

MAPPING CLASS GROUP D'UN GERME DE COURBE PLANE SINGULIÈRE

DAVID MARÍN ET JEAN-FRANÇOIS MATTEI

RÉSUMÉ. Nous prouvons que toute conjugaison topologique entre germes de courbes holomorphes singulières du plan complexe est homotope à une conjugaison qui s'étend aux diviseurs exceptionnels des désingularisations minimales de ces courbes. Grâce à ce résultat, nous donnons une présentation explicite d'un sous-groupe d'indice fini du *mapping class group* d'un germe de courbe plane.

TABLE DES MATIÈRES

Vocabulaire	1
1. Introduction	2
2. Conjugaison de germes de courbes marquées	4
2.1. Désingularisations et systèmes locaux	4
2.2. Tubes de Milnor et homéomorphismes excellents	5
2.3. Marquages entre germes de courbes	7
3. Topologie des tubes de Milnor	8
3.1. Groupe fondamental et homologie	8
3.2. Décomposition de JSJ	10
3.3. Structures périphériques et isomorphismes géométriques	13
4. Démonstration du théorème principal	16
4.1. Réduction à la dimension trois	17
4.2. Construction d'un homéomorphisme JSJ-compatible	18
4.3. Conjugaison des arbres duaux des diviseurs	20
4.4. Extension à la dimension quatre	23
5. Groupe d'automorphismes d'un germe de courbe	31
Références	33

VOCABULAIRE

-Si A est un sous-ensemble d'un espace topologique, on désigne par $\overset{\circ}{A}$ son intérieur, $\overline{A}$ son adhérence et on note $\delta A := A \setminus \overset{\circ}{A}$. Si A est une variété à bord, son bord est noté ∂A .

- Pour une courbe analytique X , on note $\text{Sing}(X)$ l'ensemble de ses points singuliers et $\text{Comp}(X)$ la collection de ses composantes irréductibles. Deux composantes irréductibles sont dites *adjacentes* si elles sont distinctes et

Date: 13 avril 2010.

Le premier auteur a été partiellement financé par les projets MTM2007-65122 et MTM2008-02294 du Ministerio de Educación y Ciencia de España / FEDER.

d'intersection non-vide. Le nombre $v(Y)$ de composantes de X adjacentes à $Y \in \text{Comp}(X)$ est appelé *valence de Y* . Nous notons $\text{Comp}_k(X)$ la collection des composantes de X de valence $\geq k$. Une composante connexe de l'adhérence de $X \setminus \bigcup_{Y \in \text{Comp}_3(X)} Y$ est appelée *chaîne (géométrique) de X* , si elle ne contient pas de composante de valence 1 ; elle est appelée *branche morte (géométrique) de X* , sinon.

1. INTRODUCTION

Soient $(S, 0)$ et $(S', 0)$ deux germes de courbes holomorphes singulières contenues dans $(\mathbb{C}^2, 0)$. Une *conjugaison topologique entre $(S, 0)$ et $(S', 0)$* est un germe d'homéomorphisme $h : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tel que $(h(S), 0) = (S', 0)$. Nous dirons que la conjugaison h est *excellente*, si elle se relève aux réductions des singularités de S et de S' , définissant ainsi un homéomorphisme entre des voisinages des diviseurs exceptionnels $\mathcal{E}_S$ et $\mathcal{E}_{S'}$ de ces réductions, qui :

- conjugue topologiquement $\mathcal{E}_S$ à $\mathcal{E}_{S'}$,
- est compatible aux fibrations de Hopf des composantes de $\mathcal{E}_S$ et $\mathcal{E}_{S'}$, en dehors d'un voisinage des singularités du transformé total $\mathcal{D}_S$ de S ,
- est holomorphe au voisinage de chaque point singulier de $\mathcal{D}_S$.

La question naturelle de l'existence de conjugaisons excellentes est résolue par les résultats classiques de O. Zariski et M. Lejeune [22, 9]. Les techniques de plombage introduites par Mumford [14] et développées par Neumann [15, 5, 16] permettent de préciser ce problème et de calculer aisément certains invariants topologiques, dont le *groupe fondamental du complémentaire de S* :

$$(1) \quad \Gamma_S := \pi_1(\mathbb{B}_\varepsilon \setminus S, \cdot), \quad \mathbb{B}_\varepsilon := \{|z_1|^2 + |z_2|^2 \leq \varepsilon\}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

L'objet de ce travail est de décrire les “classes d'homotopies” des conjugaisons topologiques entre deux germes de courbes fixés et de montrer que chaque classe contient une conjugaison excellente.

Plus précisément, nous disons que deux conjugaisons f, g entre $(S, 0)$ et $(S', 0)$ sont *fondamentalement équivalentes* et nous notons $f \asymp g$, si les restrictions de f et g à $\mathbb{B}_\varepsilon \setminus S$ sont homotopes en tant qu'applications à valeurs dans $\mathbb{B}_{\varepsilon'} \setminus S'$, pour $0 < \varepsilon \ll \varepsilon' \ll 1$. Visiblement $\asymp$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des conjugaisons topologiques entre S et S' . Notons que la structure conique du complémentaire $\mathbb{B}_\varepsilon \setminus S$ au dessus de $\partial\mathbb{B}_\varepsilon \setminus S$ et la suite exacte d'homotopie associée à sa structure de fibré au dessus du cercle, montrent que $\mathbb{B}_\varepsilon \setminus S$ est un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\pi, 1)$. La théorie d'homotopie classique implique alors que $f \asymp g$ si et seulement si les actions de f et g sur les groupes fondamentaux de $\mathbb{B}_\varepsilon \setminus S$ et $\mathbb{B}_{\varepsilon'} \setminus S'$ coïncident à automorphisme intérieur près (dû aux choix des points de base).

Nous définissons un *marquage de S' par S* comme une classe d'équivalence d'une conjugaison entre S et S' , pour la relation d'équivalence fondamentale $\asymp$. Le résultat principal de ce travail est le suivant :

Théorème A. *Tout marquage admet un représentant excellent.*

Notre construction est entièrement basée sur les résultats de décomposition des variétés de dimension 3 de Waldhausen [19], Jaco-Shalen [6] et Johansson [7]. Elle ne peut pas se déduire des théorèmes classiques de Zariski-Lejeune [22, 9]; pour s'en convaincre il suffit de considérer l'éventualité $S = S'$, pour laquelle le résultat de Zariski-Lejeune est sans objet, alors que le théorème A induit des résultats non-triviaux sur les automorphismes des germes de courbes.

L'ensemble $\mathcal{G}_S$ de marquages d'un germe de courbe S par lui-même est muni d'une structure de groupe par la composition. C'est l'analogue germifié du *mapping class group* des surfaces de Riemann. La théorie d'homotopie des espaces $K(\pi, 1)$ indique que le groupe $\mathcal{G}_S$ se plonge dans le groupe des automorphismes extérieurs $\text{Out}(\Gamma_S)$ du groupe fondamental Γ_S défini en (1). L'image $\text{Out}_g(\Gamma_S) \subset \text{Out}(\Gamma_S)$ de ce plongement se caractérise par la préservation de certaines données algébriques de Γ_S , qui sont de nature géométrique : la *structure périphérique munie de ses méridiens*, cf. la définition (3.16), le théorème (3.15) et le corollaire (3.19). Le sous-groupe $\mathcal{G}_S^0$ de $\mathcal{G}_S$ constitué des germes d'homéomorphismes fixant chaque composante irréductible de S , est distingué et d'indice fini : il est égal au noyau du morphisme naturel de $\mathcal{G}_S$ dans le groupe le groupe $\mathfrak{S}_S$ des permutations des composantes irréductibles de S . Le théorème précédent nous permet d'explicitier un système de générateurs de $\mathcal{G}_S^0$; désignons par $E_S : \mathcal{B}_S \rightarrow \mathbb{C}^2$ l'application de réduction (minimale) de S , on a :

Théorème B. *Il existe un épimorphisme*

$$\bigoplus_D A(D^\bullet) \oplus \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathbb{Z}_{\mathcal{C}}^2 \rightarrow \mathcal{G}_S^0,$$

où : D décrit l'ensemble des composantes irréductibles de valence $v(D) \geq 3$ du diviseur total $\mathcal{D}_S := E_S^{-1}(S)$, $A(D^\bullet)$ est le groupe d'Artin pur¹ de $D \cong \mathbb{S}^2$ pointé par $\text{Sing}(\mathcal{D}_S) \cap D$, $\mathcal{C}$ décrit la collection $\mathfrak{C}_S$ des chaînes de $\mathcal{D}_S$ et $\mathbb{Z}_{\mathcal{C}}^2 := \mathbb{Z}^2$.

Remarquons que le groupe quotient $\mathcal{G}_S/\mathcal{G}_S^0$ correspond aux “grandes symétries de S ”. Notons aussi que le graphe de la décomposition topologique de JSJ de la 3-variété à bord obtenue en enlevant à la sphère $\mathbb{S}_\varepsilon^3 := \partial \mathbb{B}_\varepsilon$ un voisinage tubulaire de l'entrelacs $S \cap \mathbb{S}_\varepsilon$, est constitué de : $\text{Comp}_3(\mathcal{D}_S)$ comme ensemble de sommets et $\mathfrak{C}_S$ comme ensemble d'arêtes. Ainsi, $\mathcal{G}_S^0$ est un groupe de graphe au sens de [18]. Nous verrons sur un exemple explicite, qu'en général l'épimorphisme ci-dessus n'est pas un isomorphisme.

Le problème résolu par le théorème A nous est apparu de façon naturelle dans l'étude de la classification topologique de germes de feuilletages singuliers. Il joue un rôle clé dans la résolution de la conjecture de Cerveau-Sad [3, 10, 11].

