_* = \tilde{g}_*$, d'où la commutativité du diagramme $(\star\star)_{\tilde{\Theta}'_1 \circ \tilde{g} \circ \tilde{\Theta}_1^{-1}}$. Nous laissons les détails de cette preuve aux soins du lecteur. □

3. Monodromie et holonomies projectives

3.1. **Représentation d'holonomie d'un bloc de JSJ.** Tout d'abord, quelques rappels de vocabulaire : pour une courbe $\mathcal{D}$, *la valence* d'une composante (irréductible) D est le nombre $v(D)$ des autres composantes qui l'intersecte ; une *chaîne* est union connexe maximale de composantes de valence deux ; une *branche morte* $\mathcal{M}$ est une union connexe maximale de composantes compactes qui sont valence deux, sauf l'une d'elles qui est de valence un ; elle intersecte le diviseur exceptionnel $\mathcal{E}_S$ en un point, appelé *point d'attache de* $\mathcal{M}$, situé sur une composante de $\mathcal{D}_S$ de valence ≥ 3.

Soit $F : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$, resp. $F' : \mathbb{B}' \to \mathbb{C}$, une équation holomorphe réduite de S, resp S', et $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ des systèmes locaux notés comme en (21). Pour $\varepsilon > 0$

assez petit, les hypersurfaces réelles lisses $\{|F\circ E_S|=\varepsilon\}$ et $\{|F'\circ E_{S'}|=\varepsilon\}$ "bordant" les *tubes de Milnor de $\mathcal{D}_S$ et $\mathcal{D}_{S'}$*

$$\mathcal{T}_\varepsilon := \{|F\circ E_S|\leq\varepsilon\}\subset\mathcal{B}_S\,,\quad \mathcal{T}'_\varepsilon := \{|F'\circ E_{S'}|\leq\varepsilon\}\subset\mathcal{B}_{S'}\,,\tag{22}$$

sont transverses aux hypersurfaces $\{|x_s|=1\}$, $\{|y_s|=1\}$ et $\{|x_{s'}|=1\}$, $\{|y_{s'}|=1\}$, pour tout $s\in\mathrm{Sing}(\mathcal{D}_S)$, $s'\in\mathrm{Sing}(\mathcal{D}_{S'})$, ainsi qu'aux sphères $E_S^{-1}(\partial\mathbb{B})$ et $E_{S'}^{-1}(\partial\mathbb{B}')$.

Conventions 3.1.1. *Pour $A\subset\mathcal{T}_\varepsilon$ et $A'\subset\mathcal{T}_{\varepsilon'}$, nous notons :*

$$\widetilde{A}^* := q^{-1}(E_S(A))\,,\qquad \widetilde{A}'^\star := q'^{-1}(E_{S'}(A'))\,,$$

et nous désignons par $\underline{q}$ et par $\underline{q}'$ les revêtements (universels) suivants :

$$\underline{q} := E_S^{-1}\circ q_{|\widetilde{\mathcal{T}}^*_\varepsilon} : \widetilde{\mathcal{T}}^*_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{T}^*_\varepsilon\,,\quad \underline{q}' := E_{S'}^{-1}\circ q'_{|\widetilde{\mathcal{T}}'^\star_{\varepsilon'}} : \widetilde{\mathcal{T}}'^\star_{\varepsilon'} \longrightarrow \mathcal{T}'^\star_{\varepsilon'}\,.$$

Étant donnés $\phi_S:(A,\mathcal{D}_S)\to(A',\mathcal{D}_{S'})$ un germe d'homéomorphisme et $\widetilde{\phi}_\infty:(\widetilde{A}^*,\infty)\to(\widetilde{A}'^\star,\infty)$ un pro-germe à l'infini qui relève ϕ_S, nous dirons que le triplet $(\phi_S,\widetilde{\phi}_\infty,h)$ réalise la conjugaison $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ sur A et A', *si le triplet $(\phi_S^\flat,\widetilde{\phi}_\infty,h)$, avec $\phi_S^\flat := E_{S'}\circ\phi_S\circ E_S{}^{-1}_{|A^*}$, est une réalisation de la conjugaison $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ sur $E_S(A)$ et $E_{S'}(A')$.*

Soit D une composante de $\mathcal{D}_S$ de valence ≥ 3, sur laquelle s'attache $v(D)-r(D)$ branches mortes ; ordonnons les points de $\mathrm{Sing}(\mathcal{D}_S)\cap D$ en $s_1,\ldots,s_{v(D)}$, de sorte que $\{s_j\mid j>r(D)\}$ soit l'ensemble des points d'attache d'une branche morte. Nous notons :

$$D^\sharp := D\setminus\cup_{j=1}^{r(D)}\{|x_{s_j}|<1\}\,,\quad D^\circ := D\setminus\cup_{j=1}^{v(D)}\{|x_{s_j}|<1\}\,.\tag{23}$$

Nous supposons aussi que pour $j=1,\ldots,v(D)$, $y_{s_j}=0$ est une équation locale de D.

Définition 3.1.2. *Nous appelons ici* bloc de Jaco-Shalen-Johannson (JSJ en abrégé) de $\mathcal{T}_\varepsilon$ associé à D *et désignons par $B_D(\varepsilon)$, l'adhérence de la composante connexe de $\mathcal{T}_\varepsilon\setminus\cup_{j=1}^{r(D)}\{|x_{s_j}|=1\}$, qui contient $D^\sharp$. De même $B(\varepsilon)^*$ sera appelé* bloc de JSJ de $\mathcal{T}^*_\varepsilon$ associé à D.

Fixons désormais $\varepsilon>0$, tel que $\mathcal{T}_\varepsilon$ soit contenu dans l'ouvert $\mathbb{B}\in\mathcal{U}_{\mathcal{F},\Sigma}$ fixé au paragraphe (1.2). Notons désormais B_D et $\mathcal{T}$, pour $B_D(\varepsilon)$ et $\mathcal{T}_\varepsilon$. Quitte à restreindre de nouveau $\varepsilon>0$, $\mathcal{T}$ satisfait les propriétés suivantes, cf. par exemple [9] :

- $\mathcal{T}$ est un rétract par déformation de $\mathcal{B}_S$ et pour $0<\varepsilon'\leq\varepsilon$, $B_D(\varepsilon')$ et $\mathcal{T}_{\varepsilon'}$ sont des rétracts par déformation de B_D et $\mathcal{T}$ respectivement ;
- B_D^* est incompressible dans $\mathcal{T}^*$ -et donc aussi dans $E_S^{-1}(\mathbb{B}^*)$ et dans $E_S^{-1}(\mathbb{B}^*)$;
- une présentation par générateurs et relations du groupe fondamental de B_D^*, peut être obtenue de la manière suivante : on trace dans $B_D\cap\pi_D^{-1}(D^\circ)$ des lacets $\gamma_1,\ldots,\gamma_{v(D)}$ de même origine m, dont les projection $\pi_D\circ\gamma_j$ bordent des disques conformes fermés $\mathcal{V}_j\subset D$, tels que $\overset{\circ}{\mathcal{V}}_j\cap\mathrm{Sing}(\mathcal{D}_S)=\mathcal{V}_j\cap\mathrm{Sing}(\mathcal{D}_S)=\{s_j\}$; puis on trace dans la fibre $\Delta :=$

$\pi_D^{-1}(m_0)$, $m_0 := \pi_D(m)$, un lacet c d'origine m et d'indice 1 autour de m_0 ; on a :

$$\pi_1(B_D^*, m) = \left\langle \dot{c},\ \dot{\gamma}_1, \dots \dot{\gamma}_{v(D)} \mid [\dot{\gamma}_j,\, \dot{c}] = 1, \dot{\gamma}_k^{p_k} = \dot{c}^{q_k} \right\rangle_{\substack{j=1,\dots,v(D)\\ k=r(D)+1,\dots,v(D)}},$$

où $\mathrm{pgcd}(p_k, q_k) = 1$ et $-\frac{q_k}{p_k}$ est l'indice de Camacho-Sad de $\underline{\mathcal{F}}$ le long de D, au point s_k ;

– le germe de $\underline{\mathcal{F}}$ en chaque point $s_{r(D)+1}, \dots, s_{v(D)}$, possède une intégrale première holomorphe qui s'écrit $x^{p_k} y^{q_k} A(x, y)$, $A(0, 0) \neq 0$.

Visiblement le noyau de la représentation d'holonomie[6] de $\underline{\mathcal{F}}$ le long de D°,

$$\mathcal{H}_D : \pi_1(D^\circ,\, m_0) = \mathbb{Z}\dot{\gamma}_{r(D)+1} * \cdots * \mathbb{Z}\dot{\gamma}_{v(D)} \longrightarrow \mathrm{Diff}(\Delta,\, m_0)\,, \tag{24}$$

contient le sous-groupe normal engendré par les éléments $\dot{\gamma}_k^{p_k}$, pour $k = r(D)+1, \dots, v(D)$. Le morphisme $\mathcal{H}_D$ se factorise en un morphisme $\mathcal{H}_D^{\mathrm{orb}}$ défini sur le *π_1-orbifold de $D^\sharp$*,

$$\pi_1^{\mathrm{orb}}(D^\sharp,\, m_0) := \pi_1(D^\circ,\, m_0)/ \ll \dot{\gamma}_{r+1}^{p_{r+1}}, \dots, \dot{\gamma}_{v(D)}^{p_{v(D)}} \gg\ .$$

De même, le morphisme π_{D*} de $\pi_1(B_D \cap \pi_D^{-1}(D^\circ),\, m)$ sur $\pi_1(D^\circ,\, m_0)$ donné par la fibration π_D, induit un morphisme π_{D*}^{orb} donnant la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \pi_1(\Delta^*, m) = \mathbb{Z}\dot{c} \longrightarrow \pi_1(B_D^*,\, m) \xrightarrow{\pi_{D*}^{\mathrm{orb}}} \pi_1^{\mathrm{orb}}(D^\sharp,\, m_0) \longrightarrow 1\,. \tag{25}$$

Définition 3.1.3. *Nous appelons* représentation d'holonomie de $\mathcal{F}$ le long de B_D, réalisée sur la transversale Δ, *le morphisme* $\mathcal{H}_{B_D} := \mathcal{H}_D^{\mathrm{orb}} \circ \pi_{D*}^{\mathrm{orb}}$,

$$\mathcal{H}_{B_D} : \pi_1(B_D^*,\, m) \longrightarrow \mathrm{Diff}(\Delta,\, m_0)\,, \quad \dot{\gamma} \mapsto \mathcal{H}_{B_D}(\dot{\gamma}) = \mathcal{H}_D(\pi_D \circ \dot{\gamma}).$$

3.2. **Holonomie-étendue et monodromie.** Avec les conventions (3.1.1) et les notations précédentes, désignons par $(\widetilde{\Delta}^{*\alpha})_{\alpha \in \pi_0(\widetilde{\Delta}^*)}$ et $(\widetilde{B}_D^{*\beta})_{\beta \in \pi_0(\widetilde{B}_D^*)}$ les collections des composantes connexes de $\widetilde{\Delta}^*$, resp. de $\widetilde{B}_D^*$. Grâce à l'incompressibilité de B_D^* dans $E_S^{-1}(\mathbb{B}^*)$, la restriction de $\underline{q}$ à chaque composante $\widetilde{B}_D^{*\beta}$ est un revêtement universel de B_D^*. Ainsi, une fois donné un point $m \in B_D^*$ et $\widetilde{m} \in \underline{q}^{-1}(m) \cap \widetilde{B}_D^{*\beta}$, le groupe Γ_∞ s'identifie canoniquement à $\pi_1(\mathcal{T}_\varphi^*, m) \simeq \pi_1(\mathbb{B}^*, m)$ et le sous-groupe $\Gamma_\infty(\beta)$ formé des éléments φ de Γ_∞ qui laissent $B_D^{*\beta}$ invariant, s'identifie à $\pi_1(B_D^*, m)$. Pour $\widetilde{\Delta}^{*\alpha} \subset \widetilde{B}_D^{*\beta}$ et $\widetilde{m}$ choisi dans $\widetilde{\Delta}^{*\alpha}$, la suite suivante est exacte :

$$1 \longrightarrow \Gamma_\infty(\beta, \alpha) \longrightarrow \Gamma_\infty(\beta) \xrightarrow{\sigma} \pi_1^{\mathrm{orb}}(D^\sharp,\, m_0) \longrightarrow 1\,, \tag{26}$$

avec $\Gamma_\infty(\beta, \alpha) \simeq \pi_1(\Delta^*, m)$ désignant le sous-groupe[7] des $\varphi \in \Gamma_\infty(\beta)$ qui laissent $\widetilde{\Delta}^{*\alpha}$ invariant et σ le morphisme bien défini en posant :

$$\sigma(\varphi) := \pi_D^{\mathrm{orb}}(\underline{q} \circ \mu_\varphi)\,, \qquad \varphi \in \Gamma_\infty^\beta\,,$$

μ_φ désignant un chemin tracé dans $\widetilde{B}_D^{*\beta}$, d'origine $\widetilde{m}$ et d'extrémité $\varphi(\widetilde{m})$.

---

[6] $\mathcal{H}_D(\dot{\gamma})$ est l'application qui associe à un point p de Δ, l'extrémité du chemin d'origine p, obtenu en relevant γ^{-1} dans la feuille de $\underline{\mathcal{F}}$ contenant p.

[7] Notons que $\Gamma_\infty(\beta, \alpha)$ est bien distingué, car $\pi_1(\Delta^*, m)$ est le centre de $\pi_1(B_D^{*\beta})$; cela signifie que tout $\varphi \in \Gamma_\infty(\beta, \alpha)$ laisse invariante toute composante $\widetilde{\Delta}^{*\alpha'} \subset B_D^{*\beta}$.

Proposition 3.2.1. *Soient $\widetilde{\Delta}^{*\alpha}$, $\widetilde{\Delta}^{*\alpha'}$ contenus dans une même composante $\widetilde{B}_D^{*\beta}$. Il existe un unique pro-germe $h_{\alpha'\alpha} : (\widetilde{\Delta}^{*\alpha}, \infty) \to (\widetilde{\Delta}^{*\alpha'}, \infty)$ qui commute aux pro-germes canoniques définis en (2.3) : $\tau_{\widetilde{\Delta}^{*\alpha'}} \circ h_{\alpha'\alpha} = \tau_{\widetilde{\Delta}^{*\alpha}}$.*

Preuve. Soit $\breve{U} \in \mathfrak{U}_{\mathcal{F},\Sigma}$, notons $U := E_S^{-1}(\breve{U})$ et désignons par $W_U^{\alpha'}$ le saturé de $\widetilde{\Delta}^{*\alpha'} \cap \widetilde{U}^*$ dans $\widetilde{B}_D^{*\beta} \cap \widetilde{U}^*$. L'application

$$h_U : \mathfrak{O}_U^{\alpha'\alpha} := W_U^{\alpha'} \cap \widetilde{\Delta}^{*\alpha} \to \widetilde{\Delta}^{*\alpha'}$$

de transport suivant les feuilles de $\underline{\widetilde{\mathcal{F}}}_{|\mathcal{W}_U^{\alpha'}}$ est définie sans ambiguïté, car celles-ci intersectent chaque transversale $\widetilde{\Delta}^{*\alpha}$ et $\widetilde{\Delta}^{*\alpha'}$ en au plus un point, cf. (1.2). Nous allons voir que $\mathfrak{O}_U^{\alpha'\alpha}$ contient toujours un ouvert non-vide du type $\widetilde{V}^* \cap \widetilde{\Delta}^{*\alpha}$, avec $V := E_S^{-1}(\breve{V})$, $\breve{V} \in \mathfrak{U}_{\mathcal{F},\Sigma}$. Pour conclure, il suffit alors de poser :

$$h_{\alpha'\alpha} = (\varinjlim_{\breve{V}} h_{VU})_{\breve{U}\in\mathfrak{U}_{\mathcal{F},\Sigma}}\,, \quad \text{avec} \quad h_{VU} := h_{U|_{\widetilde{V}^*\cap\widetilde{\Delta}^{*\alpha}}} : \widetilde{V}^* \cap \widetilde{\Delta}^{*\alpha} \to \widetilde{\Delta}^{*\alpha'}\,.$$

Soit $\varphi \in \Gamma_\infty(\beta, \alpha)$. Choisissons $\breve{V} \in \mathfrak{U}_{\mathcal{F},\Sigma}$, $\breve{V} \subset \breve{U}$, assez petit pour que tout $p \in V \cap \Delta^*$ soit l'origine d'un chemin, noté γ_p, d'extrémité sur Δ^*, tracé dans une feuille de la restriction de $\underline{\mathcal{F}}$ à $B_D^* \cap U \cap \pi_D^{-1}(D^\circ)$ et tel que la classe de $\pi_D \circ \gamma_p$ dans $\pi_1^{\mathrm{orb}}(D^\sharp, m_0)$ soit égale à $\sigma(\varphi)$. Le relevé $\mu_{\widetilde{p}}$ de γ_p dans $\widetilde{B}_D^{*\beta}$, d'origine un point quelconque $\widetilde{p}$ de $\underline{q}^{-1}(p) \cap \widetilde{\Delta}^{*\alpha}$, est contenu dans une feuille de $\underline{\widetilde{\mathcal{F}}}$. Nous allons voir que son extrémité, qui est égale à $h_U(\widetilde{p})$, appartient toujours à $\widetilde{\Delta}^{*\alpha'}$; il en résultera l'inclusion $\mathfrak{O}_U^{\alpha'\alpha} \supset \widetilde{V}^* \cap \widetilde{\Delta}^{*\alpha}$.

