

Quàdriques

Definició: Una superfície quàdrica o quàdrica a $\mathbb{R}^3$ és el conjunt format pels punts (x, y, z) que anul·len un polinomi quadràtic $P(x, y, z)$.

Forma normal

$$P(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

es pot escriure com

$$P(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \text{ amb } M \in M_4(\mathbb{R})$$

El teorema dels eixos principals permet convertir, amb un canvi de coordenades, tota quàdrica en un dels casos següents:

Quàdriques no degenerades

Si $\det(M) \neq 0$

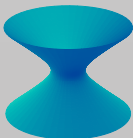


El·lipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Hiperboloide d'un full

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

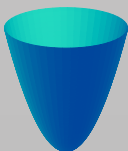


Hiperboloide de dos fulls

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Paraboloide el·líptic

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$



Paraboloide hiperbòlic

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$



Quàdriques degenerades

Si $\det(M) = 0$

Con

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

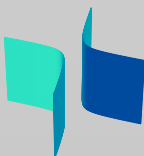


Cilindre el·líptic

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Cilindre hiperbòlic

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Cilindre parabòlic

$$\frac{x^2}{a^2} = y$$

Quàdriques descomponibles

$P(x, y, z)$ descompon en producte de dos polinomis de grau 1:

$$P(x, y, z) = Q(x, y, z)R(x, y, z)$$

Plans
secants



$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

Plans
paral·lels



$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$

Un pla



$$x^2 = 0$$

Els casos restants són rectes (e.g. $x^2 + y^2 = 0$), punts (e.g. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$), i conjunts buits (imaginari, e.g. l'el·lipsoide imaginari

$$x^2 + y^2 + z^2 = -1).$$

Autor

Ramon Antoine

Departament de Matemàtiques

Graus de Matemàtiques,
Estadística Aplicada i MatCAD

UAB

Universitat Autònoma de Barcelona