Le plan du travail est le suivant :

¹i.e. le groupe de tresses pures du plan à $v(D) - 1$ brins quotienté par son centre -qui est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

-Au chapitre 2 nous introduisons quelques notions sur la désingularisation minimale d'un germe de courbe singulière, ainsi que sur les tubes de Milnor (de dimension trois et quatre); elles nous permettront de préciser l'énoncé du théorème principal ainsi que la notion clé de marquage.

-Au chapitre 3 nous établissons les propriétés topologiques des tubes de Milnor qui nous seront utiles par la suite. Ce chapitre est divisé en trois sections. Dans la première nous donnons une présentation du groupe fondamental du complémentaire d'une courbe singulière. Dans la deuxième nous précisons la décomposition de Jaco-Shalen-Johannson du tube de Milnor de dimension trois, qui jouera un rôle clé dans la preuve du théorème principal. Enfin, dans la troisième section nous étudions les propriétés algébriques de l'action d'une conjugaison topologique entre germes de courbes, sur quelques éléments remarquables des groupes fondamentaux associés aux composantes de bord.

-Au chapitre 4 nous donnons la preuve du théorème A, structurée en quatre sections : réduction à la dimension trois, construction d'un homéomorphisme entre les 3-tubes de Milnor compatible aux décompositions de JSJ introduites dans la section 3.2, conjugaison des arbres duaux des diviseurs exceptionnels des désingularisations, enfin extension aux 4-tubes de Milnor.

-Finalement, nous étudions au chapitre 5 les propriétés algébriques du groupe $\mathcal{G}_S$ et nous démontrons le théorème B, à l'aide du théorème A déjà établi.

2. CONJUGAISON DE GERMES DE COURBES MARQUÉES

2.1. Désingularisations et systèmes locaux. Dans tout cet article S désigne l'intersection d'une courbe analytique de $\mathbb{C}^2$ avec une boule fermée $\mathbb{B} := \mathbb{B}_{r_0}$ de centre $0 = (0, 0)$ et rayon $r_0 > 0$ fixé. Nous supposons que $\mathbb{B}$ est une *boule de Milnor pour S* , i.e. $0 \in S$ et $S \setminus \{0\}$ est lisse et transverse à toutes les sphères $\partial\mathbb{B}_r$, pour $0 < r \leq r_0$. Soit $E : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{B}$ l'application de réduction (minimale) de S ; nous notons $\mathcal{D} := E^{-1}(S)$ le *diviseur total*, $\mathcal{E} := E^{-1}(0)$ le *diviseur exceptionnel* et $\mathcal{S} := \overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{E}$ la *transformée stricte* de S . Désignons par $\text{Comp}(\mathcal{D})$ l'ensemble de composantes irréductibles de $\mathcal{D}$ et par $\text{Sing}(\mathcal{D})$ l'ensemble des points singuliers de $\mathcal{D}$. Notons encore $S(\mathcal{D}) := \mathcal{D} \cap \text{Sing}(\mathcal{D})$. Deux composantes $D, D' \in \text{Comp}(\mathcal{D})$ sont dites *adjacentes* si $D \neq D'$ et leur intersection $D \cap D' \neq \emptyset$; dans ce cas $D \cap D' = \{s\} \subset \text{Sing}(\mathcal{D})$. Nous considérons aussi une seconde courbe analytique $S' \ni 0$, ainsi qu'une boule de Milnor $\mathbb{B}' := \mathbb{B}_{r'_0}$ pour S' ; $E' : \mathcal{B}' \rightarrow \mathbb{B}'$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{S}'$ désignent respectivement l'application de réduction, le diviseur total, le diviseur exceptionnel et la transformée stricte de S' . Dans tout l'article, nous adoptons les notations suivantes :

$$(2) \quad A^* := (A \setminus S), \quad \mathcal{A}^* := (\mathcal{A} \setminus \mathcal{D}), \quad \text{pour } A \subset \mathbb{B} \text{ et } \mathcal{A} \subset \mathcal{B}.$$

De même, si $A' \subset \mathbb{B}'$ et $\mathcal{A}' \subset \mathcal{B}'$, nous notons $A'^* := (A' \setminus S')$ et $\mathcal{A}'^* := (\mathcal{A}' \setminus \mathcal{D}')$.

Donnons nous pour chaque point singulier $s \in \text{Sing}(\mathcal{D})$, un système de coordonnées locales holomorphes $(x_s, y_s) : \Omega_s \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_1 \times \mathbb{D}_1$ définies sur voisinage

fermé Ω_s de s dans $\mathcal{B}$, à valeurs sur le polydisque fermé $\mathbb{D}_1 \times \mathbb{D}_1$, telles que $\mathcal{D} \cap \Omega_s = \{x_s y_s = 0\}$ et $\Omega_s \cap \Omega_{s'} = \emptyset$, pour $s \neq s'$, avec $\mathbb{D}_\varepsilon := \{|z| \leq \varepsilon\} \subset \mathbb{C}$. Fixons aussi pour chaque composante irréductible $D \in \text{Comp}(\mathcal{D})$, une fibration localement triviale en disques fermés donnée par une submersion différentiable $\rho_D : \Omega_D \rightarrow D$, définie sur un voisinage fermé Ω_D de D dans $\mathcal{B}$. Adoptons les notations suivantes, D et D' désignant encore des composantes irréductibles de $\mathcal{D}$:

$$(3) \quad D_s := D \cap \Omega_s, \quad \text{pour } s \in S(D) := \text{Sing}(\mathcal{D}) \cap D,$$

et :

$$(4) \quad K_D := \left(D \setminus \bigcup_{s \in S(D)} \overset{\circ}{D}_s \right), \quad K_s := D_s \cup D'_s, \quad \text{si } D \cap D' = \{s\}.$$

Nous noterons aussi pour tout $X \subset \mathcal{B}$, tout $K \subset D$ non-réduit à point singulier et tout $s \in \text{Sing}(\mathcal{D})$,

$$(5) \quad X(K) := X \cap \rho_D^{-1}(K) \quad \text{et} \quad X_s := X \cap \Omega_s =: X(K_s).$$

Définition 2.1. *Nous dirons que la collection $\mathcal{L} := ((x_s, y_s), \rho_D)_{s,D}$ est un système local de S sur $\mathcal{B}$, s'il satisfait de plus les propriétés suivantes, pour tout $D \in \text{Comp}(\mathcal{D})$ et $s \in \text{Sing}(\mathcal{D})$:*

- (i) *la restriction de ρ_D à D est l'identité ;*
- (ii) *si $D \subset \mathcal{E}$, alors ρ_D est holomorphe sur $\rho_D^{-1}(K_D)$;*
- (iii) *si $D \subset \mathcal{S}$ et $m \in D \cap \partial \mathcal{B}$, alors $\rho_D^{-1}(m) \subset \partial \mathcal{B}$.*
- (iv) *si $z := x_s$ ou y_s désigne la coordonnée locale non-identiquement nulle sur D , alors $z \circ \rho_D(m) = z(m)$, pour $|z(m)| \leq 1/2$, $m \in \Omega_D \cap \Omega_s$.*

La fibration ρ_D sera appelée ici fibration de Hopf de base à D .

Notons qu'alors ρ_D est holomorphe au voisinage de chaque point singulier de $\mathcal{D}$ et que les composantes locales de $\mathcal{D}$ en ces points, sont des fibres de ces fibrations. Nous laissons au lecteur le soin de voir que, les cartes locales (x_s, y_s) étant données, il existe des fibrations ρ_D telles que $\mathcal{L}$ soit un système local de S sur $\mathcal{B}$.

2.2. Tubes de Milnor et homéomorphismes excellents. Fixons maintenant une équation holomorphe réduite f de S , définie sur un voisinage ouvert de $\mathbb{B}$. Pour tout réel $\eta > 0$, notons :

$$(6) \quad T_\eta := f^{-1}(\mathbb{D}_\eta) \cap \mathbb{B} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_\eta := E^{-1}(T_\eta) \subset \mathcal{B}.$$

Lorsque $\eta > 0$ est assez petit, la restriction de f à T_η^* est une fibration C^∞ -localement triviale au dessus de $\mathbb{D}_\eta \setminus \{0\}$; nous dirons alors que T_η et $\mathcal{T}_\eta$ sont des *4-tubes de Milnor pour S* . Après avoir fixé une équation holomorphe réduite de S' au voisinage de $\mathbb{B}'$, nous définissons de la même manière les 4-tubes de Milnor pour S' et les notons $T'_{\eta'} \subset \mathbb{B}'$, $\mathcal{T}'_{\eta'} \subset \mathcal{B}'$.

Remarque 2.2. Si $T_\eta \subset \mathbb{B}$ est un 4-tube de Milnor et $\mathbb{B}_\varepsilon$ est une boule fermée contenue dans $\overset{\circ}{T}_\eta$, alors les inclusions $\mathbb{B}_\varepsilon^* \subset T_\eta^* \subset \mathbb{B}^*$ induisent des isomorphismes au niveau des groupes fondamentaux.

Le système local $\mathcal{L}$ étant fixé, nous pouvons préciser la topologie des 4-tubes de Milnor. Pour $\eta_0 > 0$ assez petit, on construit classiquement² un champ de vecteurs différentiable $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{T}_{\eta_0}$ s'annulant sur $\mathcal{D}$ qui, pour toute composante D de $\mathcal{D}$, est tangent aux fibres de ρ_D en tout point de $\mathcal{T}_{\eta_0}(K_D)$ et tel que $\mathcal{X} \cdot (f \circ E) = f \circ E$. Ce champ se projette via E en un champ lipchitzien X sur T_{η_0} qui est tangent à S et nul à l'origine. Les flots de ces champs sont définis pour tous les temps négatifs.