Dans $\widetilde{\Delta}^*$ traçons un chemin ξ d'origine $\mu_{\widetilde{p}}(1)$, d'extrémité un point de $\underline{q}^{-1}(m)$, ainsi qu'un chemin δ d'origine un point de $\underline{q}^{-1}(m)$ et d'extrémité $\widetilde{p}$. La classe d'homotopie $\dot{\zeta} \in \pi_1(B_D^*, m)$ du lacet $\zeta := \underline{q} \circ (\delta \vee \mu_{\widetilde{p}} \vee \xi)$, vérifie :

$$\pi_{D*}^{\mathrm{orb}}(\dot{\zeta}) = \overline{\pi_D \circ \gamma_p} = \sigma(\varphi)\,,$$

où $\overline{\pi_D \circ \gamma_p}$ désigne la classe de $\pi_D \circ \gamma_p$ dans $\pi_1^{\mathrm{orb}}(D^\sharp, m_0)$. Soit μ_φ un chemin dans $\widetilde{B}^{*\beta}$ joignant $\widetilde{m}$ à $\varphi(\widetilde{m})$. D'après (25), la classe du lacet $\underline{q} \circ \mu_\varphi$ dans $\pi_1(B_D^*, m)$ diffère de $\dot{\zeta}$ d'un élément de $\pi_1(\Delta^*, m)$; les chemins de même origine $\delta \vee \mu_{\widetilde{p}} \vee \xi$ et μ_φ ont donc leurs extrémités sur une même composante connexe de $\widetilde{\Delta}^*$; il en est de même de $\mu_{\widetilde{p}}$ et μ_φ ; d'où la conclusion. □

Remarque 3.2.2. Pour trois composantes $\widetilde{\Delta}^{*\alpha}$, $\widetilde{\Delta}^{*\alpha'}$, $\widetilde{\Delta}^{*\alpha''}$ contenues dans $B_D^{*\beta}$, nous avons la relation :

$$h_{\alpha''\alpha'} \circ h_{\alpha'\alpha} = h_{\alpha''\alpha}\,.$$

D'autre part, l'action de Γ_∞ laissant invariant $\underline{\widetilde{\mathcal{F}}}$, les constructions ci-dessus sont "compatibles" avec l'action de $\Gamma_\infty(\beta)$. Plus précisément, avec les mêmes notations, pour $\varphi \in \Gamma_\infty(\beta)$ le chemin $\varphi \circ \mu_{\widetilde{p}}$ est égal au chemin $\mu_{\varphi(\widetilde{p})}$, c'est à dire au chemin d'origine $\varphi(\widetilde{p}) \in \varphi(\widetilde{\Delta}^{*\alpha})$, d'extrémité dans $\varphi(\widetilde{\Delta}^{*\alpha'})$, obtenu en relevant γ_p. Ainsi, si l'on désigne par $\varphi_\bullet : \pi_0(\widetilde{\Delta}^*) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\widetilde{\Delta}^*)$ la bijection induite par φ, on a :

$$\varphi \circ h_{\alpha'\alpha} \circ \varphi^{-1} = h_{\varphi_\bullet(\alpha')\varphi_\bullet(\alpha)}\,.$$

On en déduit directement que l'application suivante :

$$\widetilde{\mathcal{H}}_D^\alpha : \Gamma_\infty(\beta) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\widetilde{\Delta}^{*\alpha},\, \infty)\,, \quad \varphi \mapsto h_{\alpha\varphi_\bullet(\alpha)} \circ \varphi = h^{-1}_{\varphi_\bullet(\alpha)\alpha} \circ \varphi\,,$$

est un morphisme de groupes.

Définition 3.2.3. *Nous appellerons* $\widetilde{\mathcal{H}}_D^\alpha$*, le* morphisme d'holonomie-étendue de D, réalisée sur $\widetilde{\Delta}^{*\alpha}$.

Pour justifier ce vocabulaire, notons que si $\dot{\mu} \in \pi_1(B_D^*, m)$ et $\varphi \in \Gamma_\infty(\beta)$ sont tels que $\pi_{D*}^{\mathrm{orb}}(\dot{\mu}) = \sigma(\varphi)$, alors $\widetilde{\mathcal{H}}_D^\alpha(\varphi)$ est le relevé sur la composante $\widetilde{\Delta}^{*\alpha}$, considérée comme revêtement universel de Δ^*, du germe de difféomorphisme d'holonomie $\mathcal{H}_{B_D}(\dot{\mu})$. On obtient finalement le diagramme commutatif :

$$(\diamond)_\varphi \qquad \begin{tikzcd}
(\Delta,\, m_0) \arrow[d, "\mathcal{H}_{B_D}(\dot{\mu})"'] & (\widetilde{\Delta}^{*\alpha}, \infty) \arrow[l, two heads, "q_\infty"'] \arrow[r, hook, "\tau_{\widetilde{\Delta}^{*\alpha}}"] \arrow[d, "\widetilde{\mathcal{H}}_D^\alpha(\varphi)"'] & \widetilde{\mathcal{Q}}_\infty^{\mathcal{F}} \arrow[d, "\mathfrak{M}_S^{\mathcal{F}}(\varphi)"] \\
(\Delta,\, m_0) & (\widetilde{\Delta}^{*\alpha}, \infty) \arrow[l, two heads, "q_\infty"'] \arrow[r, hook, "\tau_{\widetilde{\Delta}^{*\alpha}}"] & \widetilde{\mathcal{Q}}_\infty^{\mathcal{F}}
\end{tikzcd} .$$

3.3. **Relations entre conjugaisons d'holonomies et de monodromies.** Avec les notations du chapitre 2, supposons donné une conjugaison géométrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ entre les monodromies $\mathfrak{M}_S^{\mathcal{F}}$ et $\mathfrak{M}_{S'}^{\mathcal{F}'}$ de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, que l'on suppose de type général. Grâce au corollaire (2.6.4), donnons-nous une représentation géométrique $(g, \widetilde{g}, h)$ de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, cf. (2.5.1), où $g : (\mathbb{B}, S) \to (\mathbb{B}', S')$ est un germe d'homéomorphisme excellent et désignons par $G : (\mathcal{B}_S, \mathcal{D}_S) \to (\mathcal{B}'_{S'}, \mathcal{D}_{S'})$ son relevé sur les résolutions des singularités. Soit (Δ, m_0), $m_0 \notin \mathrm{Sing}(\mathcal{D}_S)$ une fibre de la fibration de Hopf d'une composante D de $\mathcal{D}_S$, telle que $(\Delta', m_0') := (G(\Delta), G(m_0))$ soit aussi une fibre de Hopf de $D' := G(D)$. Enfin, identifions Δ et Δ' à leurs images $E_S(\Delta)$ et $E_{S'}(\Delta')$ par les applications de réduction.

Théorème 3.3.1. *S'il existe une réalisation* $(\psi, \widetilde{\psi}, h)$ *de* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *sur* Δ *et* Δ'*, alors* ψ*, avec la restriction* $G_{|D} : D \xrightarrow{\sim} D'$*, conjugue les représentations d'holonomie associées aux composantes* D *et* D'*, i.e. le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(D^\circ,\, m_0) \arrow[r, "\mathcal{H}_D"] \arrow[d, "G_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Diff}(\Delta, m_0) \arrow[d, "\psi_*"] \\
\pi_1(D'^\circ,\, m_0) \arrow[r, "\mathcal{H}_{D'}"] & \mathrm{Diff}(\Delta', m_0')
\end{tikzcd}$$

où $\psi_*(\varphi) := \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$ *et* G_* *est induit par la restriction de* G *à* D°*, cf. (23).*

Preuve. Soit $\dot{\gamma} \in \pi_1(D^\circ, m_0)$, $\dot{\mu} \in \pi_1(\widetilde{B}_D^*, m)$ et $\varphi \in \Gamma_\infty(\beta)$, tels que $\pi_{D*}^{\mathrm{orb}}(\dot{\mu}) = \sigma(\varphi) = \dot{\gamma}$ -et ainsi $\mathcal{H}_{B_D}(\dot{\mu}) = \mathcal{H}_D(\dot{\gamma})$. Considérons le diagramme de la figure 1 ci-dessous. Les deux côtés frontaux sont constitués des dia-

$$
\begin{tikzcd}
(\Delta^*, m_0) \arrow[rr, "\mathcal{H}_D(\dot\gamma)"] \arrow[dr, "\psi"] & & (\Delta^*, m_0) \arrow[dr, "\psi"] & \\
& (\Delta'^{\star}, m_0') \arrow[rr, "\mathcal{H}_{D'}(G_*(\dot\gamma))"] & & (\Delta'^{\star}, m_0') \\
(\widetilde{\Delta}^{*\alpha}, \infty) \arrow[uu, "\underline{q}_\infty"] \arrow[rr, "\widetilde{\mathcal{H}}_D^{\alpha}(\varphi)"] \arrow[dr, "\widetilde{\psi}"] \arrow[dd, hook, "\tau_{\widetilde{\Delta}^{*\alpha}}"'] & & (\widetilde{\Delta}^{*\alpha}, \infty) \arrow[uu, "\underline{q}_\infty"'] \arrow[dr, "\widetilde{\psi}"] \arrow[dd, hook, "\tau_{\widetilde{\Delta}^{*\alpha}}"'] & \\
& (\widetilde{\Delta}'^{\star\alpha'}, \infty) \arrow[uu, "\underline{q}'_\infty"] \arrow[rr, "\widetilde{\mathcal{H}}_{D'}^{\alpha'}(\mathfrak{g}(\varphi))"] \arrow[dd, hook, "\tau_{\widetilde{\Delta}'^{\star\alpha'}}"'] & & (\widetilde{\Delta}'^{\star\alpha'}, \infty) \arrow[uu, "\underline{q}'_\infty"'] \arrow[dd, hook, "\tau_{\widetilde{\Delta}'^{\star\alpha'}}"] \\
\widetilde{\mathcal{Q}}_\infty^{\mathcal{F}} \arrow[rr, "\mathfrak{M}_S^{\mathcal{F}}(\varphi)"] \arrow[dr, "h"] & & \widetilde{\mathcal{Q}}_\infty^{\mathcal{F}} \arrow[dr, "h"] & \\
& \widetilde{\mathcal{Q}}_\infty^{\mathcal{F}'} \arrow[rr, "\mathfrak{M}_{S'}^{\mathcal{F}'}(\mathfrak{g}(\varphi))"] & & \widetilde{\mathcal{Q}}_\infty^{\mathcal{F}'}
\end{tikzcd}
$$

FIG. 1. Diagramme concernant les conjugaisons des holonomies et monodromies.

grammes commutatifs $(\diamond)_\varphi$ et $(\diamond)_{\mathfrak{g}(\varphi)}$; les deux cotés latéraux sont constitués du diagramme commutatif $(\star)_{\widetilde{\psi}}$ et de celui exprimant que $\widetilde{\psi}$ relève ψ ; la commutativité du diagramme horizontal de base, $h \circ \mathfrak{M}_S^{\mathcal{F}}(\varphi) = \mathfrak{M}_{S'}^{\mathcal{F}'}(\mathfrak{g}(\varphi)) \circ h$, résulte de la commutativité de $(\star\star)_{\widetilde{\psi}}$. Les pro-germes canoniques $\tau_{\widetilde{\Delta}^{*\alpha}}$ et $\tau_{\widetilde{\Delta}'^{*\alpha'}}$ étant des monomorphismes d'après (2.3.1), le diagramme horizontal médian est aussi commutatif : $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\mathcal{H}}_D^{\alpha}(\varphi) = \widetilde{\mathcal{H}}_{D'}^{\alpha'} \circ \widetilde{\psi}$. On en déduit la commutativité du diagramme horizontal supérieur :

$$\psi \circ \mathcal{H}_D(\dot\gamma) = \mathcal{H}_{D'}(G_*(\dot\gamma)) \circ \psi\,,$$

car les pro-germes $\underline{q}_\infty$ et $\underline{q}'_\infty$ sont des épimorphismes. D'où la conclusion. □

4. Énoncés des résultats et preuve des théorèmes I et II

Conservons les notations relatives aux germes de feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, que nous avons introduites dans chapitres précédents, en particulier les notations (2), (3), (15) et (16). Nous allons énoncer ici les théorèmes principaux de ce travail sous leurs formes la plus générale. Ils impliqueront les théorèmes I et II énoncés dans l'introduction.

Théorème 4.0.2 (d'invariance). *Supposons que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont de type général, i.e. ils satisfont les propriétés (i)-(iii) de (1.1) et qu'ils sont conjugués par un germe d'homéomorphisme $\Psi : (\mathbb{C}^2,0)\xrightarrow{\sim}(\mathbb{C}^2,0)$ transversalement holomorphe et préservant l'orientation de $\mathbb{C}^2$. Soit $g : (\mathbb{C}^2,0)\xrightarrow{\sim}(\mathbb{C}^2,0)$ un germe d'homéomorphisme excellent fondamentalement équivalent à Ψ, cf. (2.6) ; notons $G : (\mathcal{B}_S,\mathcal{D}_S)\to(\mathcal{B}'_{S'},\mathcal{D}_{S'})$ son relevé : $E_{S'}\circ G=\Psi\circ E_S$. Alors :*

(1) *pour toute composante irréductible D de $\mathcal{D}_S$ et tout point singulier $s\in\mathrm{Sing}(\underline{\mathcal{F}})\cap D$, on a l'égalité des indices de Camacho-Sad :*
$$(*)_s\qquad \mathrm{CS}(\underline{\mathcal{F}},D,s)=\mathrm{CS}(\underline{\mathcal{F}}',G(D),G(s))\,,$$

(2) *il existe une conjugaison $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ des monodromies $\mathfrak{M}_S^{\mathcal{F}}$ et $\mathfrak{M}_{S'}^{\mathcal{F}'}$, réalisée sur des transversales à S et à S', en des points m et $m'\neq(0,0)$, telle que Ψ soit un représentant de $\mathfrak{g}$.*

Le théorème suivant peut être considéré comme une réciproque de celui-ci.

Théorème 4.0.3 (de classification). *Soit $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ une conjugaison géométrique des monodromies $\mathfrak{M}_S^{\mathcal{F}}$ et $\mathfrak{M}_{S'}^{\mathcal{F}'}$ de deux feuilletages de type général, qui possède une réalisation $(\psi,\widetilde{\psi},h)$ sur des courbes holomorphes Σ et Σ', lisses et transverses aux feuilletages en des points $m\in S\setminus\{0\}$ et $m'\in S'\setminus\{0\}$ de leurs séparatrices. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites, $(g,\widetilde{g},h)$ désignant*[8] *une représentation géométrique de $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$:*

(1) *$g(m)$ et m' appartiennent à la même composante irréductible de S',*

(2) *pour toute composante irréductible $\breve{S}$ de S, on a l'égalité des indices de Camacho-Sad : $\mathrm{CS}(\underline{\mathcal{F}},\breve{\mathcal{S}},\breve{s})=\mathrm{CS}(\underline{\mathcal{F}}',\breve{\mathcal{S}}',\breve{s}')$, où $\breve{\mathcal{S}}$, resp. $\breve{\mathcal{S}}'$, désigne la transformée stricte de $\breve{S}$, resp. $g(\breve{S})$ et $\breve{s}\in\mathrm{Sing}(\underline{\mathcal{F}})$, resp. $\breve{s}'\in\mathrm{Sing}(\underline{\mathcal{F}}')$ son point d'attache au diviseur exceptionnel.*

Alors il existe un homéomorphisme Ψ d'un voisinage ouvert U de S sur un voisinage ouvert U' de S' et un relevé $\widetilde{\Psi}:\widetilde{U}^*\xrightarrow{\sim}\widetilde{U}'^{\star}$ de Ψ, tels que :

(a) *$\Psi(\Sigma\cap U)\subset\Sigma'\cap U'$, le germe en m de $\Psi_{|\Sigma\cap U}$ est égal à ψ et le germe à l'infini de $\widetilde{\Psi}_{|\widetilde{\Sigma}\cap\widetilde{U}}$ est égal à $\widetilde{\psi}$,*

(b) *Ψ est excellent, conjugue $\mathcal{F}_{|U}$ à $\mathcal{F}'_{|U'}$ et est transversalement holomorphe,*

(c) *si Ψ_S désigne le germe de Ψ le long de S et $\widetilde{\Psi}_\infty$ le pro-germe à l'infini de $\widetilde{\Psi}$, alors $(\Psi_S,\widetilde{\Psi}_\infty,h)$ est une réalisation de $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ sur U et U'.*

En fait nous prouverons en (6.3), que la condition (2) du théorème de classification équivaut à l'assertion (1) du théorème d'invariance.

