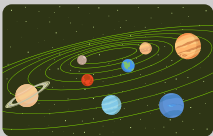


Funcions periòdiques i Fourier

Observacions que es repeteixen

Al món hi ha observacions que es repeteixen en el temps (planetes, mareas, ...)



f periòdica amb període $T \neq 0$:

$$f(t + T) = f(t), \forall t.$$

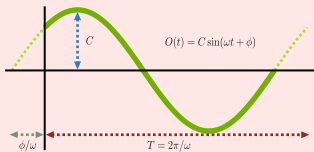
Els períodes són els múltiples enters d'un **període fonamental** positiu τ , $T = k\tau, k \in \mathbb{Z}$.

Ona elemental

$$O(t) = C \sin(\omega t + \phi) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

Períodes $T = 2\pi k / \omega, k \in \mathbb{Z}$.

ω = freqüència, C = amplitud, ϕ = fase inicial.



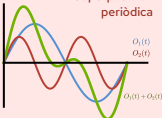
Superposició

Suma d'ones $f(t) = O_1(t) + \dots + O_N(t)$.

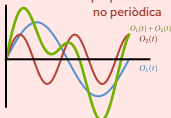
És periòdica de període T només si cada terme ho és:

$$f(t) = \sum_{j=1}^N A_j \cos \left(k_j \frac{2\pi}{T} t \right) + B_j \sin \left(k_j \frac{2\pi}{T} t \right)$$

Superposició periòdica



Superposició no periòdica



Joseph Fourier (1768 — 1830)



Tota funció periòdica f de període T és superposició infinita d'ones elementals.

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k \frac{2\pi}{T} t + B_k \sin k \frac{2\pi}{T} t.$$

Totes les funcions

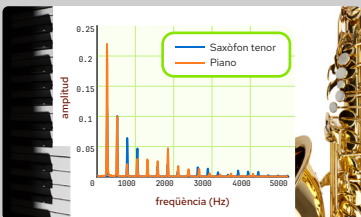
Vàlid per a totes les funcions utilitzant **totes** les freqüències:

$$f(t) = \int_0^{+\infty} (A(\xi) \cos \xi t + B(\xi) \sin \xi t) dt.$$

Espectre de f

Freqüències presents ($A_k^2 + B_k^2 \neq 0$)

En els senyals musicals, les notes que els componen



Espectres superposats d'un **Do** central en un saxo tenor i en un piano.



Càlcul de coeficients

Mitjans físics

(espectrogrames òptics, magnètics, ...)

$$A_k - iB_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik \frac{2\pi}{T} t} dt$$

Mostratge de f

$$x[j] = f\left(\frac{j}{T}\right), \quad j = 1, \dots, N$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik \frac{2\pi}{T} t} dt \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x[j] e^{-i \frac{2\pi}{k} j}$$

Transformada discreta (DFT)

Per un senyal finit $\{x[j]\}_{j=1}^N$

$$\hat{x}[k] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x[j] e^{-i \frac{2\pi}{k} j}$$

Transformada inversa (IDFT)

$$x[j] = \sum_{k=1}^N \hat{x}[k] e^{i \frac{2\pi}{k} j}$$

S'implementen amb l'algoritme

Fast Fourier Transform FFT

Autors

Joaquim Bruna

Eduardo Gallego

Departament de Matemàtiques

Graus de Matemàtiques,
Estadística Aplicada i MatCAD

UAB

Universitat Autònoma de Barcelona