Considérons les 3-variétés à bord suivantes, que nous appelons *3-tubes de Milnor*,

$$(7) \quad M_\eta := f^{-1}(\partial \mathbb{D}_\eta) \cap \mathbb{B} \subset \partial T_\eta \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_\eta := E^{-1}(M_\eta) \subset \partial \mathcal{T}_\eta.$$

À l'aide des flots de $\mathcal{X}$ et de X , on construit facilement une rétraction par déformation de $T_{\eta_0}^*$ sur M_{η_0} -et donc aussi une rétraction par déformation de $\mathcal{T}_{\eta_0}^*$ sur $\mathcal{M}_{\eta_0}$. Les propriétés de tangence de ces flots permettent d'être plus précis.

Proposition 2.3. *Il existe un difféomorphisme $\Theta : \mathcal{M}_{\eta_0} \times]0, \eta_0] \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_{\eta_0}^*$ tel que :*

$$\Theta(\mathcal{M}_{\eta_0} \times \{\eta\}) = \mathcal{M}_\eta, \quad \Theta(\partial \mathcal{M}_{\eta_0} \times]0, 1]) = \mathcal{T}_{\eta_0}^* \cap \partial \mathcal{B}', \quad \Theta(m, \eta_0) = m,$$

pour tout $m \in \mathcal{M}_{\eta_0}$ et $0 < \eta \leq \eta_0$. De plus $D \in \text{Comp}(\mathcal{D})$,

$$\Theta(\mathcal{M}_{\eta_0}(K_D) \times]0, \eta_0]) = \mathcal{T}_{\eta_0}^*(K_D),$$

et la restriction de Θ à $\mathcal{M}_{\eta_0}(K_D) \times]0, \eta_0]$, se prolonge en une application différentiable $\Theta_D : \mathcal{M}_{\eta_0}(K_D) \times [0, \eta_0] \rightarrow \mathcal{T}_{\eta_0}(K_D)$ vérifiant :

$$\rho_D \circ \Theta_D(m, s) = \rho_D(m), \quad \Theta_D(m, 0) = \rho_D(m) \in K_D.$$

Ce difféomorphisme se redescend en un difféomorphisme

$$(8) \quad \Theta^\flat : M_{\eta_0} \times]0, \eta_0] \xrightarrow{\sim} T_{\eta_0}^*$$

qui induit une rétraction par déformation de $(T_{\eta_0}^*, T_{\eta_0}^* \cap \partial \mathbb{B})$ sur $(M_{\eta_0}, \partial M_{\eta_0})$. Comme $T_{\eta_0}^*$ est un rétract par déformation de $\mathbb{B}^*$, cf. [13], M_{η_0} est aussi un rétract par déformation de $\mathbb{B}^*$. Ainsi pour η assez petit, les restrictions de ρ_D à $\mathcal{T}_\eta(K_D)$, sont aussi des fibrations en disques.

Remarque 2.4. Les inclusions $\mathbb{B}_\varepsilon^* \subset T_\eta^* \subset \mathbb{B}^*$, lorsqu'elles ont lieu, induisent³ des isomorphismes au niveau du groupe fondamental. Comme, toujours d'après [13], M_η fibre (par f) sur le cercle $\partial \mathbb{D}_\eta$, la suite exacte d'homotopie de cette fibration montre que M_η est un espace de Eilenberg-MacLane $K(\pi, 1)$. Il en est de même de T_η^* et $\mathbb{B}^*$, qui se rétractent sur M_η , ainsi que de $\mathcal{T}_\eta^*$, $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{M}_\eta$ qui leurs sont homéomorphes.

²Par transversalité, un champ $\mathcal{X}_D$ possédant ces propriétés existe sur un voisinage ouvert W_D de chaque K_D ; sur Ω_s , $s \in \text{Sing}(\mathcal{D})$, l'existence de tels champs $\mathcal{X}_s$ résulte de l'homogénéité de la fonction $f \circ E$. Tous ces champs se recollent en utilisant une partition de l'unité formée de fonctions $u_D : W_D \rightarrow \mathbb{R}$ égales à 1 sur $\mathcal{T}_{\eta_0}(K_D)$ et $u_s : \Omega_s \rightarrow \mathbb{R}$ nulles sur $\Omega_s \cap (\cup_D \mathcal{T}_{\eta_0}(K_D))$, cf. [20].

³Cela se voit facilement en utilisant par exemple la structure conique [13] du couple $(\mathbb{B}, S)$.

Le système local $\mathcal{L}$ pour S sur $\mathcal{B}$ étant toujours fixé, considérons aussi un système local pour S' sur $\mathcal{B}'$,

$$\mathcal{L}' := ((x'_{s'}, y'_{s'}) : \Omega'_{s'} \rightarrow \mathbb{D}_1 \times \mathbb{D}_1, \rho'_{D'} : \Omega'_{D'} \rightarrow D')_{s', D'}.$$

Nous conservons pour $\mathcal{L}'$ les notations (3), (4) et (5) utilisées pour $\mathcal{L}$.

Définition 2.5. *Un homéomorphisme $\Phi : T_\eta \rightarrow T'_{\eta'}$ entre deux 4-tubes de Milnor de S et de S' , tel que $\Phi(S) = S'$, sera dit excellent pour $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$, s'il se relève en un homéomorphisme $\phi : T_\eta \rightarrow T'_{\eta'}$, $E' \circ \phi = \Phi \circ E$, satisfaisant les propriétés suivantes :*

- (a) ϕ est holomorphe au voisinage de chaque point singulier de $\mathcal{D}$;
- (b) pour toute composante irréductible D de $\mathcal{D}$, on a l'égalité : $\phi(T_\eta(K_D)) = T'_{\eta'}(K'_{\phi(D)})$; de plus sur ces ensembles ϕ conjugue les fibrations ρ_D et $\rho'_{\phi(D)}$, i.e. $\rho'_D(\phi(m)) = \phi(\rho_D(m))$, $m \in T_\eta(K_D)$.

2.3. Marquages entre germes de courbes. Classiquement la structure conique de $\mathbb{B}^*$, qui sera précisée en (4.1), induit une rétraction par déformation de $\mathbb{B}^*$ sur toute boule fermée plus petite $\mathbb{B}_\varepsilon^* \subset \mathbb{B}^*$. Si $T_\eta \subset \mathbb{B}$ est un 4-tube de Milnor contenant $\mathbb{B}_\varepsilon$, les inclusions $\mathbb{B}_\varepsilon^* \subset T_\eta^* \subset \mathbb{B}^*$ induisent donc des isomorphismes au niveau des groupes fondamentaux. Toute application continue de l'un de ces ensembles vers $\mathbb{B}'^*$ définit ainsi un morphisme du groupe fondamental de $\mathbb{B}^*$ dans celui de $\mathbb{B}'^*$. Plus précisément considérons l'ensemble $\mathfrak{C}(\mathbb{B}^*, \mathbb{B}'^*)$ des applications continues $F : U \rightarrow \mathbb{B}'$, où U est un sous-ensemble connexe par arc de $\mathbb{B}^*$, tel que l'application d'inclusion $i_U : U \hookrightarrow \mathbb{B}^*$ induit un isomorphisme $i_{U*} : \pi_1(U, p) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{B}^*, p)$. Notons alors :

$$\underline{F}_* := F_* \circ (i_U)^{-1} : \pi_1(\mathbb{B}^*, p) \rightarrow \pi_1(\mathbb{B}', F(p)).$$

Définition 2.6. *Nous dirons que deux éléments $F : U \rightarrow \mathbb{B}'^*$ et $G : V \rightarrow \mathbb{B}'^*$ de $\mathfrak{C}(\mathbb{B}^*, \mathbb{B}'^*)$ sont fondamentalement équivalents et nous noterons $F \asymp G$, si pour tout chemin α tracé dans $\mathbb{B}^*$ d'origine un point p de U et d'extrémité un point q de V , il existe un chemin α' tracé dans $\mathbb{B}'^*$ d'origine $F(p)$ et d'extrémité $G(q)$, tel que*

$$(9) \quad \alpha'_* \circ \underline{F}_* = \underline{G}_* \circ \alpha_*,$$

où $\alpha_* : \pi_1(\mathbb{B}^*, p) \rightarrow \pi_1(\mathbb{B}^*, q)$ et $\alpha'_* : \pi_1(\mathbb{B}'^*, F(p)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{B}'^*, G(q))$ sont les isomorphismes induits par α et α' .

On vérifie facilement que $\asymp$ est bien une relation d'équivalence dans $\mathfrak{C}(\mathbb{B}^*, \mathbb{B}'^*)$ et que $F \asymp G$ dès qu'il existe un couple de chemins (α, α') satisfaisant l'égalité (9).

Définition 2.7. *Une classe d'équivalence $\mathfrak{f}$ de $\asymp$ s'appellera marquage de S' par S , s'il existe un voisinage ouvert U de l'origine dans $\mathbb{B}$ et un représentant $\tilde{F} : U^* \rightarrow \mathbb{B}'^*$ de $\mathfrak{f}$, qui se prolonge en un homéomorphisme $F : U \xrightarrow{\sim} F(U) \subset \mathbb{B}'$ vérifiant $F(S \cap U) = S' \cap F(U)$ et préservant les orientations⁴ de U, U' et S, S' en tant que courbes complexes.*

⁴Si $S = S'$ est donnée par une équation réelle alors $F(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$ préserve l'orientation de l'espace ambiante mais renverse l'orientation de S .

Dorénavant tous les homéomorphismes conjuguant deux germes de courbes que nous considérons sont supposés préserver l'orientation de l'espace ambiant et celles des courbes holomorphes.

Visiblement deux homéomorphismes conjuguant S à S' sur des voisinages de l'origine définissent le même marquage (de S' par S) s'ils ont même germe à l'origine. Nous parlerons donc de *germe d'homéomorphisme représentant un marquage*. Comme d'après (2.4), $\mathbb{B}_\varepsilon^*$ est un espace $K(\pi, 1)$, un théorème classique⁵ de topologie algébrique donne la caractérisation suivante.