Le lien entre de ces théorèmes avec les théorèmes I et II de l'introduction provient des propriétés de rigidité transverse génériquement satisfaites, que nous allons préciser.

[8] Les propriétés (1) et (2) sont indépendantes du choix de cette représentation.

Définition 4.0.4. *Nous dirons que le germe de $\mathcal{F}$ en $(0,0)$ est* transversalement rigide*, si tout germe d'homéomorphisme conservant les orientations de $(\mathbb{C}^2, 0)$ et celle des feuilles, qui conjugue $\mathcal{F}$ à un germe de feuilletage de type général est transversalement holomorphe ;*

D'après le théorème de J. Rebelo [13] cité dans l'introduction, l'existence d'une composante irréductible de $\mathcal{D}_S$ dont le groupe d'holonomie est non-résoluble, suffit à assurer la rigidité transverse de $\mathcal{F}$. La généricité de cette propriété, au sens de la topologie de Krull, est prouvée dans [5]. Remarquons que d'autres conditions intéressantes, mais plus particulières, induisent aussi la rigidité transverse du feuilletage, cf. la monographie de F. Loray [6].

Corollaire 4.0.5. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux germes de feuilletages transversalement rigides, de type général, qui sont conjugués par un germe d'homéomorphisme Ψ_0, préservant les orientations de $\mathbb{C}^2$ et des feuilles. Il existe alors un germe d'homéomorphisme excellent Ψ qui conjugue $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}'$ et qui est fondamentalement équivalent à Ψ_0, cf. (2.6). En particulier, si $\Psi^\sharp : \mathcal{D}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{S'}$ désigne la restriction aux diviseurs totaux du relevé de Ψ sur les réductions des singularités, on a :*

(i) pour tout $s \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$, le germe de $\underline{\mathcal{F}}$ au point s et celui de $\underline{\mathcal{F}}'$ au point $\Psi^\sharp(s)$, sont holomorphiquement conjugués ;

(ii) pour toute composante irréductible D de $\mathcal{D}_S$, les représentation d'holonomie $\mathcal{H}_D$ et $\mathcal{H}_{\Psi^\sharp(D)}$ définies en (24) sont holomorphiquement conjuguées, via $\Psi^\sharp$.

Cette dernière assertion signifie que si Δ et Δ' sont des courbes holomorphes transverses à D et $D' := \Psi^\sharp(D)$, en des points $m \in D \setminus \mathrm{Sing}(\underline{\mathcal{F}})$ et $m' := \Psi^\sharp(m)$, le diagramme (1) de l'introduction est commutatif.

Preuve. On applique d'abord le théorème d'invariance, puisque Ψ est transversalement holomorphe ; ensuite, on applique le théorème de classification. □

Notons que ce corollaire est une formulation plus précise du théorème I énoncé dans l'introduction. D'autre part, grâce au théorème de rigidité transverse, le théorème II résulte des théorèmes d'invariance et de classification ci-dessus, appliqués avec l'hypothèse supplémentaire de généricité (G) citée dans l'introduction.

5. Structure périphérique d'un germe de courbe

5.1. **Groupes périphériques.** Toujours avec les notations (2), (15), (22) et (3.1.1) précédemment introduites, donnons-nous un voisinage tubulaire $W_{\breve{S}}$ d'une composante irréductible $\breve{S}$ de S dans $\mathbb{B}$, épointée de l'origine $0 \in \mathbb{C}^2$: la paire $(W_{\breve{S}}, \breve{S}^\circ)$, $\breve{S}^\circ := \breve{S} \setminus \{0\}$, est homéomorphe à la paire $(\breve{S}^\circ \times \mathbb{D}(1), \breve{S}^\circ \times \{0\})$. Soit $s \in \mathrm{Sing}(\mathcal{D}_S)$ le point d'attache de la transformée stricte $\breve{\mathcal{S}}$ de $\breve{S}$. Quitte à permuter les coordonnées (x_s, y_s) du système local que l'on a fixé en (21) (pour définir la notion d'homéomorphisme excellent) nous supposons que $x_s = 0$ est une équation de $\breve{\mathcal{S}}$. Nous choisissons aussi $\varepsilon > 0$ assez petit, pour que $\mathcal{W}^*_{\breve{\mathcal{S}}} := E_S^{-1}(W^*_{\breve{S}})$ se rétracte sur le 2-tore $\{|x_s| = \varepsilon, |y_s| = 1\}$.

Proposition 5.1.1. *$W^*_{\breve S}$ est incompressible dans $\mathbb{B}^*$.*

Preuve. Il suffit de montrer l'incompressibilité du tore $\{|x_s| = \varepsilon, |y_s| = 1\}$ dans $\mathcal{B}^*_S$. Ceci se fait par utilisation répétée du théorème de Van Kampen, cf. par exemple la construction d'un voisinage ouvert de $\mathcal{D}_S$ par "assemblage bord à bord" faite en [9]. □

Considérons les lacets m, resp. p, de même origine, tracés dans $\mathcal{W}^*_s$ et définis par : $(x_s, y_s) \circ m(t) = (\varepsilon e^{2i\pi t}, 1)$, resp. $(x_s, y_s) \circ p(t) := (\varepsilon, e^{2i\pi t})$. Au point $\breve c := E_S(m(0))$, les classes d'homotopie $\mathfrak{m}_{\breve c}$, resp. $\mathfrak{p}_{\breve c} \in \pi_1(W_{\breve S}, \breve c)$, des lacets $E_S \circ m$, resp. $E_S \circ p$, donnent la décomposition en somme directe : $\pi_1(W^*_{\breve S}, \breve c) = \mathbb{Z}\mathfrak{m}_{\breve c} \oplus \mathbb{Z}\mathfrak{p}_{\breve c}$. L'abélianité de ce groupe implique que l'isomorphisme de $\pi_1(W^*_{\breve S}, c_1)$ sur $\pi_1(W^*_{\breve S}, c_2)$ induit par un chemin reliant dans $W^*_{\breve S}$ deux points c_1 et c_2, ne dépend pas choix de ce chemin. Ainsi, la décomposition en somme directe de $\pi_1(W_{\breve s}, \breve c)$ se transporte canoniquement en tout point de $W^*_{\breve S}$:

$$\mathcal{P}_{\breve S, c} := \pi_1(W^*_{\breve S}, c) = \mathbb{Z}\mathfrak{m}_c \oplus \mathbb{Z}\mathfrak{p}_c \subset \pi_1(\mathbb{B}^*, c)\,, \quad c \in W^*_{\breve S}\,.$$

Définition 5.1.2. *Nous appellerons $\mathfrak{m}_c$ le méridien, $\mathfrak{p}_c$ le parallèle et $\mathcal{P}_{\breve S, c}$ le sous-groupe périphérique, associés à la composante $\breve S$, au point c.*

La propriété géométrique suivante de ce sous-groupe, rendra sa décomposition "intrinsèque".

Proposition 5.1.3. [10] *Le sous-groupe $\mathcal{P}_{\breve S, c}$ est égal à son normalisateur dans $\pi_1(\mathbb{B}^*, c)$, i.e. $\Big(\zeta \in \pi_1(\mathbb{B}^*, c) \quad \text{et} \quad \zeta\, \mathcal{P}_{\breve S, c}\, \zeta^{-1} \subset \pi_1(W^*_{\breve S}, c)\Big) \Rightarrow \zeta \in \mathcal{P}_{\breve S, c}$.*

On en déduit immédiatement :

Corollaire 5.1.4. *La décomposition en somme directe*

$$P = \mathbb{Z}\mathfrak{m}_P \oplus \mathbb{Z}\mathfrak{p}_P\,, \qquad \mathfrak{m}_P := \zeta\, \mathfrak{m}_c\, \zeta^{-1}\,, \quad \mathfrak{p}_P := \zeta\, \mathfrak{p}_c\, \zeta^{-1}\,,$$

de tout sous-groupe $P = \zeta\, \mathcal{P}_{\breve S, c}\, \zeta^{-1}$, $\zeta \in \pi_1(\mathbb{B}^*, c)$, conjugué à $\mathcal{P}_{\breve S, c}$, est intrinsèque, i.e. elle ne dépend pas de $\zeta \in \pi_1(\mathbb{B}^*, c)$.

5.2. **Conjugaison des structures périphériques.** Nous allons voir que les méridiens et parallèles canoniques définis en (5.1.2), associés aux composantes irréductibles de S, sont des invariants topologiques.

Théorème 5.2.1. *Soit U un voisinage ouvert de S dans $\mathbb{B}$ et Φ un homéomorphisme de U sur un voisinage U' de 0 dans $\mathbb{B}'$, tel que $\Phi(S) = S' \cap U'$. Alors, pour toute composante irréductible $\breve S$ de S et tout point c d'un voisinage tubulaire de $\breve S \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{B}$, l'isomorphisme Φ_* de $\pi_1(\mathbb{B}^*, c)$ sur $\pi_1(\mathbb{B}'^*, c')$ induit par Φ, envoie respectivement le méridien $\mathfrak{m}_c$ et le parallèle $\mathfrak{p}_c$ associés à $\breve S$, sur le méridien $\mathfrak{m}'_{c'}$ et sur le parallèle $\mathfrak{p}'_{c'}$ associé à la composante $\Phi(\breve S)$, au point $c' := \Phi(c)$.*

Preuve. Remarquons d'abord que Φ_* induit un isomorphisme de la structure périphérique $\mathcal{P}_{\breve S, c}$ de $\breve S$, sur celle $\mathcal{P}'_{\breve S', c'}$ de $\breve S' := \Phi(\breve S)$. En effet donnons-nous un voisinage tubulaire W de $\breve S$, deux voisinages tubulaires W' et W'' de $\breve S' \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{B}'$, ainsi qu'une boule $\mathbb{B}'' \subset \mathbb{B}'$ de centre 0, tels que $W'' \cap \mathbb{B}'' \subset$

$\Phi(W) \subset W'$. Ces inclusions induisent au niveau des groupes fondamentaux, deux morphismes $\mathbb{Z}$-linéaires

$$\mathbb{Z}^2 \simeq \mathcal{P}'_{\breve{S}',\,c'} \to \Phi_*(\mathcal{P}_{\breve{S},\,c}) \to \mathcal{P}'_{\breve{S}',\,c'} \simeq \mathbb{Z}^2\,,$$

dont le composé est un isomorphisme. Ainsi :

$$\Phi_*(\mathcal{P}_{\breve{S},\,c}) = \mathcal{P}'_{\breve{S}',\,c'}. \tag{27}$$

Le théorème de marquage (2.6.3) donne l'existence d'un homéomorphisme excellent g qui est fondamentalement équivalent à Φ. Nous pouvons supposer que $W'' \cap \mathbb{B}'' \subset g(W) \subset W'$ et g induit un isomorphisme g_* de $\mathcal{P}_{\breve{S},c}$ sur $\mathcal{P}_{\breve{S}',g(c)}$. Visiblement $g_*(\mathfrak{m}_c) = \mathfrak{m}'_{g(c)}$ et $g_*(\mathfrak{p}_c) = \mathfrak{p}'_{g(c)}$, car le relevé $E'^{-1}_{S'} \circ g \circ E_S$ se prolonge aux diviseurs exceptionnels. L'équivalence fondamentale entre g et Ψ donne l'existence d'un élément ζ de $\pi_1(\mathbb{B}'^*, c')$ tel que

$$I_\zeta \circ \Phi_* = \kappa \circ g_* : \pi_1(\mathbb{B}^*, c') \longrightarrow \pi_1(\mathbb{B}^*, c')\,, \tag{28}$$

où I_ζ désigne l'automorphisme intérieur de $\pi_1(\mathbb{B}^*, c')$ défini par ζ et où κ est l'isomorphisme canonique de $\pi_1(\mathbb{B}^*, g(c))$ sur $\pi_1(\mathbb{B}^*, c')$, donné un chemin quelconque tracé dans W', joignant $g(c)$ à c'. Les relations (27) et (28) donnent l'égalité $\zeta\mathcal{P}'_{\breve{S}',\,c'}\zeta^{-1} = \mathcal{P}'_{\breve{S}',\,c'}$. D'après la proposition (5.1.3), ζ appartient à $\mathcal{P}_{\breve{S}',\,c'}$. La restriction de I_ζ à $\mathcal{P}_{\breve{S}',\,c'}$ est l'identité, car ce groupe est commutatif. En restreignant (28) à $\mathcal{P}_{\breve{S},\,c}$, on obtient l'égalité $\Phi_* = \kappa \circ g_*$. D'où :

$$\Phi_*(\mathfrak{m}_c) = \kappa(g_*(\mathfrak{m}_c)) = \kappa(\mathfrak{m}'_{g(c)}) = \mathfrak{m}'_{c'}\,;$$

de même $\Phi_*(\mathfrak{p}_c) = \mathfrak{p}'_{c'}$. □

6. Démonstration du théorème d'invariance (4.0.2)

6.1. **Démonstration de l'assertion (2).** D'après la proposition (2.7.4), on ne change pas le problème en composant à gauche Ψ par un germe homéomorphisme $\Theta_1 : (\mathbb{B}', S') \xrightarrow{\sim} (\mathbb{B}', S')$ qui est $\mathcal{F}'$-isotope à l'identité. Soit Σ, resp. Σ' une une courbe holomorphe lisse transverse à $\mathcal{F}$, resp. $\mathcal{F}'$, en un point $m \in S$, resp. en $m' := \Psi(m)$. Il est aisé de construire Θ_1 tel que $\Theta_1(\Psi(\Sigma))$ et Σ' aient même germe en m'. L'assertion (2) se déduit immédiatement de (2.7.2) et (2.7.3).

6.2. **Invariance des indices de Camacho-Sad des séparatrices.** Nous allons prouver l'égalité $(*)_s$ de l'assertion (1) du théorème (4.0.2), lorsque s est le point d'attache d'une transformée stricte $\breve{\mathcal{S}}$ d'une composante irréductible $\breve{S}$ de S. Nous reprenons les notations utilisées en (5.1) et nous désignons aussi par $\rho : \mathcal{W}_s \to \breve{\mathcal{S}} \cap \mathcal{W}_s$ la fibration en disques telle que $y_s \circ \rho = y_s$, par γ_n le lacet tracé sur l'axe $x_s = 0$, tel que $y_s \circ \gamma_n(t) := e^{2i\pi nt}$, $0 \le t \le 1$, par q le point de coordonnées $(0, 1/2)$ et enfin par T la transversale $\rho^{-1}(q)$.