Proposition 2.8. *Deux germes d'homéomorphismes au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ conjuguant les germes à l'origine de S et de S' , représentent le même marquage si et seulement si pour $\varepsilon > 0$ assez petit, ils induisent des applications de $\mathbb{B}_\varepsilon^*$ dans $\mathbb{B}^*$, qui sont homotopes.*

Cela nous amène à poser la

Question. Est-ce que deux germes d'homéomorphismes $h_0, h_1 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tels que $h_i(S, 0) = (S', 0)$, $i = 0, 1$, définissent le même marquage si et seulement s'il existe un germe d'homéomorphisme $H : (\mathbb{C}^3, I) \rightarrow (\mathbb{C}^3, I)$ le long du compact $I := 0 \times 0 \times [0, 1]$, qui s'écrit $H(x, y, t) = (H_t(x, y), t)$, vérifie $H_0 = h_0$, $H_1 = h_1$ et tel que les germes de $H(S \times [0, 1])$ et de $S' \times [0, 1]$ le long de I , soient égaux ?

Le résultat principal de ce travail est le théorème suivant.

Théorème 2.9. *Soient $\mathcal{L} = ((x_s, y_s), \rho_D)_{s, D}$ et $\mathcal{L}' = ((x'_{s'}, y'_{s'}), \rho'_{D'})_{s', D'}$ deux systèmes locaux de S et S' sur $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement et $h : \mathbb{B}_\varepsilon \xrightarrow{\sim} h(\mathbb{B}_\varepsilon) \subset \mathbb{B}'$ un homéomorphisme tel que $h(S \cap \mathbb{B}_\varepsilon) = S' \cap h(\mathbb{B}_\varepsilon)$. Alors il existe un homéomorphisme $\Phi : T_\eta \xrightarrow{\sim} T'_{\eta'}$, $\Phi(S) = S'$, qui est excellent pour $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$, et tel que les restrictions $h|_{\mathbb{B}_\varepsilon^*}$ et $\Phi|_{T_\eta^*} : T_\eta^* \rightarrow T'_{\eta'}^*$ sont fondamentalement équivalentes.*

En d'autres termes, on obtient le théorème A de l'introduction :

Tout marquage de S' par S peut être représenté par un homéomorphisme excellent entre deux 4-tubes de Milnor.

3. TOPOLOGIE DES TUBES DE MILNOR

Avant de commencer la preuve du théorème 2.9, nous établissons dans cette section les propriétés topologiques des tubes de Milnor que nous utiliserons par la suite.

3.1. Groupe fondamental et homologie. Nous allons expliciter une présentation du groupe fondamental Γ de T_η^* . Pour cela, rappelons que l'arbre dual $\mathbb{A}$ de la désingularisation de S est constitué d'un sommet pour chaque élément $D \in \text{Comp}(\mathcal{D})$ et d'une arête joignant les sommets correspondants à D et D' , pour chaque singularité $s \in \text{Sing}(\mathcal{D})$, point d'intersection de D

⁵Cf. par exemple [21] corollaire (4.4), page 226.

et D' .

Fixons un système local $\mathcal{L}$ pour S ainsi qu'une immersion topologique j d'une réalisation géométrique $|\mathbb{A}|$ de $\mathbb{A}$ dans $\mathcal{T}_\eta^*$, telle que :

- pour chaque $D \in \text{Comp}(\mathcal{D})$, $j^{-1}(\mathcal{T}_\eta^*(K_D))$ contient un seul sommet $\mathbf{s}_D$ de $\mathbb{A}$, qui est celui associé à D et de plus $\rho_D \circ j$ est un plongement sur un voisinage de $\mathbf{s}_D$;
- pour chaque $s \in \text{Sing}(\mathcal{D})$, $j^{-1}(\mathcal{T}_\eta^*(K_s))$ est contenu dans une seule arête, qui est celle associée à s . Nous supposons aussi, ce qui est toujours possible, que le point de coordonnées $(x_s, y_s) = (1, 1)$ appartient à $j(\mathbb{A})$.

Comme $j(\mathbb{A})$ est contractile, on a un isomorphisme canonique entre les groupes $\pi_1(\mathcal{T}_\eta^*, j(\mathbb{A}))$ et Γ qu'on nous n'expliciterons pas.

Définition 3.1. *Pour chaque $D \in \text{Comp}(\mathcal{D})$ considérons l'élément $\mathbf{c}_D \in \Gamma$ représenté par le lacet simple $\rho_D^{-1}(\rho_D(j(\mathbf{s}_D))) \cap \mathcal{M}_\eta$, orienté comme le bord d'une courbe holomorphe de $\mathcal{T}_\eta^*$.*

Remarque 3.2. Soit $s \in \text{Sing}(\mathcal{D})$ le point d'intersection de D et $D' \in \text{Comp}(\mathcal{D})$. Supposons que l'on a : $D \cap \Omega_s = \{x_s = 0\}$ et $D' \cap \Omega_s = \{y_s = 0\}$. Alors $\mathbf{c}_D$ et $\mathbf{c}_{D'}$ sont les classes d'homotopie des lacets $(x_s, y_s) = (e^{2i\pi t}, 1)$ et $(x_s, y_s) = (1, e^{2i\pi t})$ respectivement.

Proposition 3.3. *Le groupe fondamental Γ admet comme système de générateurs $\{\mathbf{c}_D\}_{D \in \text{Comp}(\mathcal{D})}$, avec les relations données par les familles⁶*

$$(10) \quad \prod_{D' \in \text{Comp}(\mathcal{D})} \mathbf{c}_{D'}^{(D', E)} = 1, \quad [\mathbf{c}_D, \mathbf{c}_E]^{(D, E)} = 1$$

d'indices $E \in \text{Comp}(\mathcal{E})$ et $D \in \text{Comp}(\mathcal{D})$.

La preuve de cette proposition se fait en appliquant le théorème classique de Seifert-Van Kampen de façon récurrente, voir par exemple [14, 4, 10].

Nous écrirons les éléments de Γ en notation multiplicative et ses classes dans $\Gamma/[\Gamma, \Gamma] \cong H_1(\mathcal{T}_\eta^*; \mathbb{Z})$ en notation additive, mais en conservant les mêmes noms.

Corollaire 3.4. *Le groupe d'homologie $H_1(\mathcal{T}_\eta^*; \mathbb{Z})$ est un groupe abélien libre de rang $r := \#\text{Comp}(S)$, engendré par les classes $\mathbf{c}_{S_j}$ associés aux composantes irréductibles $S_1, \dots, S_r$ de S . De plus, si l'on note $\{E_1, \dots, E_n\}$ les composantes de $\mathcal{E}$ et respectivement $\mathbf{c}_\mathcal{E}$ et $\mathbf{c}_\mathcal{S}$ les vecteurs transposés de $(\mathbf{c}_{E_1}, \dots, \mathbf{c}_{E_n})$ et de $(\mathbf{c}_{S_1}, \dots, \mathbf{c}_{S_r})$, alors*

$$(11) \quad \mathbf{c}_\mathcal{E} = -(\mathcal{E}, \mathcal{E})^{-1}(\mathcal{E}, \mathcal{S})\mathbf{c}_\mathcal{S},$$

où $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ et $(\mathcal{E}, \mathcal{S})$ désignent les matrices ayant pour coordonnées les nombres d'intersection (E_i, E_j) et (E_i, S_k) respectivement. Enfin la composante (i, k) de la matrice $-(\mathcal{E}, \mathcal{E})^{-1} \cdot (\mathcal{E}, \mathcal{S})$ est égale à l'ordre d'annulation $\nu_{E_i}(f_k \circ E)$ de $f_k \circ E$ sur E_i , où f_k désigne une équation réduite de S_k .

⁶Dans le produit $\prod_{D' \in \text{Comp}(\mathcal{D})} \mathbf{c}_{D'}^{(D', E)}$, l'ordre est celui donné par l'ordre cyclique des arêtes de la projection $\rho_E \circ j(\text{star}(\mathbf{s}_E))$ de l'étoile de $\mathbf{s}_E$, dans la composante E , qui est de dimension réelle deux.

Preuve. Il suffit d'écrire matriciellement les équations

$$(12) \quad 0 = \sum_{D \in \text{Comp}(\mathcal{D})} (E_i, D) \mathbf{c}_D = \sum_{j=1}^n (E_i, E_j) \mathbf{c}_{E_j} + \sum_{k=1}^r (E_i, \mathcal{S}_k) \mathbf{c}_{\mathcal{S}_k}$$

qui se déduisent des relations (10), puis d'exprimer les $\mathbf{c}_{E_i}$ en fonction des $\mathbf{c}_{\mathcal{S}_k}$ grâce au fait bien connu que $\det(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ est égal à ± 1 . Finalement,

$$(13) \quad \begin{aligned} \nu_{E_i}(f_k \circ E) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{c}_{E_i}} E^* \left(\frac{df_k}{f_k} \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\sum_{\ell=1}^r ((\mathcal{E}, \mathcal{E})^{-1}(\mathcal{E}, \mathcal{S}))_{i\ell} E(\mathbf{c}_{\mathcal{S}_\ell})} \frac{df_k}{f_k} \\ &= -((\mathcal{E}, \mathcal{E})^{-1} \cdot (\mathcal{E}, \mathcal{S}))_{ik}, \end{aligned}$$

$$\text{car } \frac{1}{2i\pi} \int_{E(\mathbf{c}_{\mathcal{S}_\ell})} \frac{df_k}{f_k} = \delta_{\ell k}.$$

□

3.2. Décomposition de JSJ. Ce qui suit est bien connu des spécialistes de la topologie des 3-variétés. Il s'agit des applications aux singularités de courbes, de la classification des variétés de dimension 3 due à Waldhausen [19], Jaco-Shalen [6] et Johansson [7]. Cette étude est effectuée par Michel-Weber [12] et par Neumann [15, 16], via des techniques de plombage. Dans ce paragraphe nous précisons et adaptons ces méthodes, afin de mettre en évidence les propriétés qui nous seront utiles au chapitre suivant. Pour les énoncés précis des théorèmes utilisés, nous nous référons à [8] dont nous adoptons le vocabulaire ; le lecteur pourra aussi se référer à la monographie [20] de CTC Wall, ainsi qu'à l'article [17] de Neumann-Swarup.