Donnons-nous une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de T tendant vers q, tels que le lacet γ_n se relève, via ρ, en un chemin Γ_n d'origine q_n, contenu dans l'ouvert $\{|x_s| < \frac{1}{n}\}$ et tracé dans la feuille de $\underline{\mathcal{F}}$ contenant q_n. On peut voir qu'une telle suite existe toujours et que

$$\mathrm{CS}(\underline{\mathcal{F}}, \breve{\mathcal{S}}, s) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2i\pi n} \int_{\Gamma_n} \frac{dx_s}{x_s}\,. \tag{29}$$

Fixons un réel $\theta_n \in]-\pi,\pi]$ différent des arguments de q_n et de $\Gamma_n(1)$ puis, dans le disque coupé

$$T \cap \{\arg(x_s) \neq \theta_n\,,\ 0 < |x_n| < 1/n\}\ ,$$

traçons un chemin ξ_n d'origine q_n et d'extrémité $\Gamma_n(1)$. Puisque la partie réelle de $\frac{1}{2i\pi n}\int_{\xi_n}\frac{dx_s}{x_s}$ est bornée, la partie réelle de l'indice de Camacho-Sad (29) est donné par :

$$\mathrm{Re}(\mathrm{CS}(\underline{\mathcal{F}}, \breve{\mathcal{S}}, s)) = \lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{n}\,, \qquad \text{où} \qquad I_n := \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_n \vee \xi_n}\frac{dx_s}{x_s}. \tag{30}$$

La classe d'homotopie dans $\pi_1(\mathbb{B}^*, c_n)$, $c_n := E_S(q_n)$, du lacet $\Gamma_n \vee \xi_n$ se décompose dans la structure périphérique $\mathcal{P}_{\breve{S},c_n} \subset \pi_1(\mathbb{B}^*, c_n)$,

$$\overline{\Gamma_n \vee \xi_n} = I_n \mathfrak{m}_{c_n} + n\mathfrak{p}_{c_n}\,.$$

Si α_n est un lacet quelconque d'origine q_0, d'extrémité q_n, tracé dans $T\setminus\{q\}$, la classe dans $\pi_1(\mathbb{B}^*, c_0)$ du lacet $\lambda_n := \alpha_n \vee \Gamma_n \vee \xi_n \vee \alpha_n^{-1}$ est donc :

$$\overline{\lambda_n} = I_n \mathfrak{m}_{c_0} + n\mathfrak{p}_{c_0}\,. \tag{31}$$

Fixons maintenant les mêmes données au point $s' := G(s)$ d'attache de la transformée stricte $\breve{\mathcal{S}}'$ de $\breve{S}' := \Psi(S)$. Désignons par $(x_{s'}, y_{s'}) : \mathcal{W}'_{s'} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(1)^2$ les coordonnées locales au point s', issues du système local $\mathcal{L}'$, par $\rho' : \mathcal{W}'_{s'} \to \breve{\mathcal{S}}' \cap \mathcal{W}'_{s'}$ la fibration en disques définie par $y_{s'} \circ \rho' = y_{s'}$ et par $q' \in \breve{\mathcal{S}}$ le point de coordonnées $(0, 1/2)$. Notons aussi $T' := \rho'^{-1}(q')$. Nous laissons au lecteur le soin de prouver que, quitte à le composer par un homéomorphisme $\mathcal{F}'$-isotope à l'identité, Ψ satisfait les propriétés suivantes :

– $\Psi(V) \subset V'$, où V est l'image par E_S d'un voisinage tubulaire du cercle $\{x_s = 0, |y_s| = 1\}$ dans le tore $\{|x_s| \leq 1, |y_s| = 1\}$ et V' est l'image par $E_{S'}$ du tore $\{|x'_{s'}| \leq 1, |y_{s'}| = 1\}$;
– $\Psi_{|V}$ "commute aux fibrations", i.e. $E'_{S'} \circ \rho' \circ E_{S'}^{-1} \circ \Psi_{|V} = \Psi \circ E_S \circ \rho \circ E_S^{-1}$.

Comme en (29) nous avons l'égalité :

$$\mathrm{CS}(\underline{\mathcal{F}}', \breve{\mathcal{S}}', s') = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2i\pi n}\int_{\Psi\circ\Gamma_n}\frac{dx'_{s'}}{x'_{s'}}\,.$$

La variation de l'argument de $x'_{s'} \circ \xi_n$ est bornée, car Ψ est transversalement holomorphe -et donc holomorphe en restriction à T. Ainsi :

$$\mathrm{Re}(\mathrm{CS}(\underline{\mathcal{F}}', \breve{\mathcal{S}}', s')) = \lim_{n\to\infty}\frac{J_n}{n}\,, \quad J_n := \frac{1}{2i\pi}\int_{\Psi\circ(\Gamma_n \vee \xi_n)}\frac{dx'_{s'}}{x'_{s'}}; \tag{32}$$

Visiblement la classe de $\Psi \circ \lambda_n$ dans $\pi_1(\mathbb{B}^*, \Psi(q_0))$ est égale à $J_n \mathfrak{m}'_{\Psi(c_0)} + n\mathfrak{p}'_{\Psi(c_0)}$, d'où :

$$J_n \mathfrak{m}'_{\Psi(c_0)} + n\mathfrak{p}'_{\Psi(c_0)} = \Psi_*(I_n \mathfrak{m}_{c_0} + n\mathfrak{p}_{c_0})\,. \tag{33}$$

Le théorème (5.2.1) donne l'égalité : $I_n = J_n$. Grâce à (32), $\mathrm{CS}(\underline{\mathcal{F}}, \breve{\mathcal{S}}, s)$ et $\mathrm{CS}(\underline{\mathcal{F}}', \breve{\mathcal{S}}', s')$ ont même partie réelle. Leur différence est un nombre entier, puisque leurs exponentielles sont les valeurs propres de la dérivée des holonomies de $\breve{S}$ et $\breve{S}'$ -et celles-ci sont holomorphiquement conjuguées, car Ψ est transversalement holomorphe. Ils sont donc égaux.

6.3. **Invariance de tous les indices de Camacho-Sad.** La preuve repose sur la formule classique d'indice [1], indiquant que l'auto-intersection d'une composante D du diviseur exceptionnel, est égale à la somme des indices de Camacho-Sad le long de D, en tous les points de singulier du feuilletage situés sur D.

Considérons les filtrations des diviseurs exceptionnels $\mathcal{E}_S := E_S^{-1}(0)$ et $\mathcal{E}_{S'} := E_{S'}^{-1}(0)$:

$$\mathcal{E}_0 := \mathcal{E}_S \supset \mathcal{E}_1 \supset \mathcal{E}_2 \supset \cdots \quad \text{et} \quad \mathcal{E}'_0 := \mathcal{E}'_S \supset \mathcal{E}'_1 \supset \mathcal{E}'_2 \supset \cdots$$

définies par induction de la manière suivante : $\overline{\mathcal{E}_{j-1} \setminus \mathcal{E}_j}$ est l'union des composantes D de $\mathcal{E}_{j-1}$, de valence 1 dans $\mathcal{E}_{j-1}$. Elles aboutissent à l'ensemble vide, car les graphes duaux de ces diviseurs sont des arbres. Visiblement $G(\mathcal{E}_j) = \mathcal{E}'_j$, pour tout j. Pour obtenir les égalités $(*)_s$ du théorème en tout point $s \in \mathrm{Sing}(\underline{\mathcal{F}})$ et pour toute composante D de $\mathcal{D}_S$, il suffit de démontrer pour tout $j \geq 1$, l'assertion suivante :

$(\circledast)_j$ *l'égalité* $(*)_s$ *du théorème est vraie en tout point* $s \in (\mathrm{Sing}(\mathcal{D}_S) \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{E}_j))$*, pour chaque composante* D *contenant* s.

Or la formule d'indice donne l'implication $(\circledast)_j \Rightarrow (\circledast)_{j+1}$ et $(\circledast)_0$ exprime l'invariance des indices de Camacho-Sad des séparatrices, que nous venons de prouver en (6.2). D'où la conclusion.

7. Démonstration du théorème de classification (4.0.3)

Conservons toujours les notations (2), (15), (22) et (3.1.1) et plaçons-nous sous les hypothèses du théorème (4.0.3). Nous allons construire une réalisation globale de la conjugaison $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sur un voisinage de $\mathcal{D}_S$ dans $\mathcal{B}_S$, qui induit une réalisation de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sur un voisinage de S dans $\mathbb{B}$, satisfaisant les conclusions (a)(b)(c) du théorème. Nous procéderons par induction, en construisant les homéomorphismes cherchés de proche en proche, sur les "pièces élémentaires" d'une décomposition appropriée d'un voisinage du diviseur total $\mathcal{D}_S$ dans $\mathcal{B}_S$, décrite en (7.2).

7.1. **Description de l'induction.** Le lemme d'extension (7.3.2) ci-après est l'outil clé qui permet d'effectuer "le pas" de l'induction, mais il permettra aussi de l'initier. Étant donné une réalisation $(\phi, \widetilde{\phi}, h)$ de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, donnée sur une fibre T de la fibration de Hopf d'une composante du bord de K, il donne une condition topologique simple $(\bullet)$ qui permet d'étendre cette réalisation en une réalisation sur une pièce élémentaire K ; de plus :

1. la restriction de cette extension à une fibre de Hopf quelconque de toute composante connexe de ∂K, satisfait aussi la condition $(\bullet)$,
2. lorsque T est contenue dans l'intersection de deux pièces élémentaires adjacentes, les réalisations données par ce lemme sur chacune de ces pièces, coïncident nécessairement sur leur intersection.

Ainsi, si nous disposons d'une réalisation sur une pièce élémentaire K^0, nous pouvons l'étendre, de proche en proche, sur tout un voisinage de $\mathcal{D}_S$ dans $\mathcal{B}_S$. Pour prouver le théorème, il suffit donc de pouvoir utiliser le lemme (7.3.2) dans le contexte où D est la transformé stricte de la composante irréductible de S contenant m, $T = E^{-1}(\Sigma)$ et de prendre pour K^0 la pièce élémentaire associée à D. Au paragraphe (7.6) nous prouverons l'existence d'une représentation $(g_1, \widetilde{g}_1, h)$ de la conjugaison $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, qui satisfait dans ce contexte la condition $(\bullet)_{\widetilde{g}_1, \widetilde{\psi}}$ des hypothèses de (7.3.2). Ceci qui achèvera la preuve du théorème.

7.2. **Pièces élémentaires.** Fixons deux tubes de Milnor, cf. (22), $\mathcal{T}_\varepsilon$ pour S et $\mathcal{T}'_{\varepsilon'}$ pour S', les réels $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ étant choisis assez petits pour que $G(\mathcal{T}_\varepsilon) \subset \mathcal{T}'_{\varepsilon'}$ et que chaque hypersurface réelle $\{|x_s| = 1\}$ et $\{|y_s| = 1\}$, $s \in \mathrm{Sing}(\underline{\mathcal{F}})$, ainsi que $\{|x_{s'}| = 1\}$ et $\{|y_{s'}| = 1\}$, $s' \in \mathrm{Sing}(\underline{\mathcal{F}}')$, sépare le tube en deux composantes connexes et intersecte son bord transversalement (suivant un 2-tore). Notons :

$$\mathcal{H} := \bigcup_{s \in \mathrm{Sing}(\underline{\mathcal{F}})} \{|x_s| = 1\} \cup \{|y_s| = 1\},\ \mathcal{H}' := \bigcup_{s' \in \mathrm{Sing}(\underline{\mathcal{F}}')} \{|x_{s'}| = 1\} \cup \{|y_{s'}| = 1\}\,.$$

Nous appelons ici *pièce élémentaire de $\mathcal{T}_\varepsilon$, resp. de $\mathcal{T}'_{\varepsilon'}$*, toute intersection $K := \mathcal{K} \cap \mathring{\mathcal{T}}_\varepsilon$, resp. $K' := \mathcal{K}' \cap \mathring{\mathcal{T}}'_{\varepsilon'}$, où $\mathcal{K}$, resp. $\mathcal{K}'$, est l'adhérence d'une composante connexe de $\mathcal{T}_\varepsilon \setminus \mathcal{H}$, resp. $\mathcal{T}'_{\varepsilon'} \setminus \mathcal{H}'$. Pour chaque pièce élémentaire K, resp. K', une et une seule des deux éventualités suivantes est réalisée :

- K, resp. K', contient un (unique) point s de $\mathrm{Sing}(\underline{\mathcal{F}})$, resp. $s' \in \mathrm{Sing}(\underline{\mathcal{F}}')$ et est contenue dans le domaine $\mathcal{W}_s$ de la carte (x_s, y_s), resp. $\mathcal{W}_{s'}$ de $(x_{s'}, y_{s'})$;
- K, resp. K', contient un compact $D^\circ := \overline{D \setminus \bigcup_s \mathcal{W}_s}$, où D désigne une composante de $\mathcal{D}_S$, resp. $\mathcal{D}_{S'}$ et s décrit l'ensemble des points singulier de $\underline{\mathcal{F}}$, resp. $\underline{\mathcal{F}}'$; de plus, quitte à restreindre de nouveau ε ou $\varepsilon' > 0$, la restriction de la fibration π_D à $K \cap \pi_D^{-1}(\partial D^\circ)$, est une fibration en disques ;

Dans le premier cas la pièce élémentaire sera notée K_s, resp. $K_{s'}$ et elle sera notée K_D dans le second cas.

L'intersection de deux pièces élémentaires distinctes est soit vide, soit un 3-tore plein. D'autre part, comme g est excellent, nous avons les égalités

$$G(K_\bullet \cap \mathcal{D}_S) = K_{G(\bullet)} \cap \mathcal{D}_{S'}\,, \quad \bullet \in \mathrm{Comp}(\mathcal{D}_S) \sqcup \mathrm{Sing}(\underline{\mathcal{F}})\,,$$

et $G(K_\bullet)$ est un voisinage ouvert de $K_{G(\bullet)} \cap \mathcal{D}_{S'}$ dans $K_{G(\bullet)}$.

7.3. **Extension de réalisations.** Fixons une composante D de $\mathcal{D}_S$ et une fibre de Hopf $T := \pi_D^{-1}(c) \cap \mathcal{T}_\epsilon$, en un point c du bord de D°, cf. (23). La composante connexe C de ∂D° contenant c, est un cercle bordant un disque $\mathcal{W}_s \cap D$, $s \in \mathrm{Sing}(\underline{\mathcal{F}})$. Fixons aussi une représentation $(g, \widetilde{g}, h)$ de la conjugaison $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, avec g excellent et supposons $\epsilon > 0$ assez petit pour que $G := E_{S'}^{-1} \circ g \circ E_{S|\mathcal{T}_\varepsilon}$ soit défini sur $\mathcal{T}_\varepsilon$ et à valeurs dans $\mathcal{T}'_{\varepsilon'}$. Ainsi $c' := G(c)$ est un point du bord de D'°, $D' := G(D)$. Notons $T' := \pi_{D'}^{-1}(c')$ et supposons donnés un germe de biholomorphisme $\phi_S : (T, c) \to (T', c')$, ainsi qu'un pro-germe à l'infini $\widetilde{\phi}_\infty : (\widetilde{T}, \infty) \to (\widetilde{T}', \infty)$ qui relève ϕ_S, tels que $(\phi_S, \widetilde{\phi}_\infty, h)$ soit une réalisation de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sur T et T'.