Avec les notations (4) et (5), définissons pour tout point singulier s et toute composante D de $\mathcal{D}$, les sous-variétés à bord de $\mathcal{M}_\eta$ suivantes :

$$(14) \quad \mathcal{M}_s := \mathcal{M}_\eta \cap \Omega_s \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_D := \mathcal{M}_\eta(K_D);$$

nous les appelons ici *blocs élémentaires* de $\mathcal{M}_\eta$. La décomposition de $\mathcal{M}_\eta$ en “blocs de Jaco-Shalen-Johansson” (JSJ) et en “tores épaissis”, que nous allons maintenant définir, sera obtenue en agrégeant de tels blocs.

Notons $\mathfrak{R} \subset \text{Comp}(\mathcal{D})$ l'ensemble des composantes de $\mathcal{D}$ de valence ≥ 3 . Celles-ci correspondent aux les sommets de rupture de l'arbre dual $\mathbb{A}$. Précisons la notion de *chaîne de composantes* reliant deux éléments D' et $D'' \in \mathfrak{R}$: c'est une collection finie de composantes

$$(15) \quad \mathcal{C} := \{D_0, \dots, D_{l_{\mathcal{C}}+1}\}, \quad l_{\mathcal{C}} \geq 0, \quad D_0 = D', \quad D_{l_{\mathcal{C}}+1} = D'',$$

telle que

$$(16) \quad v(D_1) = \dots = v(D_{l_{\mathcal{C}}}) = 2 \quad \text{et} \quad D_j \cap D_{j+1} \neq \emptyset, \quad j = 0, \dots, l_{\mathcal{C}}.$$

Désignons par $\mathfrak{C}$ l'ensemble de chaînes de composantes de $\mathcal{D}$ reliant des composantes de $\mathfrak{R}$. Rappelons qu'on appelle *branche morte de $\mathcal{E}$ adjacente à $D \in \mathfrak{R}$* , toute suite finie $\mathcal{C} := \{D_0, \dots, D_{l_{\mathcal{C}}}\}$, $l_{\mathcal{C}} \geq 1$, de composantes de $\mathcal{E}$, telle que

$$(17) \quad D_0 = D, \quad v(D_j) = 2, \quad v(D_{l_{\mathcal{C}}}) = 1, \quad D_k \cap D_{k+1} \neq \emptyset,$$

pour $1 \leq j \leq l_{\mathcal{C}}$ et $0 \leq k \leq l_{\mathcal{C}} - 1$. La composante $D_{l_{\mathcal{C}}}$ est appelée *composante d'extrémité de $\mathcal{C}$* et le point d'intersection de D_0 avec D_1 , *point d'attache de*

C. Nous désignons par $\mathfrak{M}$ l'ensemble de branches mortes de $\mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{C} = \{D_0, \dots, D_{l_{\mathcal{C}}+1}\} \in \mathfrak{C}$. Désignons par s_j le point d'intersection de D_{j-1} et D_j , $j = 0, \dots, l_{\mathcal{C}}$. Classiquement, pour $\eta > 0$ assez petit, ce que nous supposons, $\mathcal{M}_{s_j}$ est un *tore épaissi*, i.e. $\mathcal{M}_{s_j}$ est homéomorphe au produit du tore standard $\mathbb{T} := \partial\mathbb{D}_1 \times \partial\mathbb{D}_1$ avec un intervalle compact. Chaque $\mathcal{M}_{D_j}$, $j = 1, \dots, l_{\mathcal{C}}$, est aussi un tore épaissi et l'on obtient par recollement une 3-variété à bord $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$, munie d'un homéomorphisme :

$$(18) \quad \check{\sigma}_{\mathcal{C}} : \mathcal{M}_{\mathcal{C}} := \bigcup_{j=1}^{l_{\mathcal{C}}} \mathcal{M}_{D_j} \cup \bigcup_{j=0}^{l_{\mathcal{C}}} \mathcal{M}_{s_j} \xrightarrow{\sim} \mathbb{T} \times [-1, 1].$$

Cette structure produit s'étend sur un voisinage du bord de $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ sur une 3-variété à bord $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{C}}$, munie d'un homéomorphisme

$$(19) \quad \sigma_{\mathcal{C}} : \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{T} \times [-1 - \epsilon, 1 + \epsilon], \quad \sigma_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathbb{T} \times [-1, 1]) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}, \quad \sigma_{\mathcal{C}|_{\mathcal{M}_{\mathcal{C}}}} = \check{\sigma}_{\mathcal{C}}.$$

Considérons le 2-tore $\mathbb{T}_{\mathcal{C}} := \sigma_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathbb{T} \times \{0\})$. L'adhérence B de toute composante connexe de $\mathcal{M}_{\eta} \setminus (\cup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}} \mathbb{T}_{\mathcal{C}})$ contient un unique bloc élémentaire $\mathcal{M}_D$, $D \in \mathfrak{R}$. Nous disons que B est le *bloc de JSJ de $\mathcal{M}_{\eta}$ associé à D* et nous le notons B_D . Nous désignons par B_D^b la composante connexe de la fermeture de $\mathcal{M}_{\eta} \setminus \cup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}} \mathcal{M}_{\mathcal{C}}$, contenue dans B_D .

Considérons une branche morte $\mathcal{C} = \{D_0, \dots, D_{l_{\mathcal{C}}}\} \in \mathfrak{M}$ de $\mathcal{E}$. Nous notons encore :

$$(20) \quad \mathcal{M}_{\mathcal{C}} := \bigcup_{j=1}^{l_{\mathcal{C}}} \mathcal{M}_{D_j} \cup \bigcup_{j=0}^{l_{\mathcal{C}}-1} \mathcal{M}_{s_j}, \quad \text{où} \quad \{s_j\} := D_j \cap D_{j+1}.$$

Ainsi, pour $D \in \mathfrak{R}$, B_D^b est l'union de $\mathcal{M}_D$ et des variétés $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$, pour toutes les branches mortes $\mathcal{C}$ s'attachant en un point de D . Remarquons que si $\mathcal{C} \in \mathfrak{M}$ alors $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ est homéomorphe à un tore solide $\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1$; notons aussi que le complémentaire $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\circ}$ d'une fibre de Hopf (non contenue dans $D_{l_{\mathcal{C}}-1}$) du diviseur $D_{l_{\mathcal{C}}}$ de valence 1 dans $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ a le type d'homotopie du tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Définition 3.5. Pour $\mathcal{C} \in \mathfrak{C} \cup \mathfrak{M}$, posons $H_1^{\mathcal{C}} = H_1(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}, \mathbb{Z})$, si $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$ et $H_1^{\mathcal{C}} = H_1(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\circ}, \mathbb{Z})$, si $\mathcal{C} \in \mathfrak{M}$. Pour chaque $D_j \in \mathcal{C}$, la classe $\mathfrak{c}_j$ d'une fibre de ρ_{D_j} restreinte à $\mathcal{M}_{D_j}$ et orientée comme bord d'une courbe holomorphe de $\mathcal{T}_{\eta}$, sera appelée *méridien associé à D_j* . Si $\mathcal{C} \in \mathfrak{M}$, nous désignons par $\mathfrak{c}_{l_{\mathcal{C}}+1}$ et nous appelons *méridien exceptionnel de $\mathcal{C}$* , le générateur du noyau du morphisme $H_1(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\circ}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}, \mathbb{Z})$ induit par l'inclusion, dont l'orientation et induite par le bord d'une courbe holomorphe de $\mathcal{T}_{\eta}$.

Proposition 3.6. Si $\mathcal{C} \in \mathfrak{C} \cup \mathfrak{M}$ alors :

(i) $H_1^{\mathcal{C}}$ est un groupe abélien libre de rang 2 qui admet comme système de générateurs $\mathfrak{c}_0, \dots, \mathfrak{c}_{l_{\mathcal{C}}+1}$, avec les relations⁷

$$(21) \quad \mathfrak{c}_{j-1} + e_j \mathfrak{c}_j + \mathfrak{c}_{j+1} = 0, \quad e_j = (D_j, D_j) \quad j = 1, \dots, l_{\mathcal{C}};$$

⁷ e_j est aussi égal à la classe de Chern du fibré normal de D_j dans $\mathcal{B}$, intégrée sur la classe fondamentale.

- (ii) pour tout $j = 0, \dots, l_C$, les éléments $\mathbf{c}_j, \mathbf{c}_{j+1}$ forment base de H_1^C ; ces bases définissent toutes la même orientation; la 2-forme $\mathbb{Z}$ -linéaire canonique $\det(\cdot, \cdot)$ sur H_1^C telle que $\det(\mathbf{c}_j, \mathbf{c}_{j+1}) = 1$ et $\det(\mathbf{c}_j, \mathbf{c}_j) = 0$, correspond à la forme d'intersection de chaque composante connexe de $\partial\mathcal{M}_C$, considérée comme surface orientée;
- (iii) on a $\mathbf{c}_0 = a\mathbf{c}_{l_C} + b\mathbf{c}_{l_C+1}$, avec $a = \pm \det(A) \neq 0$, où A désigne la matrice de la restriction au diviseur $\bigcup_{j=1}^{l_C} D_j$, de la forme d'intersection de $\mathcal{E}$;
- (iv) les éléments $\mathbf{c}_0 \otimes 1, \mathbf{c}_{l_C+1} \otimes 1$ forment une $\mathbb{Q}$ -base de $H_1^C \otimes \mathbb{Q}$.

Preuve. L'affirmation (i) est une conséquence directe du fait que H_1^C s'identifie à l'homologie entière d'un tore et des relations (12). L'assertion (ii) se déduit facilement à partir des relations (21), voir aussi [4, 5], qui s'écrivent sous forme matricielle comme

$$(22) \quad \underbrace{\begin{bmatrix} e_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & e_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & e_{l_C-1} & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & e_{l_C} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{c}_{l_C} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{c}_{l_C+1} \end{bmatrix}.$$

En appliquant la formule de Cramer on voit sans peine que le coefficient a de l'expression $\mathbf{c}_0 = a\mathbf{c}_{l_C} + b\mathbf{c}_{l_C+1}$ n'est autre que $a = \pm \det A$, où A est la matrice de la restriction au diviseur $\bigcup_{j=1}^{l_C} D_j \subset \mathcal{E}$ de la forme d'intersection de $\mathcal{E}$ qui est définie négative. Ce qui donne (iii), car $\det A \neq 0$. Finalement, l'affirmation (iv) est une conséquence directe de (iii). $\square$

Désignons par $S_{\mathfrak{M}}(D) \subset S(D)$ l'ensemble des points d'attache des branches mortes sur D et notons :

$$(23) \quad \widehat{S}(D) := S(D) \setminus S_{\mathfrak{M}}(D), \quad \widehat{K}_D := D \setminus \bigcup_{s \in \widehat{S}(D)} \overset{\circ}{D}_s = K_D \cup \bigcup_{s \in S_{\mathfrak{M}}(D)} D_s.$$

Corollaire 3.7. *Pour chaque composante D de $\mathcal{E}$ de valence ≥ 3 , la restriction à $\mathcal{M}_D$ de la fibration ρ_D du système local $\mathcal{L}$, se prolonge en une fibration de Seifert $\widehat{\rho}_D : B_D^b \rightarrow \widehat{K}_D$, de fibres exceptionnelles $\widehat{\rho}_D^{-1}(s)$, $s \in S_{\mathfrak{M}}(D)$. De plus $\widehat{\rho}_D^{-1}(s)$ est l'intersection de B_D^b avec une fibre de la fibration de Hopf de base la composante d'extrémité de la branche morte qui s'attache à D au point s .*

Preuve. Donnons-nous $\mathbf{m} := [\partial\mathbb{D} \times \{1\}]$ un méridien et $\mathbf{p} := [\{1\} \times \mathbb{S}^1]$ un parallèle dans $H_1(\mathbb{D}^* \times \mathbb{S}^1, \mathbb{Z})$. Il est bien connu qu'une courbe de $\mathbb{D}^* \times \mathbb{S}^1$ de classe d'homologie entière $a\mathbf{m} + b\mathbf{p}$ est une fibre d'une fibration de Seifert de $\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1$, si et seulement si $a \neq 0$. On conclut en appliquant la partie (iii) de la proposition précédente et en remarquant que $\mathbf{m} = \mathbf{c}_{l_C+1}$. $\square$

Remarque 3.8. La structure produit des tores épaissis $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$, $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$, permet d'étendre facilement $\widehat{\rho}_D$ en une fibration de Seifert

$$(24) \quad \widehat{\rho}_D^{\text{ext}} : B_D \rightarrow \widehat{K}_D^{\text{ext}}, \quad \widehat{K}_D^{\text{ext}} := D \setminus \bigcup_{s \in \widehat{S}(D)} \check{D}_s, \quad \widehat{\rho}_{D|B_D^b}^{\text{ext}} = \widehat{\rho}_D,$$

dont les fibres sont contenues dans les fibres de $\sigma_{\mathcal{C}}$, $\check{D}_s$ désignant ici un disque conforme fermé de centre s contenu dans $\overset{\circ}{D}_s$.

Ainsi chaque tore $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}$, $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$, qui est l'intersection de deux blocs de JSJ, est muni des deux fibrations en cercles, obtenues en restreignant à $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}$ les fibrations de Seifert de chaque bloc adjacent. Les classes d'homologie des fibres correspondantes à ces deux fibrations sont $\mathfrak{c}_0$ et $\mathfrak{c}_{l_{\mathcal{C}}+1}$, qu'on peut considérer comme des éléments de $H_1(\mathbb{T}_{\mathcal{C}}, \mathbb{Z})$ puisque l'inclusion $\mathbb{T}_{\mathcal{C}} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ est un isomorphisme en homologie.

Remarque 3.9. Soit $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$. Pour $j \in \{0, l_{\mathcal{C}}+1\}$, en utilisant que $v(D_j) \geq 3$ on voit aisément [10] que $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}$ est incompressible dans B_D , ce qui donne le monomorphisme $H_1(\mathbb{T}_{\mathcal{C}}, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H_1(B_{D_j}, \mathbb{Z})$. Ainsi $\mathfrak{c}_0$ et $\mathfrak{c}_{l_{\mathcal{C}}+1}$ sont aussi indépendantes dans $H_1(B_{D_j}, \mathbb{Z})$ et donc les fibrations de Seifert de B_{D_0} et $B_{D_{l_{\mathcal{C}}+1}}$ ne sont pas compatibles. En utilisant les relations (11), il est facile de voir que l'image de $H_1(\mathbb{T}_{\mathcal{C}}, \mathbb{Z})$ dans $H_1(\mathcal{M}_{\eta}, \mathbb{Z})$ est différente des images de l'homologie des tores bordant $\mathcal{M}_{\eta}$.

Les hypothèses du théorème (1.2.3) de [8] étant satisfaites, il vient :

Corollaire 3.10. *La famille $(\mathbb{T}_{\mathcal{C}})_{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}}$ est une famille caractéristique⁸ de tores essentiels⁹ de la 3-variété $\mathcal{M}_{\eta}$ et détermine sa décomposition de JSJ, qui est constituée de blocs de type Seifert.*

Remarque 3.11. Les sommets de l'arbre de la décomposition de JSJ de $\mathcal{M}_{\eta}$ (correspondants aux blocs Seifert B_D) sont en correspondance bijective avec les composantes $D \in \mathfrak{R}$ et ses arêtes (joignant deux sommets correspondants à deux blocs Seifert adjacents) sont en correspondance bijective avec les chaînes $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$.

3.3. Structures périphériques et isomorphismes géométriques. Pour chaque composante irréductible S_k de S considérons un voisinage tubulaire W_k de $S_k \cap (\mathbb{B}_r \setminus \overset{\circ}{\mathbb{B}}_s)$ avec $0 < s < r \ll 1$ tel que les restrictions des fibrations ρ_{S_k} et ρ_{D_k} à $\mathcal{W}_k := E^{-1}(W_k)$ soient des fibrations triviales, $D_k \in \text{Comp}(\mathcal{D})$ désignant la composante d'attache de S_k . Le groupe fondamental $\mathcal{P}_k := \pi_1(W_k^*)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}\mathfrak{m}_k \oplus \mathbb{Z}\mathfrak{p}_k$ où $\mathfrak{m}_k$ et $\mathfrak{p}_k$ sont les bords orientés d'une fibre de la restriction à $\mathcal{W}_k^*$ de ρ_{S_k} et ρ_{D_k} respectivement. L'abélianité de $\mathcal{P}_k$ permet de ne pas à expliciter un point de base dans W_k^* . Remarquons que $\mathfrak{m}_k$ est un générateur du noyau du morphisme $\pi_1(W_k^*) \rightarrow \pi_1(W_k)$ induit par l'inclusion. Soit $s = S_k \cap D_k \in \text{Sing}(\mathcal{D})$ le point d'attache de S_k . Quitte à permuter les coordonnées (x_s, y_s) nous supposons que $x_s = 0$ est une équation de S_k . Nous choisissons $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ convenables, pour que $\mathcal{W}_k^*$ se rétracte sur le 2-tore $\{|x_s| = \varepsilon_1, |y_s| = \varepsilon_2\}$. Les lacets m et p

⁸i.e. une famille minimale de tores telle l'adhérence de chaque composante connexe du complémentaire est une variété de Seifert ou atoroïdale, cf. [8] p. 144.

⁹i.e. incompressible dans $\mathcal{M}_{\eta}$ et non-isotope à une composante de $\partial\mathcal{M}_{\eta}$.

de W_k^* définis par $(x_s, y_s) \circ m(t) = (\varepsilon_1 e^{2i\pi t}, \varepsilon_2)$ et $(x_s, y_s) \circ p(t) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2 e^{2i\pi t})$ sont deux représentants de $\mathfrak{m}_k$ et $\mathfrak{p}_k$ respectivement.

Définition 3.12. *Nous appellerons $\mathfrak{m}_k$ et $\mathfrak{p}_k$ le méridien et le parallèle canonique de S_k .*

Proposition 3.13. *L'ensemble W_k^* est incompressible dans T_η^* , i.e. le morphisme $i_k : \mathcal{P}_k \rightarrow \Gamma$ induit par l'inclusion $W_k^* \subset T_\eta^*$, qui s'explicite par $i_k(\mathfrak{m}_k) = \mathfrak{c}_{S_k}$, $i_k(\mathfrak{p}_k) = \mathfrak{c}_{D_k}$, est injectif.*