Conventions 7.3.1. Pour $B \subset \widetilde{\mathbb{B}}^*$ et $B' \subset \widetilde{\mathbb{B}}'^\star$, nous notons :

$$\pi_0(B, \infty) := \varprojlim_{U \in \mathfrak{U}_{\mathcal{F},\Sigma}} \pi_0(B \cap \widetilde{U}^*)\,, \quad \pi_0(B', \infty) := \varprojlim_{U \in \mathfrak{U}_{\mathcal{F}',\Sigma'}} \pi_0(B' \cap \widetilde{U}^\star)\,.$$

Lemme 7.3.2 (d'extension de réalisations). *Désignons par K, resp K' l'une des deux pièces K_D ou K_s et notons : $Z := K \cap \mathcal{D}_S$ et $Z' := K' \cap \mathcal{D}_{S'}$. Supposons que $\widetilde{\phi}$ et la restriction de $\widetilde{g}$ à $\widetilde{T}^*$ induisent la même application*

$$(\bullet)_{\widetilde{g},\widetilde{\phi}} \qquad \widetilde{\phi}_{\bullet} = \widetilde{g}_{\bullet} : \pi_0(\widetilde{T}^*, \infty) \longrightarrow \pi_0(\widetilde{T}'^{\star}, \infty)\,, \qquad ,$$

et, dans l'éventualité $K = K_s$, supposons aussi réalisée l'égalité des indices de Camacho-Sad : $\mathrm{CS}(\underline{\mathcal{F}}, D, s) = \mathrm{CS}(\underline{\mathcal{F}}', D', G(s))$. Alors il existe des homéomorphismes $\Phi : V \to V'$ et $\widetilde{\Phi} : \widetilde{V}^* \to \widetilde{V}'^{\star}$ tel que, pour toute composante $\breve{D}$ de $\mathcal{D}_S$ qui intersecte K, on ait :

(a) V, resp. V', est un voisinage ouvert de $\mathcal{D}_S \cap K$ dans K, resp. de $\mathcal{D}_{S'} \cap K'$ dans K', $\widetilde{\Phi}$ relève Φ i.e. $\underline{q}' \circ \widetilde{\Phi} = \Phi \circ \underline{q}_{|\widetilde{V}^*}$ et $\Phi_{|Z \cap \breve{D}^\circ} = G_{|Z \cap \breve{D}^\circ}$;

(b) Φ respecte les fibres de Hopf au dessus de $K \cap \breve{D}^\circ$, plus précisément $\pi_{\breve{D}'} \circ \Phi_{|V \cap \pi_{\breve{D}}^{-1}(V \cap \breve{D}^\circ)} = G \circ \pi_{\breve{D}|V \cap \breve{D}^\circ}$, avec $\breve{D}' := G(\breve{D})$;

(c) le germe de la restriction de Φ à T est égal à ϕ_S et le pro-germe de la restriction de $\widetilde{\Phi}$ à $\widetilde{T}^*$ est égal à $\widetilde{\phi}_\infty$;

(d) si l'on désigne par Φ_S le germe de Φ le long de $K \cap \mathcal{D}_S$ et par $\widetilde{\Phi}_\infty$ le pro-germe à l'infini de $\widetilde{\Phi}$, alors $(\Phi_S, \widetilde{\Phi}_\infty, h)$ est une réalisation de la conjugaison $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sur V et V', au sens de (7.3.1) ; en particulier Φ est une conjugaison transversalement holomorphe entre les restrictions de feuilletages $\mathcal{F}_{|V}$ et $\mathcal{F}'_{|V'}$;

(e) pour chaque $t \in \breve{D}^\circ \cap K$, les restrictions de $\widetilde{g}$ et de $\widetilde{\Phi}$ à $T_t := \pi_{\breve{D}}^{-1}(t)$, induisent la même application

$$\widetilde{g}_{|\widetilde{T}_t^*\,\bullet} = \widetilde{\Phi}_{|\widetilde{T}_t^\star\,\bullet} : \pi_0(\widetilde{T}_t^*, \infty) \to \pi_0(\widetilde{T}'^{\star}_{t'}, \infty)\,, \quad T'_{t'} := \pi_{\breve{D}'}^{-1}(t')\,,\ t' := G(t)\,.$$

De plus, les homéomorphismes que l'on obtient ainsi, pour les éventualités $K = K_D$ et $K = K_s$, coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition.

7.4. **Démonstration du lemme (7.3.2) pour $K = K_D$.** D'après le théorème (3.3.1), ϕ conjugue la représentation d'holonomie de $\underline{\mathcal{F}}$ le long de D°, à celle de $\underline{\mathcal{F}}'$ le long de D'°. Classiquement :

(▲) *il existe des systèmes fondamentaux $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(W'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de voisinages de D°, resp. D'°, dans K, resp. K' et des homéomorphismes Φ_k de W_k sur W'_k, tels que : 1) pour tout k, l, Φ_k et Φ_l coïncident sur $W_k \cap W_l$, 2) les intersections de W_k, resp. W'_k avec les fibres de π_D, resp. $\pi_{D'}$, sont des disques conformes -et donc W_k^* et K^*, resp. $W'^{\star}_k$ et $K^\star$, sont homotopes, 3) $\mathrm{Sat}_{\underline{\mathcal{F}}}(T \cap W_k, W_k) = W_k$ et $\mathrm{Sat}_{\underline{\mathcal{F}}}(T' \cap W'_k, W'_k) = W'_k$, 4) $\pi_{D'} \circ \Phi_k = G \circ \pi_{D|W_k}$, 5) les restrictions de ϕ et de Φ_k à $W_k \cap T$ coïncident, 6) Φ_k conjugue $\underline{\mathcal{F}}_{|W_k}$ à $\underline{\mathcal{F}}'_{|W'_k}$.*

Posons :

$$V := W_0\,, \quad V' := W'_0\,, \quad \Phi := \Phi_0\,.$$

Notons $\Delta := V \cap T$ et $\Delta' := V \cap T'$. D'après la propriété 2) (▲) ci-dessus, la restriction de $\underline{q}$ à chaque composante connexe $\widetilde{V}^{*\beta}$ de $\widetilde{V}^*$, $\beta \in \pi_0(\widetilde{V}^*)$, resp. $\widetilde{V}'^{\star\beta'}$ de $\widetilde{V}'^{\star}$, $\beta' \in \pi_0(\widetilde{V}'^{*})$, est un revêtement universel de V^*, resp.

de $V'^{\star}$; il en est de même pour les composantes connexes $\widetilde{\Delta}^{*\alpha}$ de $\widetilde{\Delta}^{*}$ au dessus de Δ^{*}, $\alpha \in \pi_0(\widetilde{\Delta}^{*} \cap \widetilde{V}^{*\beta})$ et pour celles $\widetilde{\Delta}'^{\star\alpha'}$ de $\widetilde{\Delta}'^{\star}$ au dessus de $\Delta'^{\star}$, $\alpha' \in \pi_0(\widetilde{\Delta}'^{\star})$. Fixons $\beta \in \pi_0(\widetilde{V}^{*})$, $\alpha \in \pi_0(\widetilde{\Delta}^{*} \cap \widetilde{V}^{*\beta})$ et désignons par $\widetilde{\Phi}^{\beta} : \widetilde{V}^{*\beta} \to \widetilde{V}'^{\star\beta'}$ l'unique homéomorphisme qui relève Φ sur $\widetilde{V}^{*\beta}$ et qui coïncide avec $\widetilde{\phi}$ sur $\widetilde{\Delta}^{*\alpha}$, β' correspondant ici à la composante connexe de $\widetilde{V}'^{*}$, qui contient $\widetilde{\phi}(\widetilde{\Delta}^{*\alpha})$. Nous allons démontrer :

(i) $\widetilde{\Phi}^{\beta}$ ne dépend pas du choix de $\alpha \in \pi_0(\widetilde{\Delta}^{*} \cap \widetilde{V}^{*\beta})$;

(ii) l'homéomorphisme $\widetilde{\Phi} : \widetilde{V}^{*} \to \widetilde{V}'^{\star}$, qui est égal à $\widetilde{\Phi}^{\lambda}$ en restriction à chaque composante $\widetilde{V}^{*\lambda}$, $\lambda \in \pi_0(\widetilde{V}^{*})$, satisfait les conditions (a)-(e) du lemme (7.3.2).

- *Preuve de* (i). Par unicité des relevés de Φ sur le revêtement $\widetilde{V}^{*\beta}$, il suffit de montrer que pour tout $\kappa \in \pi_0(\widetilde{\Delta}^{*} \cap \widetilde{V}^{*\beta})$ les applications $\widetilde{\Phi}^{\beta}$ et $\widetilde{\phi}$ coïncident en un point particulier de $\widetilde{\Delta}^{*\kappa}$; en fait nous allons prouver l'égalité des germes à l'infini de leurs restriction à $\widetilde{\Delta}^{*\kappa}$.

Il suffit pour cela de montrer que $\widetilde{\Phi}^{\beta}(\widetilde{\Delta}^{*\kappa})$ et $\widetilde{\phi}(\widetilde{\Delta}^{*\kappa})$ sont contenus dans une même composante connexe $\widetilde{\Delta}^{*\kappa'}$ de $\widetilde{\Delta}'^{*} \cap \widetilde{V}'^{\star\beta'}$. En effet, $\widetilde{\Phi}^{\beta}$ conjugue $\underline{\widetilde{\mathcal{F}}}_{|\widetilde{V}^{*\beta}}$ à $\underline{\widetilde{\mathcal{F}}}'_{|\widetilde{V}'^{\beta'}}$ et se factorise à travers les espaces de feuilles de ces feuilletages. On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$(\star)_{\Upsilon,\,\kappa} \qquad \begin{array}{ccc} (\widetilde{\Delta}^{*\kappa}, \infty) & \xrightarrow{\Upsilon} & (\widetilde{\Delta}'^{*\kappa'}, \infty) \\ \tau_{\widetilde{\Delta}^{*\kappa}} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \tau_{\widetilde{\Delta}'^{*\kappa'}} \\ \widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}}_{\infty} & \xrightarrow{h} & \widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}'}_{\infty} \end{array} \ ,$$

où Υ désigne le germe à l'infini $\widetilde{\Phi}^{\beta}_{|\widetilde{\Delta}^{*\kappa}\,\infty}$ de la restriction de $\widetilde{\Phi}^{\beta}$ à $\widetilde{\Delta}^{*\kappa}$, les flèches verticales désignant les pro-germes canoniques définis en (2.3) ; d'autre part ce diagramme commute aussi lorsqu'on prend pour Υ le germe à l'infini $\widetilde{\phi}_{|\widetilde{\Delta}^{*\kappa}\,\infty}$ de la restriction de $\widetilde{\phi}$ à $\widetilde{\Delta}^{*\kappa}$, car $(\phi_S, \widetilde{\phi}_{\infty}, h)$ est une représentation de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sur T ; l'égalité $\widetilde{\Phi}^{\beta}_{|\widetilde{\Delta}^{*\kappa}\,\infty} = \widetilde{\phi}_{|\widetilde{\Delta}^{*\kappa}\,\infty}$ découle de la proposition (2.3.1) qui affirme que $\tau_{\widetilde{\Delta}^{*\kappa}}$ et $\tau_{\widetilde{\Delta}'^{*\kappa'}}$ sont des $\underleftarrow{\mathrm{An}}$-monomorphismes.

Considérons maintenant les revêtements connexes naturels

$$\chi_\beta : \bigsqcup_{t \in D^\circ} \pi_0\left(\widetilde{\Delta}^{*}_{t} \cap \widetilde{V}^{*\beta}, \infty\right) =: \Pi_0^{\beta} \longrightarrow D^\circ \,, \quad \Delta_t := \pi_D^{-1}(t) \cap V \,,$$

$$\text{et} \quad \chi'_{\beta'} : \bigsqcup_{t \in D'^\circ} \pi_0\left(\widetilde{\Delta}'^{*}_{t} \cap \widetilde{V}'^{*\beta'}, \infty\right) =: \Pi'^{\beta'}_0 \longrightarrow D'^\circ \,, \quad \Delta'_t := \pi_{D'}^{-1}(t) \cap V' \,.$$

Les applications $\widetilde{g}$ et $\widetilde{\Phi}^{\beta}$ envoient toute composante connexe de $\widetilde{\Delta}^{*}_{t} \cap \widetilde{V}^{*\beta}$ sur une composante connexe de $\widetilde{\Delta}'^{*}_{G(t)} \cap \widetilde{V}'^{*\beta'}$, définissant ainsi des morphismes de revêtements $\widetilde{g}^{\beta}_{\bullet}$ et $\widetilde{\Phi}^{\beta}_{\bullet}$,

$$\begin{array}{ccc} \Pi_0^{\beta} & \xrightarrow{\Lambda} & \Pi'^{\beta'}_0 \\ \chi_\beta \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \chi'_{\beta'} \\ D^\circ & \xrightarrow{G_{|D^\circ}} & D'^\circ \end{array} \ , \quad \Lambda = \widetilde{g}^{\beta}_{\bullet}, \text{ ou bien } \Lambda = \widetilde{\Phi}^{\beta}_{\bullet} \,,$$

Notons qu'au dessus du point c, $\widetilde{\Phi}^{\beta}_{\bullet}$ et $\widetilde{g}^{\beta}_{\bullet}$ coïncident au point $\alpha \in \pi_0(\widetilde{\Delta}^{*}, \infty) \subset \Pi_0^{\beta}$ précédemment fixé ; en effet nous avons les égalités : $\widetilde{\Phi}^{\beta}_{\bullet}(\alpha) = \widetilde{\phi}(\alpha) =$

$\widetilde{g}^{\beta}_{\bullet}(\alpha)$, la première provenant de la construction de $\widetilde{\Phi}^{\beta}$ et la seconde de l'hypothèse $(\bullet)_{\widetilde{g},\widetilde{\phi}}$. On en déduit l'identité $\widetilde{\Phi}^{\beta}_{\bullet} \equiv g^{\beta}_{\bullet}$. En utilisant de nouveau $(\bullet)_{\widetilde{g},\widetilde{\phi}}$, cette identité donne : $\widetilde{\Phi}^{\beta}_{\bullet}(\kappa)=\widetilde{g}^{\beta}_{\bullet}(\kappa)=\widetilde{\phi}(\kappa)$, pour tout $\kappa\in\pi_0(\widetilde{\Delta}^*\cap\widetilde{V}^{*\beta})$; ce qui achève la preuve de (i).

- *Preuve de* (ii). Ici $\breve{D} = D$ et $K \cap \breve{D}^\circ = D^\circ$. Les assertions (a), (b) et (c) sont satisfaites par construction. Lors de la preuve de (i), nous avons aussi prouvé l'assertion (e). Il reste à montrer (d), c'est à dire que le pro-germe à l'infini $\widetilde{\Phi}_\infty$ défini par $\widetilde{\Phi}$, fait commuter les diagrammes $(\star)_{\widetilde{\Phi}_\infty}$ et $(\star\star)_{\widetilde{\Phi}_\infty}$ de la définition (2.7.1).

Preuve de la commutativité de $(\star)_{\widetilde{\Phi}_\infty}$. Pour deux familles co-finales $U_n \in \mathfrak{U}_{\mathcal{F},\,\Sigma\cup E_S(T)}$ et $U'_n \in \mathfrak{U}'_{\mathcal{F}',\Sigma\cup E_{S'}(T')}$, $n \in \mathbb{N}$, donnons nous des applications holomorphes $h_{n,p}$ de $\widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}}_{\widetilde{U}_n}$ dans $\widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}'}_{\widetilde{U}'_p}$, telles que $h = \varprojlim_p \varinjlim_n h_{n,p}$. Par définition, la commutativité de $(\star)_{\widetilde{\Phi}_\infty}$ signifie la commutativité de tous les diagrammes

$$(34) \qquad \begin{array}{ccc} (\widetilde{V}^*,\infty) & \xrightarrow{\widetilde{\Phi}_\infty} & (\widetilde{V}'^{\star},\infty) \\ \tau_n \downarrow & & \downarrow \tau'_p \\ \widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}}_{U_n} & \xrightarrow{h_{n,p}} & \widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}'}_{U'_p} \end{array} \quad , \qquad n \geq p \,,$$

où $\tau_n := \tau_{\widetilde{V}^*,\,U_n}$ et $\tau'_p := \tau_{\widetilde{V}'^{\star}, U'_p}$ sont les pro-germes canoniques intrduits en (2.3). Pour prouver cela, il suffit grâce au théorème (1.1.1), de déterminer des voisinages ouverts $V_{n,p}$ de D° dans K_D, tels que :

$$(35) \qquad V_{n,p} \subset U_n\,, \quad \Phi(V_{n,p}) \subset U'_p \quad \text{et} \quad \tau'_{n,p} \circ \widetilde{\Phi}_{|\widetilde{V}_{n,p}} = h_{n,p} \circ \tau_{n,p|\widetilde{V}_{n,p}}\,,$$

où

$$\tau_{n,p} : \widetilde{V}^*_{n,p} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}}_{U_n} \quad \text{et} \quad \tau'_{n,p} : \widetilde{V}'^{\star}_{n,p} \to \widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}'}_{U'_p}$$

désignent les application de passage au quotient par la relation d'équivalence définie par $\widetilde{\underline{\mathcal{F}}}_{|U_n}$ et $\widetilde{\underline{\mathcal{F}}}'_{|U'_p}$ respectivement. Prenons pour $V_{n,p}$ un ouvert $W_{\kappa(n,p)}$ du système fondamental donné en $(\blacktriangle)$, l'indice $\kappa(n,p) \in \mathbb{N}$ étant choisi assez grand, pour que les inclusions ci-dessus soient satisfaites. L'égalité de (35) étant une égalité d'applications, elle est satisfaite dès qu'on la vérifie[9] sur un recouvrement $(\widetilde{V}^{\sigma}_{n,p})_\sigma$ de $\widetilde{V}^*_{n,p}$. Posons :

$$\widetilde{V}^{\sigma}_{n,p} := \mathrm{Sat}_{\widetilde{\underline{\mathcal{F}}}}(\widetilde{\Delta}^{\sigma}_{n,p}, \widetilde{V}_{n,p})\,, \quad \sigma \in \pi_0(\widetilde{\Delta}^*_{n,p},\infty)\,, \quad \Delta_{n,p} := V_{n,p} \cap T\,,$$

où $\widetilde{\Delta}^{\sigma}_{n,p}$ est la composante connexe de $\widetilde{\Delta}^*_{n,p}$ correspondant à σ. La propriété 3) de $(\blacktriangle)$ implique que les $\widetilde{V}^{\sigma}_{n,p}$ recouvrent $V_{n,p}$. D'autre part la propriété c. de la définition de $(\mathcal{F},\Sigma\cup E_S(T))$-admissibilité de $V_{n,p}$ énoncée en (1.1), implique que chaque feuille de la restriction de $\widetilde{\underline{\mathcal{F}}}$ à $\widetilde{V}^{\sigma}_{n,p}$ intersecte (transversalement) $\widetilde{\Delta}^{\sigma}_{n,p}$ en exactement un point, définissant ainsi une submersion-rétraction-intégrale première holomorphe r^σ de $\widetilde{V}^{\sigma}_{n,p}$ sur $\widetilde{\Delta}^{\sigma}_{n,p}$. Il est clair d'après 4) $(\blacktriangle)$, que $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\Delta}^{\sigma}_{n,p})$ est une composante connexe de $\widetilde{\Delta}'^{\star}_{n,p}$,