Preuve. Ceci peut se démontrer¹⁰ directement, par utilisation répétée du théorème de Van Kampen, comme nous l'avons déjà fait en la construction d'un voisinage adapté de $\mathcal{D}$ par "assemblage bord à bord" dans [10]. Nous allons présenter une autre preuve basée sur l'incompressibilité dans T_η^* de la fibre de Milnor¹¹ F d'une équation réduite f de S . Notons par $i_{CW}, i_{WT}, i_{CF}, i_{FT}$ respectivement les morphismes au niveau des groupes fondamentaux, induits par les inclusions $F \cap W_k^* \subset W_k^*, W_k^* \subset T_\eta^*, F \cap W_k^* \subset F, F \subset T_\eta^*$. Remarquons que $\pi_1(F)$ est le noyau du morphisme $f_* : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ qui envoie $\mathfrak{c}_D$ sur la multiplicité $\nu_D(f \circ E)$ de $f \circ E$ le long de D . Notons $\nu_k := \nu_{D_k}(f \circ E)$. Comme $f \circ E = x_s y_s^{\nu_k}$, on a l'isomorphisme $\pi_1(F \cap W_k^*) \cong \mathbb{Z}\mathfrak{b}_k$, où $\mathfrak{b}_k$ désigne la composante du bord (orienté) de F contenue dans W_k^* et $i_{CW}(\mathfrak{b}_k) = \mathfrak{p}_k - \nu_k \mathfrak{m}_k$. D'autre part, si $\mathfrak{k} = \alpha \mathfrak{p}_k + \beta \mathfrak{m}_k \in \pi_1(W_k^*)$ appartient au noyau de i_{WT} , alors $f_*(i_{WT}(\alpha \mathfrak{p}_k + \beta \mathfrak{m}_k)) = \alpha \nu_k + \beta = 0$; d'où $\mathfrak{k} = i_{CW}(\alpha \mathfrak{b}_k)$. Comme $i_{WT} \circ i_{CW} = i_{FT} \circ i_{CF}$, i_{CF} et i_{FT} sont injectives, $\alpha = 0$ et i_{WT} est donc aussi injective. $\square$

Dorénavant nous identifierons $\mathcal{P}_k$ à son image dans Γ , en prenant le point de base dans W_k^* . Si nous avons besoin de considérer plus d'un sous-groupe $\mathcal{P}_k$ à la fois, il nous faudra alors de considérer la famille de tous les conjugués de $\mathcal{P}_k$ dans Γ . Le résultat suivant précise cette situation.

Proposition 3.14. *Le normalisateur de $\mathcal{P}_k$ dans Γ est égal à $\mathcal{P}_k$, i.e. si $\zeta \in \Gamma$ et $\zeta \mathcal{P}_k \zeta^{-1} \subset \mathcal{P}_k$ alors $\zeta \in \mathcal{P}_k$. En particulier, la décomposition $\mathcal{P}_k = \mathbb{Z}\mathfrak{m}_k \oplus \mathbb{Z}\mathfrak{p}_k$ est intrinsèque¹² dans Γ .*

Preuve. La preuve de la proposition précédente montre que $\pi_1(F) \cap \mathcal{P}_k = \pi_1(F \cap W_k^*) = \mathbb{Z}\mathfrak{b}_k$. Soit $\zeta' := \zeta \mathfrak{m}_k^\ell$ avec $\ell := f_*(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_\zeta E^* \left(\frac{df}{f} \right)$. Comme $f_*(\mathfrak{m}_k) = 1$ il résulte que $f_*(\zeta') = 0$ et donc $\zeta' \in \pi_1(F)$. Ainsi, $\zeta' \mathfrak{b}_k \zeta'^{-1} \in \pi_1(F) \cap \zeta' \mathcal{P}_k \zeta'^{-1} = \pi_1(F) \cap \mathcal{P}_k = \mathbb{Z}\mathfrak{b}_k$. D'où $\zeta' \mathfrak{b}_k \zeta'^{-1} = \mathfrak{b}_k^n$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$. En passant à l'homologie la dernière égalité on obtient que $n = 1$ et donc $[\zeta', \mathfrak{b}_k] = 1$, que nous pouvons interpréter comme une relation dans le groupe libre $\pi_1(F)$. Comme le sous-groupe $\langle \zeta', \mathfrak{b}_k \rangle$ de $\pi_1(F)$ est aussi libre d'après le théorème classique de Schreier, nous en déduisons qu'il est monogène : $\langle \zeta', \mathfrak{b}_k \rangle = \langle \theta \rangle$ pour un certain $\theta \in \pi_1(F) = \langle u_1, v_1, \dots, u_g, v_g, b_1, \dots, b_r \mid \prod_{i=1}^g [u_i, v_i] \prod_{j=1}^r b_j = 1 \rangle$, où $b_j \subset \partial F$. Nous pouvons

¹⁰Lorsque S n'est pas irréductible, i.e. $r > 1$, on peut raisonner directement en homologie, car alors $\pi_1(W_k^*) \cong H_1(W_k^*; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2 \hookrightarrow \mathbb{Z}^r \cong H_1(T_\eta^*; \mathbb{Z})$. Cette dernière inclusion vient de (13) car $f_\ell \circ E$ s'annule sur D_k , pour tout $\ell = 1, \dots, r$.

¹¹Elle résulte trivialement de la suite exacte d'homotopie de la fibration de Milnor.

¹²i.e. la décomposition $P = \mathbb{Z}\mathfrak{m}_P \oplus \mathbb{Z}\mathfrak{p}_P$ de tout sous-groupe conjugué $P := \zeta \mathcal{P}_k \zeta^{-1}$ donnée par $\mathfrak{m}_P := \zeta \mathfrak{m}_k \zeta^{-1}$ et $\mathfrak{p}_P := \zeta \mathfrak{p}_k \zeta^{-1}$, ne dépend pas de ζ .

supposer que $\mathbf{b}_k = b_1$. Il suffit de prouver que b_1 n'est pas une puissance non-triviale dans $\pi_1(F)$ car dans ce cas $\zeta' \in \langle \theta \rangle = \langle \mathbf{b}_k \rangle \subset \mathcal{P}_k$. Si $r > 1$ alors b_1 fait parti du système libre de générateurs $u_1, v_1, \dots, u_g, v_g, b_1, \dots, b_{r-1}$ de $\pi_1(F)$; il n'est donc pas une puissance non-triviale. Si $r = 1$ alors $b_1^{-1} = \prod_{i=1}^g [u_i, v_i]$ est un mot cycliquement réduit dans le groupe libre $\pi_1(F) = \langle u_1, v_1, \dots, u_g, v_g \rangle$; on voit encore facilement, qu'il ne peut être une puissance non-triviale. $\square$

Théorème 3.15. *Soit U un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{B}$ et h un homéomorphisme¹³ de U sur un voisinage U' de 0 dans $\mathbb{B}'$, tel que $h(S \cap U) = S' \cap U'$. Supposons que l'inclusion $U \subset \mathbb{B}$ induit un isomorphisme $\pi_1(U^*) \cong \Gamma$. Alors, pour toute composante S_k de S l'isomorphisme $h_* : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ induit par h envoie $\mathcal{P}_k$ sur le sous-groupe $\mathcal{P}'_k$ associé à la composante $S'_k = h(S_k \cap U)$ de $S' \cap U'$ et transforme méridien en méridien : $h_*(\mathbf{m}_k) = \mathbf{m}'_k$.*

Preuve. Considérons des voisinages tubulaires W_k de $S_k \cap (\mathbb{B}_r \setminus \overset{\circ}{\mathbb{B}}_s)$ et $W'_k \subset W_k$ de $S'_k \cap (\mathbb{B}'_{r'} \setminus \overset{\circ}{\mathbb{B}}'_{s'})$ contenus dans U et U' respectivement tels que $W'_k \subset h(W_k) \subset W'_k$ et $\mathcal{P}_k = \pi_1(W_k^*)$ et $\pi_1(W_k'^*) = \pi_1(W_k^*) = \mathcal{P}'_k$ via l'inclusion $W_k'^* \subset W_k^*$. Ainsi $h_*(\mathcal{P}_k) \subset \mathcal{P}'_k$ et le composé $\mathcal{P}'_k \rightarrow h_*(\mathcal{P}_k) \rightarrow \mathcal{P}'_k$ est un isomorphisme. Ainsi $h_*(\mathcal{P}_k) = \mathcal{P}'_k$ et la restriction de h_* à $\mathcal{P}_k \cong \mathbb{Z}^2$ est surjective sur $\mathcal{P}'_k \cong \mathbb{Z}^2$. Comme tout morphisme surjectif de $\mathbb{Z}^2$ sur lui-même est aussi injectif, $h_* : \mathcal{P}_k \rightarrow \mathcal{P}'_k$ est un isomorphisme. De même $h_* : \pi_1(W_k) \rightarrow \pi_1(W'_k)$ est aussi un isomorphisme. Ainsi h_* conjugue les noyaux des morphismes induits par les inclusions $W_k^* \subset W_k$ et $W_k'^* \subset W'_k$ qui sont engendrés par $\mathbf{m}_k$ et $\mathbf{m}'_k$ respectivement. On conclut que $h_*(\mathbf{m}_k) = \mathbf{m}'_k$; mais l'exposant est égal à +1, car h préserve les orientations. $\square$

Dans l'énoncé du théorème précédent, k étant donné, nous avons arbitrairement choisi dans W_k et W'_k , les points de base pour Γ et Γ' respectivement. Mais nous aimerions disposer d'une notion indépendante de ces choix, intrinsèque à h_* . Pour cela, revenons à la définition d'équivalence fondamentale introduite en 2.6 et notons que l'ambiguïté de l'action $h_* : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ est contrôlée par la composition à droite et/ou à gauche de h_* par des automorphismes intérieurs. Cela nous conduit à introduire la notion d'*isomorphisme extérieur*, comme une classe d'équivalence d'isomorphisme $\Gamma \rightarrow \Gamma'$ modulo composition par des automorphismes intérieurs. Nous pouvons alors définir

Définition 3.16. *Nous disons qu'un isomorphisme extérieur $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ préserve les structures périphériques s'il envoie tous les sous-groupes conjugués des $\mathcal{P}_k$ sur des sous-groupes conjugués des $\mathcal{P}'_{k'}$. L'isomorphisme φ est dit géométrique si de plus il envoie tous les conjugués des méridiens $\mathbf{m}_k$ sur des conjugués des méridiens $\mathbf{m}'_{k'}$.*

Remarque 3.17. Le théorème 3.15 affirme que si $h : (U, S) \rightarrow (U', S')$ est un germe d'homéomorphisme alors $h_* : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ est un isomorphisme géométrique. La première moitié de la preuve de 3.15 implique que si $h : U^* \rightarrow U'^*$ est un homéomorphisme alors $h_* : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ préserve la structure périphérique; cependant il peut ne pas être géométrique, comme montre

¹³préservant comme toujours les orientations.

l'exemple suivant : $U = U' = \mathbb{C}^2$, $S = S' = \{xy = 0\}$ et $h : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ est défini par $h(x, y) = (xy, y)$.