[9]Notons qu'un tel argument n'est pas valable pour prouver directement l'égalité de pro-germes : $\tau'_p \circ \widetilde{\Phi}_\infty = h_{n,p} \circ \tau_n$, sans les réaliser préalablement sur les ouverts $V_{n,p}$, cf. (2.2.1).

où $\Delta'_{n,p} := V'_{n,p} \cap T' = \Phi(\Delta_{n,p})$. On dispose également d'une submersion-intégrale première r'^{σ} définie sur le saturé $\widetilde{V'}^{\sigma}_{n,p}$ de $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\Delta}^{\sigma}_{n,p})$ dans $\widetilde{V'}^{\star}_{n,p}$ et à valeurs sur $\widetilde{\Phi}(\Delta^{\sigma}_{n,p})$. Visiblement $\widetilde{V'}^{\sigma}_{n,p} = \widetilde{\Phi}(\widetilde{V}'_{n,p})$ et, par 6) (▲), le diagramme suivant commute :

$$\text{(36)} \qquad \begin{array}{ccc} \widetilde{V}^{\sigma}_{n,p} & \xrightarrow{\widetilde{\Phi}_{|\widetilde{V}^{\sigma}_{n,p}}} & \widetilde{V'}^{\sigma}_{n,p} \\ r^{\sigma}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow r'^{\sigma} \\ \widetilde{\Delta}^{\sigma}_{n,p} & \xrightarrow{\widetilde{\Phi}_{|\widetilde{\Delta}^{\sigma}_{n,p}}} & \widetilde{\Phi}(\widetilde{\Delta}^{\sigma}_{n,p}) \end{array} .$$

D'autre part, $\widetilde{\Phi}$ et $\widetilde{\phi}$ coïncident sur $\widetilde{\Delta}^*$. Aussi la commutativité du diagramme $(\star)_{\phi}$ de la définition (2.7.1) implique celle du diagramme suivant si, ce que l'on supposera, on a choisi l'indice $\kappa(n,p)$ assez grand :

$$\text{(37)} \qquad \begin{array}{ccc} \widetilde{\Delta}^{\sigma}_{n,p} & \xrightarrow{\widetilde{\Phi}_{|\widetilde{\Delta}^{\sigma}_{n,p}}} & \widetilde{\Phi}(\widetilde{\Delta}^{\sigma}_{n,p}) \\ \tau\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \tau' \\ \widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}}_{U_n} & \xrightarrow{h_{n,p}} & \widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}'}_{U'_p} \end{array}$$

τ et τ' désignant toujours les applications de passage au quotient. Il est maintenant clair que la commutativité de (36) et de (37), donnent la relation $\tau'_{n,p} \circ \widetilde{\Phi}_{|\widetilde{V}_{n,p}} = h_{n,p} \circ \tau_{n,p|\widetilde{V}_{n,p}}$ de (35). Ceci termine la preuve de la commutativité de $(\star)_{\widetilde{\Phi}_\infty}$.

Preuve de la commutativité de $(\star\star)_{\widetilde{\Phi}_\infty}$. $\widetilde{\phi}_\infty$ fait commuter le diagramme $(\star\star)_{\widetilde{\phi}_\infty}$ de la définition (2.7.1) :

$$(\star\star)_{\widetilde{\phi}_\infty} \qquad \begin{array}{ccc} \Gamma_\infty & \overset{\iota}{\hookrightarrow} & \Gamma_{\widetilde{T}^*,\infty} \\ \mathfrak{g}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \widetilde{\phi}_{\infty *} \\ \Gamma'_\infty & \overset{\iota'}{\hookrightarrow} & \Gamma_{\widetilde{T}'^{\star},\infty} \end{array} ,$$

$\iota(\varphi) := \varphi_{|\widetilde{T}^*}$, resp. $\iota'(\varphi) := \varphi_{|\widetilde{T}'^{\star}}$. En appliquant alors le sous-lemme suivant avec $W_1 := E_S(T)$, $W_2 := E_S(V)$, $W'_1 := E_{S'}(T')$ et $W'_2 := E_{S'}(V')$, on obtient directement la commutativité de $(\star\star)_{\widetilde{\Phi}_\infty}$.

Sous-Lemme 7.4.1. *Soit $W_1 \subset W_2$, resp. $W'_1 \subset W'_2$, des sous-variétés de $\mathbb{B}$, resp. $\mathbb{B}'$, non-contenues dans S, resp. S' et telles que $W_1 \cap S \neq \emptyset$, resp. $W'_1 \cap S' \neq \emptyset$. Soit $\widetilde{\Psi}_2 : \widetilde{W}_2 \to \widetilde{W}'_2$ relevant un homéomorphisme $\Psi_2 : W_2 \to W'_2$ tel que $\Psi(W_1) = W'_1$. Alors (avec les notations introduites en (2.7)) les propriétés de commutation du diagramme $(\star\star)_{\widetilde{\Psi}_1}$ ou du diagramme $(\star\star)_{\widetilde{\Psi}_2}$ ci-dessous sont équivalentes :*

$$(\star\star)_{\widetilde{\Psi}_k} \qquad \begin{array}{ccc} \Gamma_\infty & \overset{\iota_k}{\hookrightarrow} & \Gamma_{\widetilde{W}^*_k,\infty} \\ \mathfrak{g}\downarrow & & \downarrow \widetilde{\Psi}_{k*} \\ \Gamma'_\infty & \overset{\iota'_k}{\hookrightarrow} & \Gamma'_{\widetilde{W}'^{\star}_k,\infty} \end{array} , \quad k = 1, 2,$$

avec : $\widetilde{\Psi}_1 := \widetilde{\Psi}_{2|\widetilde{W}^*_1}$, $\iota_k(\varphi) := \varphi_{|\widetilde{W}^*_k}$ *et* $\iota'_k(\varphi) := \varphi_{|\widetilde{W'}^*_k}$.

Preuve du sous-lemme. Il suffit d'utiliser que les lignes du diagramme ci-dessous sont formées de monomorphismes :

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma_\infty & \overset{\iota_2}{\hookrightarrow} & \Gamma_{\widetilde{W}_2^*,\infty} & \overset{\iota_{12}}{\hookrightarrow} & \Gamma_{\widetilde{W}_1^*,\infty} \\ \mathfrak{g}\downarrow & & \downarrow \widetilde{\Psi}_{2*} & \circlearrowleft & \downarrow \widetilde{\Psi}_{1*} \\ \Gamma'_\infty & \overset{\iota'_2}{\hookrightarrow} & \Gamma'_{\widetilde{W}_2'^\star,\infty} & \overset{\iota'_{12}}{\hookrightarrow} & \Gamma'_{\widetilde{W}_1'^\star,\infty} \end{array}$$

avec $\iota_{12}(\varphi) := \varphi_{|\widetilde{W}_1^*}$ et $\iota'_{12}(\varphi) := \varphi_{|\widetilde{W}'^\star_1}$. □

Ceci achève la démonstration de (ii), et donc aussi celle du lemme (7.3.2) dans l'éventualité $K = K_D$.

7.5. **Démonstration du lemme (7.3.2) pour $K = K_s$.** Supposons que $y_s = 0$, resp. $y_{s'} = 0$, est une équation locale de D, resp. D' et adoptons les notations :

$$\mathbb{P}_{\lambda,\mu} := \{|x_s| \leq \lambda, |y_s| \leq \mu\}\,, \quad \mathbb{P}'_{\lambda,\mu} := \{|x_{s'}| \leq \lambda, |y_{s'}| \leq \mu\}\,,$$

$$\mathbb{T}_{\lambda,\mu} := \{|x_s| \leq \lambda, |y_s| = \mu\}\,, \quad \mathbb{T}'_{\lambda,\mu} := \{|x_{s'}| \leq \lambda, |y_{s'}| = \mu\}\,. \tag{38}$$

$$\mathfrak{T}_{\lambda,\mu} := \{|x_s| = \lambda,\ |y_s| \leq \mu\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{T}'_{\lambda,\mu} := \{|x_{s'}| = \lambda,\ |y_{s'}| \leq \mu\}\,.$$

Désignons par X, resp. X', le champ de vecteurs réel tangent à $\underline{\mathcal{F}}$, resp. $\underline{\mathcal{F}}'$, dont le flot s'écrit $(x_s, y_s, t) \mapsto (F(x_s, y_s, t), e^t y_s)$, resp. $(x_{s'}, y_{s'}, t) \mapsto (F'(x_{s'}, y_{s'}, t), e^t y_{s'})$.

Nous allons d'abord construire Φ et $\widetilde{\Phi}$ qui satisfont les assertions (a)-(d) du lemme, puis nous modifierons ces deux homéomorphismes, sans affecter (a)-(d), pour satisfassent aussi l'assertion (e).

Étape 1 : construction de Φ. Grâce au théorème (3.3.1), le germe ϕ_S conjugue les holonomies de $\underline{\mathcal{F}}$ et $\underline{\mathcal{F}}'$; il s'étend donc au voisinage des disques épointés :

$$D_s^\diamond := \{0 < |x_s| \leq 1, y_s = 0\}\,, \quad D_s'^\diamond := G(D_s^\diamond) = \{0 < |x_{s'}| \leq 1, y_{s'} = 0\}\,,$$

définissant un unique germe de d'homéomorphisme $\Phi_{D_s^\diamond}$ de $(\mathcal{W}_s, D_s^\diamond)$ sur $(\mathcal{W}'_{s'}, D_s'^\diamond)$ qui conjugue $\underline{\mathcal{F}}$ à $\underline{\mathcal{F}}'$ et commute aux fibrations de Hopf : $\pi_{D'} \circ \Phi_{D_s^\diamond} = G \circ \pi_D$. Notons que le germe $\Phi_{D_s^\diamond}$ est holomorphe pour $|x_s|$ assez petit, disons $|x_s| \leq \alpha$, car il est transversalement holomorphe par construction et G, qui est excellent (2.6.2), est holomorphe sur un polydisque $\mathbb{P}_{\alpha,\beta}$ -et vérifie aussi :

$$x_{s'} \circ G_{|\mathbb{P}_{\alpha,\beta}} = x_{s|\mathbb{P}_{\alpha,\beta}}\,, \qquad y_{s'} \circ G_{|\mathbb{P}_{\alpha,\beta}} = y_{s|\mathbb{P}_{\alpha,\beta}}\,.$$

L'égalité des indices de Camacho-Sad permet d'appliquer le théorème de conjugaison énoncé en [11], cf. (5.2.1) [6]. Celui-ci affirme que le germe $\Phi_{D_s^\diamond}$ s'étend au point singulier s : il peut être représenté par un homéomorphisme Φ_{D_s} défini sur un polydisque $\mathbb{P}_{1,\epsilon}$, $0 < \epsilon < \alpha$ et à valeurs sur un ouvert contenant un polydisque $\mathbb{P}'_{1,\epsilon'}$, qui conjugue $\underline{\mathcal{F}}$ à $\underline{\mathcal{F}}'$ et vérifie $\pi_{D'} \circ \Phi_{D_s} = G \circ \pi_{D|\mathbb{P}_{1,\epsilon}}$; de plus Φ_{D_s} est holomorphe sur $\mathbb{P}_{\alpha,\epsilon}$. Quitte à restreindre α et $\epsilon > 0$, nous pouvons aussi supposer que

- le champ X est transverse au tore $\mathbb{T}_{\alpha,\epsilon}$ et X' est transverse à l'hypersurface analytique réelle $H := \Phi_{D_s}(\mathbb{T}_{\alpha,\epsilon})$,

– H n'intersecte pas le tore $\mathbb{T}'_{1,\beta}$,
– pour $\alpha' > 0$ assez petit, $(\mathbb{P}'_{\alpha',1} \setminus H)$ possède deux composantes connexes et celle qui ne contient pas s, contient $\mathbb{T}_{\alpha',\beta}$; nous désignons par $\mathbb{P}'^{+}_{\alpha',1}$, son adhérence.

Fixons un tel α' et nous recollons Φ_{D_s} avec l'homéomorphisme $\Phi_{\mathcal{C}}$ donné par le sous-lemme ci-dessous : désignons par D_1, resp. D'_1, la composante de $\mathcal{D}_S$, resp. $\mathcal{D}_{S'}$, contenant s, resp. s' et différente de D, resp. D'.

Sous-Lemme 7.5.1. *Il existe un homéomorphisme $\Phi_{\mathcal{C}}$ défini sur un voisinage ouvert $V_{\mathcal{C}}$ de la couronne $\mathcal{C} := \{x_s = 0, \epsilon \leq |y_s| \leq 1\}$ dans $\{|x_s| \leq \alpha', \epsilon \leq |y_s| \leq 1\}$, à valeurs sur un voisinage ouvert $V'_{\mathcal{C}'}$ de $\mathcal{C}' := \mathbb{P}'^{+}_{\alpha',1} \cap \{x_{s'} = 0\}$ dans $\mathbb{P}'^{+}_{\alpha',1}$, qui conjugue $\underline{\mathcal{F}}_{V_{\mathcal{C}}}$ à $\underline{\mathcal{F}}'_{|V'_{\mathcal{C}'}}$, coïncide avec Φ_{D_s} en restrictions à $V_{\mathcal{C}} \cap \mathbb{T}_{1,\epsilon}$, satisfait la relation $\pi_{D'_1} \circ \Phi_{\mathcal{C}}(p) = G \circ \pi_{D_1}(p)$, pour $|y_s(p)| \geq \beta$ et vérifie :* $\mathrm{Sat}_{\underline{\mathcal{F}}}(V_{\mathcal{C}} \cap \mathbb{T}_{1,\epsilon}, V_{\mathcal{C}}) = V_{\mathcal{C}}$.

Preuve du sous-lemme. Elle se fait par la construction classique de relèvement de chemins, que nous laissons aux soins du lecteur d'expliciter dans ce cas. □

Nous obtenons un homéomorphisme $\underline{\Phi}$ défini sur $\mathbb{P}_{1,\epsilon} \cup V_{\mathcal{C}}$. Nous posons $V := \{|x_s y_s| \leq \zeta\} \subset \mathcal{W}_s$, $V' := \underline{\Phi}(V)$ et $\Phi := \underline{\Phi}_{|V}$, après avoir choisi $\zeta > 0$ assez petit, pour que V soit contenu dans $\mathbb{P}_{1,\epsilon} \cup V_{\mathcal{C}}$, .

-*Étape 2 : construction de $\widetilde{\Phi}$.* Il est clair (avec les notations (7.3.1)) que les applications naturelles

$$(39) \qquad \pi_0(\widetilde{\mathfrak{T}}^*_{1,1}, \infty) \longrightarrow \pi_0(\widetilde{V}^*, \infty)\,, \quad \pi_0(\widetilde{\mathfrak{T}}'^*_{1,1}, \infty) \longrightarrow \pi_0(\widetilde{V}'^*, \infty)\,,$$

induites par les inclusions $\widetilde{\mathfrak{T}}^*_{1,1} \subset \widetilde{V}^*$ et $\widetilde{\mathfrak{T}}'^*_{1,1} \subset \widetilde{V}'^*$, sont des bijections. Ainsi tout relevé $\widetilde{\Phi}_{\mathfrak{T}_{1,1}} : \widetilde{\mathfrak{T}}^*_{\zeta,1} \to \widetilde{V}'^{\star}$ de la restriction de Φ à $\mathfrak{T}^*_{\zeta,1}$, se prolonge de manière unique en un homéomorphisme $\widetilde{\Phi} : \widetilde{V}^* \to \widetilde{V}'^{\star}$ qui relève Φ. Pour choisir $\widetilde{\Phi}_{\mathfrak{T}_{\zeta,1}}$, appliquons d'abord le lemme (7.3.2) dans l'éventualité $K = K_D$ (pour laquelle il est prouvé) ; nous obtenons un homéomorphisme Φ_{D° défini sur un voisinage V_{D° de D° et un relevé $\widetilde{\Phi}_{D^\circ}$ défini sur $\widetilde{V}^*_{D^\circ}$ qui satisfont assertions du lemme. Or (b) et (c) induisent l'unicité de ces homéomorphismes, dès que (c) est réalisée. Comme Φ satisfait aussi (c), sa restrictions à $\mathfrak{T}_{\zeta,1}$ coïncident en germe avec celle de Φ_{D°. Nous pouvons donc prendre pour $\widetilde{\Phi}_{\mathfrak{T}_{\zeta,1}}$, l'extension de $\widetilde{\Phi}_{D^\circ}$ sur $\widetilde{V}^*$, quitte à restreindre $\zeta > 0$ pour que $\mathfrak{T}_{\zeta,1}$ soit contenu dans V_{D°.

-*Étape 3 : démonstration de (a)-(d).* Les assertions (a)-(c) sont trivialement satisfaites. Pour (d) nous devons prouver la commutation des deux diagrammes de la définition (2.7.1). Pour la commutativité $(\star\star)_{\widetilde{\Phi}_\infty}$ il suffit de recopier littéralement la preuve effectuée précédemment dans l'éventualité $K = K_D$. Il reste donc à prouver la commutativité de $(\star)_{\widetilde{\Phi}_\infty}$.

Pour cela remarquons d'abord, avec les notations de l'étape 2, que le triplet $(\Phi_{D^\circ}, \widetilde{\Phi}_{D^\circ}, h)$ étant une réalisation de la conjugaison $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sur V sa restriction $(\Phi_{|\mathfrak{T}_{\zeta,1}}, \widetilde{\Phi}_{|\widetilde{\mathfrak{T}}^*_{\zeta,1}}, h)$ est une réalisation de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sur $\mathfrak{T}_{\zeta,1}$. Nous avons donc le diagramme commutatif

$$(40)\qquad (\star)_{\widetilde{\Phi}_{|\widetilde{\mathfrak{T}}^*_{\zeta,1}}} \qquad \begin{array}{ccc} (\widetilde{\mathfrak{T}}^*_{\zeta,1},\infty) & \overset{\widetilde{\Phi}_{|\mathfrak{T}_{\zeta,1}}}{\longrightarrow} & (\widetilde{\mathfrak{T}}'^{\star}_{\zeta,1},\infty) \\ \tau\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow\tau \\ \widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}}_{\infty} & \overset{h}{\longrightarrow} & \widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}'}_{\infty} \end{array}$$

τ et τ' désignant les pro-germes canoniques. D'autre part, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ étant de type généraux, ils satisfont la condition (TG)(iii) et leurs singularités aux points s et s' ne sont pas de type nœud. Classiquement, on a :

Sous-Lemme 7.5.2. *Il existe des voisinages ouverts U de $\mathcal{D}_S\cap K$ dans K et U' de $\mathcal{D}_{S'}\cap K'$ dans K' et des rétractions par déformation $R : U^*\to U\cap\mathfrak{T}^*_{1,1}$ et $R' : U'^{\star}\to U'\cap\mathfrak{T}'^{\star}_{1,1}$ telles qu'en notant $U_\lambda := (\mathcal{D}_S\cap K)\cup R^{-1}(\mathfrak{T}^*_{1,\lambda}))$ et $U'_\lambda := (\mathcal{D}_{S'}\cap K')\cup R'^{-1}(\mathfrak{T}'^{\star}_{1,\lambda}))$, on ait :*

(1) la famille $(U_\lambda)_{0<\lambda\ll 1}$, resp. $(U'_\lambda)_{0<\lambda\ll 1}$, forme un système fondamental de voisinages de $\mathcal{D}_S\cap K$ dans K, resp. de $\mathcal{D}_{S'}\cap K'$ dans K' ;

(2) tout point p de U_λ, resp. U'_λ est dans la même feuille de $\underline{\mathcal{F}}_{|U^*_\lambda}$, resp. $\underline{\mathcal{F}}'_{|U'^{\star}_\lambda}$, que $R(p)$, resp. $R'(p)$.

Les (uniques) relevés de ces rétractions définissent, grâce aux propriétés (1) et (2) ci-dessus, des germes à l'infini R_∞ et R'_∞ qui font visiblement commuter les diagrammes

$$\begin{tikzcd} (\widetilde{V}^*,\infty) \arrow[rr, "R_\infty"] \arrow[dr, "\tau_{\widetilde{V}^*}"'] & & (\widetilde{\mathfrak{T}}^*,\infty) \arrow[dl, "\tau_{\widetilde{\mathfrak{T}}^*}"] \\ & \widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}}_{\infty} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\widetilde{V}'^{\star},\infty) \arrow[rr, "R'_\infty"] \arrow[dr, "\tau_{\widetilde{V}'^{\star}}"'] & & (\widetilde{\mathfrak{T}}'^{\star},\infty) \arrow[dl, "\tau_{\widetilde{\mathfrak{T}}'^{\star}}"] \\ & \widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}'}_{\infty} & \end{tikzcd}$$

ainsi que

$$(41)\qquad \begin{array}{ccc} (\widetilde{V}^*,\infty) & \overset{\widetilde{\Phi}_\infty}{\longrightarrow} & (\widetilde{V}'^{\star},\infty) \\ R_\infty\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow R'_\infty \\ (\widetilde{\mathfrak{T}}^*,\infty) & \overset{\widetilde{\Phi}_{|\widetilde{\mathfrak{T}}^*\infty}}{\longrightarrow} & (\widetilde{\mathfrak{T}}'^{\star},\infty) \end{array}\ .$$

La commutativité de $(\star)_{\widetilde{\Phi}}$ découle directement de la commutativité de ces trois diagrammes et de celle de (40) :

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{V}^*,\infty) \arrow[rr, "\widetilde{\Phi}_\infty"] \arrow[drr, "R_\infty"] \arrow[ddr, "\tau_{\widetilde{V}'^\star}"'] & & (\widetilde{V}'^\star,\infty) \arrow[drr, "R'_\infty"] \arrow[ddr, "\tau_{\widetilde{V}'^\star}"] & & \\
 & & (\widetilde{\mathfrak{T}}^*,\infty) \arrow[rr, "\widetilde{\Phi}_{|\widetilde{\mathfrak{T}}^*\infty}"] \arrow[dl, "\tau_{\widetilde{\mathfrak{T}}^*}"] & & (\widetilde{\mathfrak{T}}'^\star,\infty) \arrow[dl, "\tau_{\widetilde{\mathfrak{T}}'^\star}"] \\
 & \widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}}_\infty \arrow[rr, "h"] & & \widetilde{\mathcal{Q}}^{\mathcal{F}'}_\infty &
\end{tikzcd}$$

-Étape 5 : modification de Φ et de $\widetilde{\Phi}$ pour satisfaire (e). A priori l'homéomorphisme $\widetilde{\Phi}$ que nous avons construit peut ne pas satisfaire (e). Cependant il induit sur $\pi_0(\widetilde{\mathbb{T}}^*_{1,1},\infty)$ la même application que $\widetilde{g}$,

$$\widetilde{\Phi}_\diamond = \widetilde{g}_\diamond : \pi_0(\widetilde{\mathbb{T}}^*_{1,1},\infty) \longrightarrow \pi_0(\widetilde{\mathbb{T}}'^\star_{1,1},\infty)\,. \tag{42}$$

En effet $\widetilde{\Phi}$ et $\widetilde{g}$ induisent les mêmes applications de $\pi_0(\widetilde{\mathfrak{T}}^*_{1,1},\infty)$ sur $\pi_0(\widetilde{\mathfrak{T}}'^*_{1,1},\infty)$, car $\widetilde{\Phi}_{D^\circ}$ satisfait (e) ; l'égalité (42) se déduit alors des bijections (39) et des bijection similaires

$$\pi_0(\widetilde{\mathbb{T}}^*_{1,1},\infty)\xrightarrow{\sim}\pi_0(\widetilde{V}^*,\infty) \quad \text{et} \quad \pi_0(\widetilde{\mathbb{T}}'^\star_{1,1},\infty)\xrightarrow{\sim}\pi_0(\widetilde{V}^\star,\infty)\,. \tag{43}$$

Nous allons composer à gauche Φ par le germe à l'infini $\widetilde{\Theta}_\infty$ d'un relevé d'un "twist de Dehn Θ le long des feuilles de $\underline{\mathcal{F}}'$" à support un petit voisinage de $\mathbb{T}'_{1,1}$:

$$\begin{array}{ccc}
(\widetilde{V}'^\star,\infty) & \xrightarrow{\widetilde{\Theta}_\infty} & (\widetilde{V}'^\star,\infty) \\
\underline{q}'_\infty \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \underline{q}'_\infty \\
(V',\mathcal{D}_S) & \xrightarrow{\Theta_S} & (V',\mathcal{D}_S)
\end{array}\;.$$

Nous prouverons ensuite que $\widetilde{\Theta}_\infty \circ \widetilde{\Phi}$ satisfait (e) ainsi que (a)-(d), déjà vérifiés par $\widetilde{\Phi}$.

A) Construction de Θ et $\widetilde{\Theta}$. Désignons toujours par $\breve{D}'$ la composante de $\mathcal{D}_{S'}$, d'équation locale $x_{s'}=0$. Sur le disque $\breve{D}'\cap\mathcal{W}'_{s'}$, considérons le champ de vecteur réel δ, de flot $(t,y_{s'})\mapsto e^{2i\pi t}y_{s'}$, fixons une fonction différentiable u à support dans une couronne $\{x_{s'}=0, \varsigma\leq |y_{s'}|\leq 1\}$, $0<\varsigma<1$ et égale 1 sur le cercle $C' := \breve{D}'\cap\{|y_{s'}|=1\}$ et désignons par Y le champ de vecteurs sur V' tangent à $\underline{\mathcal{F}}'$, se projetant sur $u\vartheta$ par $\pi_{\breve{D}'}$. Pour des temps t variant dans un intervalle $I\subset\mathbb{R}$ fixé, le flot Υ_t de Y est défini sur un même voisinage ouvert U_I de $\breve{D}$ dans $\mathcal{W}_{s'}$; il se relève en une unique application $\widetilde{\Upsilon}_t : \widetilde{U}^*_I \to \widetilde{V}'^*$ qui vaut l'identité pour $|y_{s'}\circ \underline{q}'|\leq\varsigma$, définissant donc un germe à l'infini $\widetilde{\Upsilon}_{t\infty} : (\widetilde{V}'^\star,\infty)\to(\widetilde{V}'^\star,\infty)$. Visiblement le germe $\widetilde{\Upsilon}_{n\infty}$ fibre au dessus de C', i.e. $\pi_{D'}\circ\underline{q}'\circ\widetilde{\Upsilon}_{n\infty|\widetilde{\mathbb{T}}'^\star} = \pi_{D'}\circ\underline{q}'_{\infty|\widetilde{\mathbb{T}}'^\star}$, pour $n\in\mathbb{Z}$. Il défini un automorphisme $\widetilde{\Upsilon}_{n\bullet} : \Pi'\xrightarrow{\sim}\Pi'$ du revêtement naturel :

$$\rho' : \Pi'\to C'\,,\quad \rho'^{-1}(p) := \pi_0(\widetilde{T}'^\star_p,\infty)\,,\quad T'_p := \pi_{\breve{D}}^{-1}(p)\,.$$

Nous allons poser $\Theta := \Upsilon_{n_0}$ et $\widetilde{\Theta} := \widetilde{\Upsilon}_{n_0}$, l'entier n_0 étant choisi de la manière suivante :

– fixons un point a du cercle $C := \{|x_s| = 1, y_s = 0\} = K \cap D^\circ$ et un élément ν de $\pi_0(\widetilde{T}_a^\star, \infty)$, $T_a := \pi_D^{-1}(a)$; considérons le revêtement naturel $\rho : \Pi \to C$ de C de fibres $\rho^{-1}(p) := \pi_0(\widetilde{T}_p^*, \infty)$ et les automorphismes de revêtement au dessus de G :

$$(\blacklozenge)_\Lambda \qquad \begin{array}{ccc} \Pi & \xrightarrow{\Lambda} & \Pi' \\ \rho \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \rho' \\ C & \xrightarrow{G_{|C}} & C' \end{array}, \qquad \Lambda = \widetilde{\Phi}_\bullet \quad \text{ou} \quad \Lambda = \widetilde{g}_\bullet \,,$$

définis par $\widetilde{\Phi}$ et $\widetilde{g}$; d'après l'égalité (42) et les bijections (39) et (43), les images $\sigma' := \widetilde{\Phi}_\bullet(\nu)$ et $\sigma'' := \widetilde{g}_\bullet(\nu)$ appartiennent à la même fibre de l'application $\iota_\bullet : \pi_0(\widetilde{T}'^{\star}_{a'}, \infty) \to \pi_0(\widetilde{\mathbb{T}}'^{\star}_{1,1}, \infty)$, induite par l'application d'inclusion $\iota : \widetilde{T}'^{\star}_{a'} \hookrightarrow \widetilde{\mathbb{T}}'^{\star}_{1,1}$; d'autre part l'action suivante de $\mathbb{Z}$ sur la fibre de ρ' au point $a' := \Phi(a) = G(a) \in C'$:

$$\mathbb{Z} \times \pi_0(\widetilde{T}'^{\star}_{a'}, \infty) \longrightarrow \pi_0(\widetilde{T}'^{\star}_{a'}, \infty) \qquad (n, \sigma) \mapsto \widetilde{\Upsilon}_{n\bullet}(\sigma)\,,$$

coïncide avec l'action de $\pi_1(C', a') \simeq \mathbb{Z}$ sur cette fibre, induite par le revêtement ρ' ; les orbites de celle-ci correspondent aux fibres de $\iota_\bullet$. Nous prenons pour n_0 l'unique entier tel que $\Upsilon_{n_0\bullet}(\sigma') = \sigma''$.

B) Preuve de (a)-(e) *pour* $\widetilde{\Theta} \circ \widetilde{\Phi}_\infty$. Les propriétés (a)-(c) sont trivialement satisfaites ; la propriété (d) résulte de la proposition (2.7.4). Il reste à prouver (e), c'est à dire à montrer les égalités

$$(\lozenge)_t \quad (\Theta \circ \widetilde{\Phi}_{\widetilde{T}_t^*})_\bullet = \widetilde{g}_{\widetilde{T}_t^*\bullet} : \pi_0(\widetilde{T}_t^*, \infty) \longrightarrow \pi_0(\widetilde{T}'^{\star}_{G(t)}, \infty)\,,$$

pour tout $t \in C$ et pour tout $t \in C'$. Dans le premier cas, Θ vaut l'identité sur T_t au dessus de C et Φ coïncide par construction avec l'homéomorphisme Φ_{D° donné par le lemme dans l'éventualité $K = K_D$; or nous avons déjà prouvé que ce dernier satisfait (e). Considérons donc le cas $t \in C'$. Trivialement $(\lozenge)_t$ équivaut à l'égalité $(\widetilde{\Theta} \circ \widetilde{\Phi})_\bullet = \widetilde{g}_\bullet$ des morphismes de revêtements $(\blacklozenge)_{(\Theta\circ\widetilde{\Phi})_\bullet}$ et $(\blacklozenge)_{\widetilde{g}_\bullet}$, définis en posant $\Lambda = \Theta \circ \widetilde{\Phi}_\infty$ et $\Lambda = \widetilde{g}_\infty$. Il suffit donc de montrer l'égalité sur une fibre, c'est à dire $(\lozenge)_a$. Celle-ci est vérifiée sur l'élément σ de $\pi_0(\widetilde{T}_t^*, \infty)$ précédemment fixé : $(\widetilde{\Theta} \circ \widetilde{\Phi})_\bullet(\sigma) = \widetilde{g}_\bullet(\sigma)$. Comme Γ_∞ agit transitivement sur $\pi_0(\widetilde{T}_t^*, \infty)$, on est ramené à vérifier l'égalité $(\widetilde{\Theta} \circ \widetilde{\Phi})_\bullet(\varphi_\bullet(\sigma)) = \widetilde{g}_\bullet(\varphi_\bullet(\sigma))$, pour tout $\varphi \in \Gamma_\infty$; celle-ci résulte directement de la commutation de $(\star\star)_{\widetilde{\Theta}\circ\widetilde{\Phi}_{|\widetilde{T}_a^*}}$:

$$(44) \qquad \begin{aligned} (\widetilde{\Theta} \circ \widetilde{\Phi})_\bullet(\varphi_\bullet(\sigma)) &= [(\widetilde{\Theta} \circ \widetilde{\Phi})_*(\varphi)]_\bullet((\widetilde{\Theta} \circ \widetilde{\Phi})_\bullet(\sigma)) = (\widetilde{g}_*(\varphi))_\bullet(\widetilde{g}_\bullet(\sigma)) \\ &= (\widetilde{g}_*(\varphi) \circ \widetilde{g})_\bullet(\sigma) = (\widetilde{g} \circ \varphi)_\bullet(\sigma) = \widetilde{g}_\bullet(\varphi_\bullet(\sigma))\,. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du lemme (7.3.2).

Preuve du sous-lemme (7.5.2). Lorsque la singularité de $\underline{\mathcal{F}}$ en s est résonante non-linéarisable, la construction des rétractions se déduit facilement des constructions effectuées dans la partie (4.2) de [9]. Si la singularité est linéarisable, elle satisfait la condition (TG)(iii) et on peut fixer les coordonnées (x_s, y_s) de telle sorte que le feuilletage peut être défini sur K par un champ de vecteurs holomorphe qui s'écrit : $x_s \frac{\partial}{\partial x_s} + \lambda y_s \frac{\partial}{\partial y_s}$, avec $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, vérifiant que si $\lambda_2 = 0$ alors $\lambda_1 < 0$. Prenons $U = K$ si $\lambda_2 \neq 0$ et $U = K \cap \{|y_s||x_s|^{-\lambda_1} \leq 1\}$ si $\lambda_2 = 0$, et considérons la rétraction par déformation $R_t : U^* \to U \cap \mathfrak{T}^*_{1,1}$ donnée par

$$R_t(x_s, y_s) = \left(\frac{x_s}{|x_s|^t} e^{i\alpha(x_s,y_s,t)}, \frac{y_s e^{-\lambda_2 \alpha(x_s,y_s,t)}}{|x_s|^{\lambda_1 t}} e^{i(\lambda_1 \alpha(x_s,y_s,t) - t\lambda_2 \log|x_s|)} \right)$$

où $\alpha(x_s, y_s, t) = \frac{1}{\lambda_2} \log(|y_s||x_s|^{-\lambda_1 t})$ si $\lambda_2 \neq 0$ et $\alpha(x_s, y_s, t) = 0$ si $\lambda_2 = 0$. $\square$

7.6. **Fin de la démonstration du théorème (4.0.3) : initiation de l'induction.** Plaçons nous sous les hypothèses et les notations du théorème (4.0.3) et désignons par $\mathcal{S}_1$, resp. $\mathcal{S}'_1$, le transformé strict de la composante S_1 de S, resp. S'_1 de S', contenant m, resp. m' et notons s, resp s', leurs points d'attache sur les diviseurs exceptionnels. Grâce à la propriété énoncée en (2.7.4) d'invariance par $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{F}'$-isotopies, nous supposons que Σ, resp. Σ', est contenu dans l'image $E_S(T_0)$, resp. $E_{S'}(T'_0)$, d'une fibre de Hopf T_0, resp. T'_0, contenue dans l'intersection des pièces élémentaires $K_s \cap K_{\mathcal{S}_1}$, resp. $K_{s'} \cap K_{\mathcal{S}'_1}$. De même, quitte à composer la représentation $(g, \widetilde{g}, h)$ de la conjugaison $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ par homéomorphismes S ou S'-isotopes à l'identité, cf. (2.5.3), nous supposons l'égalité des germes $(g(\Sigma), m) = (\Sigma', m')$. Enfin nous ordonnons les coordonnées locales x_s, y_s sur $\mathcal{W}_s$, resp. $x_{s'}$, $y_{s'}$ sur $\mathcal{W}'_{s'}$, pour que $y_s = 0$, resp. $y_{s'} = 0$, soit une équation locale de $\mathcal{S}_1$, resp. $\mathcal{S}'_1$. Nous notons ici :

$$\mathbb{T} := E_S(\{|x_s| = 1, y_s = 0\}) \quad \text{et} \quad \mathbb{T}' := E_{S'}(\{|x_{s'}| = 1, y_{s'} = 0\}) \,.$$

Pour démarrer l'induction décrite en (7.1), nous allons construire une représentation $(g_1, \widetilde{g}_1, h)$ de la conjugaison $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, qui satisfait la condition topologique $(\bullet)$ du lemme d'extension (7.3.2) dans le contexte $D = \mathcal{S}_1$, $T = T_0$ et $(\phi, \widetilde{\phi}, h) = (\psi, \widetilde{\psi}, h)$. Celle-ci s'écrit de manière équivalente :

$$(\bullet)_{\widetilde{g}_1, \widetilde{\psi}} \qquad \widetilde{\psi}_\bullet \equiv \widetilde{g}_{1\bullet} : \pi_0(\widetilde{\Sigma}^*, \infty) \longrightarrow \pi_0(\widetilde{\Sigma}'^\star, \infty) \,, \qquad .$$

Un calcul similaire à (44) et les mêmes arguments que ceux utilisé dans cette partie, montrent que $\widetilde{\psi}_\bullet \equiv \widetilde{g}_{1\bullet}$, dès que l'égalité $\widetilde{\psi}_\bullet(\sigma) = \widetilde{g}_{1\bullet}(\sigma)$ est réalisée pour un élément particulier de $\pi_0(\widetilde{\Sigma}^*, \infty)$. Fixons $\sigma_0 \in \pi_0(\widetilde{\Sigma}^*, \infty)$. D'après le lemme (7.6.1) ci-dessous, $\widetilde{g}_\bullet(\sigma_0)$ et $\psi_\bullet(\sigma_0)$ appartiennent à la même fibre de l'application $\iota_\bullet : \pi_0(\widetilde{\Sigma}'^*, \infty) \to \pi_0(\widetilde{\mathbb{T}}'^\star, \infty)$ induite par l'application d'inclusion $\iota : \widetilde{\Sigma}'^\star \hookrightarrow \widetilde{\mathbb{T}}'^\star$. Or en utilisant l'image directe $E_{S'*}Y$ du champ de vecteurs Y construit à la partie A de l'étape 5 précédente, il est aisé d'obtenir un homéomorphisme S'-isotope à l'identité $\xi : \mathbb{B}' \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}'$, dont le relevé $\widetilde{\xi}$ vérifie : $\widetilde{\xi}_\bullet(\widetilde{g}_\bullet(\sigma_0)) = \psi_\bullet(\sigma_0)$. Il suffit de poser $g_1 = \xi \circ g$ et $\widetilde{g}_1 := \widetilde{\xi} \circ \widetilde{g}$, pour achever la démonstration.

Lemme 7.6.1. *Sous ces hypothèses, on a l'égalité des applications suivantes induites par $\widetilde{g}$ et $\widetilde{\psi}$:*

$$\widetilde{g}_\Diamond = \widetilde{\psi}_\Diamond : \pi_0(\widetilde{\mathbb{T}}^*, \infty) \longrightarrow \pi_0(\widetilde{\mathbb{T}}'^\star, \infty) \,.$$

Preuve du lemme (7.6.1). Adoptons les notations suivantes, avec $\Gamma = \Gamma_\infty$, resp. $\Gamma = \Gamma'_\infty$. Pour $\varphi \in \Gamma$, $\varphi_\Diamond$ est l'automorphisme induit sur $\pi_0(\widetilde{\mathbb{T}}^*, \infty)$

resp. $\pi_0(\widetilde{\mathbb{T}}'^{\star},\infty)$. Pour un sous-ensemble A de $\pi_0(\widetilde{\mathbb{T}}^{*},\infty)$, resp. $\pi_0(\widetilde{\mathbb{T}}'^{\star},\infty)$, on pose :

$$\Gamma(A) := \{\varphi\in\Gamma \mid \varphi_{\Diamond}(A)=A\}\,.$$

Enfin pour $G\subset\Gamma$, nous notons : $\pi(G)$ le sous ensemble des éléments σ de $\pi_0(\widetilde{\mathbb{T}}^{*},\infty)$, resp. $\pi_0(\widetilde{\mathbb{T}}'^{\star},\infty)$, tels que $\varphi(\sigma)=\sigma$ pour tout $\varphi\in G$. Si l'on se donne un relèvement $\widetilde{h}:(\widetilde{\mathbb{B}}^{*},\infty)\to(\widetilde{\mathbb{B}}'^{\star},\infty)$ d'un germe d'homéomorphisme $h:(\mathbb{B},S)\to(\mathbb{B}',S')$, tel que $h(\mathbb{T},S)=(\mathbb{T}',S')$ et si l'on note $\widetilde{h}_{\Diamond}:\pi_0(\widetilde{\mathbb{T}}^{*},\infty)\to\pi_0(\widetilde{\mathbb{T}}'^{\star},\infty)$ et $\widetilde{h}_{*}:\Gamma_\infty\to\Gamma'_\infty$, les applications induites, nous avons visiblement les relations suivantes, pour $A\subset\pi_0(\widetilde{\mathbb{T}}^{*},\infty)$ et $G\subset\Gamma_\infty$:

$$\widetilde{h}_{*}(\Gamma_\infty(A))=\Gamma'_\infty(\widetilde{h}_{\Diamond}(A))\,,\quad \widetilde{h}_{\Diamond}(\pi(G))=\Gamma'_\infty(h_{*}(G))\,. \tag{45}$$

Nous allons conclure grâce à ces relations et au sous-lemme suivant :

Sous-Lemme 7.6.2. *Pour un singleton* $\{\sigma_0\}\subset\pi_0(\widetilde{\mathbb{T}}'^{\star})$*, on a :*

$$\pi(\Gamma'_\infty(\{\sigma_0\}))=\{\sigma_0\}\,.$$

En effet, en utilisant cette identité, les relations (45) et la commutation du diagramme $(\star\star)_{\widetilde{\psi}}$ de la définition (2.7.1), il vient :

$$\{\widetilde{\psi}_{\Diamond}(\sigma_0)\}=\pi(\Gamma'_\infty(\widetilde{\psi}_{\Diamond}(\{\sigma_0\})))=\pi(\widetilde{\psi}_{*}(\Gamma_\infty(\{\sigma_0\})))=$$
$$\pi(\widetilde{g}_{*}(\Gamma_\infty(\{\sigma_0\})))=\pi(\Gamma'_\infty(\widetilde{g}_{\Diamond}(\{\sigma_0\})))=\{\widetilde{g}_{\Diamond}(\sigma_0)\}\,.$$

Ce qui achève la démonstration du lemme (7.6.1). □

Preuve du sous-lemme (7.6.2). Trivialement on l'équivalence élément

$$\sigma\in\pi(\Gamma'_\infty(\{\sigma_0\}))\Leftrightarrow\Big(\Gamma'_\infty(\{\sigma_0\})\subset\Gamma'_\infty(\{\sigma\})\Big)\,. \tag{46}$$

Comme Γ'_∞ agit transitivement sur $\pi_0(\widetilde{\mathbb{T}}'^{\star},\infty)$, nous pouvons poser $\sigma=\varphi_{\Diamond}(\sigma_0)$ et, grâce à (45), $\Gamma'_\infty(\{\sigma\})=\varphi(\Gamma'_\infty(\{\sigma_0\}))=\varphi_{*}\circ\Gamma'_\infty(\{\sigma_0\})\circ\varphi^{-1}$. L'équivalence (46) devient :

$$\varphi_{\Diamond}(\sigma_0)\in\pi(\Gamma'_\infty(\{\sigma_0\}))\Leftrightarrow\varphi\in N(\Gamma'_\infty(\{\sigma_0\}))\,,$$

où, pour un sous-groupe G de Γ'_∞, $N(G)$ désigne le normalisateur de G dans Γ'_∞. Pour prouver le sous-lemme, il suffit donc de montrer l'égalité $N(\Gamma'_\infty(\{\sigma_0\}))=\Gamma'_\infty(\{\sigma_0\})$.

Pour cela, fixons un point $\widetilde{p}_0$ dans la composante connexe de $\widetilde{\mathbb{T}}'^{\star}$ correspondant à σ_0 et identifions Γ'_∞ à $\pi_1(\mathbb{B}'^{\star},p_0)$, $p_0:=q'(\widetilde{p}_0)$, via l'isomorphisme $\chi:\varphi\mapsto q'\circ\dot{\gamma}_\varphi$, $\varphi\in\Gamma'_\infty$, où γ_φ, désigne un chemin tracé dans $\widetilde{\mathbb{B}}'^{\star}$, d'origine $\widetilde{p}_0$ et d'extrémité $\varphi(\widetilde{p}_0)$. D'après (5.1.1), $\mathbb{T}'^{\star}$ est incompressible dans $\mathbb{B}'^{\star}$ et son groupe fondamental peut être considéré comme un sous-groupe de celui de $\mathbb{B}'^{\star}$; visiblement $\chi(\Gamma'_\infty(\{\sigma_0\}))=\pi_1(\widetilde{\mathbb{T}}'^{\star},p_0)$. La proposition (5.1.3) permet de conclure. □

Références

[1] C. Camacho et P. Sad, *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*, Annals of mathematics, t. 115, pages 579 à 595, (1982)

[2] C. Camacho, A. Lins Neto et P. Sad, *Topological invariants and equidesingularisation for holomorphic vector fields*, Journal of Differential Geometry, t. 20, pages 143 à 174, (1984)

[3] D. Cerveau et P. Sad, *Problèmes de modules pour les formes différentielles singulières dans le plan complexe*, Commentarii Mathematici Helvetici, t. 61 (2), pages 222 à 253, (1986)

[4] R. Douday et A. Douady, *Algèbre et théories galoisiennes*, Nouvelle Bibliothèque Mathématique, 4., Ed. Cassini, deuxième édition, ISBN 2-84225-005-2, (2005)

[5] L. Le Floch, *Rigidité générique des feuilletages singuliers*, Ann. Sci. de l'École Normale Supérieure, t. 31, pages 765 à 785, (1998)

[6] F. Loray, *Pseudo-groupe d'une singularité de feuilletage holomorphe en dimension deux*, http ://name.math.univ-rennes1.fr/frank.loray, (2005)

[7] W. Magnus, A. Karrass et D. Solitar, *Combinatorial Group Theory*, Dover Books On Advances mathematics, New York, (2004)

[8] D. Marín, *Moduli spaces of germs of holomorphic foliations in the plane*, Commentarii Mathematici Helvetici, t. 78, pages 518 à 539, (2003)

[9] D. Marín et J.-F. Mattei, *Incompressibilité des feuilles de germes de feuilletages holomorphes singuliers*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, t. 41, 4ème série, 6, pages 855 à 903, (décembre 2008)

[10] D. Marín et J.-F. Mattei, *Marquage de germes de courbes planes singulières*, Prepublicacions de la Univesitat Autónoma de Barcelona ; arXiv :/math.DS/0020493, (2010)

[11] J.-F. Mattei et R. Moussu, *Holonomie et intégrales premières*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, t. 4ème série, t. 13, pages 469 à 523, (1980)

[12] J. Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Ann. of Math. studies, vol. 61 , Princeton University Press, (1968)

[13] J. Rebelo, *On transverse rigidity for singular foliations in* $(\mathbb{C}^2, 0)$, à paraître dans Ergodic Theory and Dynamical Systems, (2010)

[14] M. Seguy, *Cobordisme et reliabilité équisingulière de singularités marquées de feuilletages holomorphes en dimension deux*, thèse Université Paul Sabatier Toulouse 3, (2003)

[15] A. Seidenberg, *Reduction of Singularities of the differentiable equation* $AdY = BdX$, American Journal of Mathematics, t. 90, pages 248 à 269, (1968)

[16] C.T.C. Wall, *Singular Points of Plane Curves*, London Mathematical Society Student Texts 63, (2004)

[17] J.-C. Yoccoz, *Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques*, Astérisque, t. 231, pages 3 à 88, (1995)

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, E-08193 Bellaterra (Barcelona), Spain

E-mail address: davidmp@mat.uab.es

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118, Route de Narbonne, F-31062 Toulouse Cedex 9, France

E-mail address: jean-francois.mattei@math.univ-toulouse.fr