Rappelons ici un important résultat de F. Waldhausen [19, Corollary 6.5] :

Théorème 3.18. *Soient M et M' des variétés de dimension trois, irréductibles, à bord incompressible et soit $\varphi : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(M')$ un isomorphisme préservant la structure périphérique, i.e. pour toute composante connexe F de ∂M , il existe une composante connexe F' de $\partial M'$, telle que $\varphi(\pi_1(F))$ soit conjugué à $\pi_1(F')$. Alors il existe un homéomorphisme $\phi : M \rightarrow M'$ induisant φ en homotopie, i.e. $\varphi = \phi_*$.*

Corollaire 3.19. *Si $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ est un isomorphisme qui préserve la structure périphérique, alors il existe un homéomorphisme $h : T_\eta^* \rightarrow T_{\eta'}^*$, tel que $h_* = \varphi : \pi_1(T_\eta^*) \rightarrow \pi_1(T_{\eta'}^*)$. Si de plus φ est géométrique, alors h s'étend en un homéomorphisme de T_η^* sur $T_{\eta'}^*$, tel que $h(S) = S'$. Ainsi, tout isomorphisme géométrique est induit par un (unique) marquage.*

Preuve. Nous pouvons appliquer le théorème de Waldhausen à l'isomorphisme $\varphi : \Gamma \cong \pi_1(M_\eta) \rightarrow \pi_1(M'_\eta) \cong \Gamma'$, car M_η et M'_η sont irréductibles, d'après la remarque 2.4 et à bord incompressible, grâce à la proposition 3.13. Il existe donc un homéomorphisme $\phi : M_\eta \rightarrow M'_\eta$, qui s'étend trivialement en un homéomorphisme $h : T_\eta^* \rightarrow T_{\eta'}^*$, via les structures produit $T_\eta^* \cong M_\eta \times]0, \eta]$ et $T_{\eta'}^* \cong M'_\eta \times]0, \eta]$ données par (8). D'autre part, si φ conjugue les méridiens des tores du bord de M_η et M'_η , alors ϕ s'étend en un homéomorphisme de $T_\eta \cap \partial \mathbb{B}$ sur $T_{\eta'} \cap \partial \mathbb{B}'$. En utilisant la structure conique de S et S' , il est facile d'étendre ϕ en un homéomorphisme entre les paires $h : (T_\eta, S) \rightarrow (T_{\eta'}, S')$. $\square$

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME PRINCIPAL

Étant donné l'homéomorphisme $h : \mathbb{B}_\varepsilon \xrightarrow{\sim} h(\mathbb{B}_\varepsilon) \subset \mathbb{B}'$ tel que $h(S \cap \mathbb{B}_\varepsilon) = S' \cap h(\mathbb{B}_\varepsilon)$, dans la première section de ce chapitre nous construisons une application $\check{h}_1$ de M_η sur $M'_{\eta'}$, pour $0 < \eta \ll \eta' \ll 1$, qui est fondamentalement équivalente à h . Grâce aux résultats de Waldhausen, nous modifierons cette application par une homotopie, afin d'obtenir un homéomorphisme h_2 entre les 3-tubes de Milnor.

Dans la section suivante, en utilisant les résultats classiques de Jaco-Shalen-Johannson, nous isotopons h_2 à un nouvel homéomorphisme h_3 qui préserve des réalisations très précises de la décomposition JSJ des 3-tubes de Milnor.

Ensuite à la section 4.3, nous construisons un isomorphisme explicite entre les arbres duaux des désingularisations minimales de S et de S' .

Celui-ci nous permet, à la section suivante, d'étendre h_3 aux 4-tubes de Milnor. Cette extension à la dimension quatre se fait faite en quatre étapes : Dans la première, nous ne nous occupons que des blocs $\mathcal{T}_\eta(D)$ associés aux composantes de valence ≥ 3 . Dans la deuxième étape, nous traitons le cas des chaînes $\mathcal{C}$ de composantes de valence 2, en utilisant la structure produit des blocs $\mathcal{T}_\eta(\mathcal{C})$. À l'étape suivante, nous considérons le cas des branches mortes et celui des transformées strictes des séparatrices. Finalement à la

dernière étape, nous modifierons l'homéomorphisme construit, à l'aide d'isotopies bien choisies, afin d'assurer qu'il est fondamentalement équivalent à l'homéomorphisme h initial.

4.1. Réduction à la dimension trois. Fixons des réels positifs $r < \varepsilon$ et $\varepsilon'' < \varepsilon'$, tels que

$$(25) \quad \mathbb{B}'_{\varepsilon''} \subsetneq h(\mathbb{B}_r) \subsetneq \mathbb{B}'_{\varepsilon'} \subsetneq h(\mathbb{B}_\varepsilon) \subset \mathbb{B}'^*.$$

Munissons le couple $(\mathbb{B}, S)$ d'une *structure conique*, c'est à dire d'un difféomorphisme $\varphi : \partial\mathbb{B} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{B}$ en dehors de l'origine, vérifiant : $\varphi(\partial\mathbb{B} \times \{r\}) = \partial\mathbb{B}_r$, pour tout $r \in]0, 1]$, $\varphi((S \cap \partial\mathbb{B}) \times [0, 1]) = S$ et $\varphi(m, 0) = 0$, $\varphi(m, 1) = m$, pour tout $m \in \partial\mathbb{B}$. Nous disposons aussi d'une structure conique $\varphi' : \partial\mathbb{B}' \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{B}'$, pour le couple $(\mathbb{B}', S')$. Notons $\varrho_0 : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}_\varepsilon$ la rétraction par déformation qui correspond, via φ , à l'application valant $(m, t) \mapsto (m, \varepsilon)$, pour $\varepsilon \leq t \leq 1$. Notons aussi $\sigma'_0 : (\mathbb{B}' \setminus \{0\}) \rightarrow \partial\mathbb{B}'$ la rétraction par déformation correspondant, via φ' , à $(m, s) \mapsto (m, 1)$. Désignons enfin par $\sigma' : \mathbb{B}' \rightarrow \mathbb{B}'$, l'application continue correspondant, via φ' , à l'application $(m, t) \mapsto (m, \varsigma(t))$, où $\varsigma(t)$ est affine pour $\varepsilon'' \leq t \leq \varepsilon'$ et vérifie $\varsigma(t) = t$, pour $t \leq \varepsilon''$ et $\varsigma(t) = 1$, pour $t \geq \varepsilon'$. Visiblement nous avons :

$$\varrho_0^{-1}(S) = S, \quad \sigma'(S') = S', \quad \sigma'^{-1}(S') = S', \quad \sigma'^{-1}(S') = S'.$$

Notons aussi que ϱ_0 et σ' sont l'identité au voisinage de l'origine et que σ' coïncide avec σ'_0 en dehors de $\mathbb{B}'_{\varepsilon'}$. Posons :

$$(26) \quad h_1 := \sigma' \circ h \circ \varrho_0 : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}'.$$

Cette application est continue, nécessairement surjective et vérifie $h_1(\partial\mathbb{B}) = \partial\mathbb{B}'$, $h_1(S) = S'$ et $h_1^{-1}(S') = S$. Elle définit ainsi une application de $\mathbb{B}^*$ dans $\mathbb{B}'^*$. D'autre part h_1 coïncide avec h au voisinage de l'origine et donc les restrictions de h et de h_1 à $\mathbb{B}_\varepsilon^*$, que nous désignerons encore par h et h_1 , sont fondamentalement équivalentes : $h \asymp h_1$.

Fixons maintenant des 4-tubes de Milnor $T_\eta \subset \mathbb{B}$ pour S et $T'_{\eta'} \subset \mathbb{B}'$ pour S' , tels que $h_1(T_\eta) \subset T'_{\eta'}$. Désignons par $r : T_\eta^* \rightarrow M_\eta$ la rétraction par déformation sur le 3-tube de Milnor (7), donnée par la structure produit décrite en (2.3) et notons $r' : T_{\eta'}^* \rightarrow M'_{\eta'} := f'^{-1}(\partial\mathbb{D}_{\eta'}) \cap \mathbb{B}'$ la rétraction similaire. Posons :

$$(27) \quad \check{h}_1 := r' \circ h_1 \circ \iota_{M_\eta} : M_\eta \rightarrow M'_{\eta'},$$

où $\iota_{M_\eta} : M_\eta \hookrightarrow T_\eta^*$ désigne l'application d'inclusion.

Remarque 4.1. On a : $h \asymp h_1 \asymp \check{h}_1$.

Quitte à multiplier l'équation f' par $\frac{\eta}{\eta'}$, nous supposons que $\eta = \eta'$. Nous identifions désormais T_η à T_η , T'_η à T'_η et nous continuons à noter $\check{h}_1$ l'application $E'^{-1} \circ \check{h}_1 \circ E$ définie sur $\mathcal{M}_\eta := E^{-1}(M_\eta)$ et à valeurs dans $\mathcal{M}'_{\eta'} := E'^{-1}(M'_{\eta'})$. Celle-ci satisfait les hypothèses du théorème (6.1) de Waldhausen [19], car $\check{h}_1(\partial\mathcal{M}_\eta) \subset \partial\mathcal{M}'_{\eta'}$. Comme $\mathcal{M}_\eta$ n'est pas l'espace total d'un fibré en droites sur une surface de Riemann close, il existe une

homotopie $F : \mathcal{M}_\eta \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}'_{\eta'}$ vérifiant $F(\partial\mathcal{M}_\eta \times [0, 1]) \subset \partial\mathcal{M}'_{\eta'}$, $F(\cdot, 0) = \check{h}_1$ et telle que $F(\cdot, 1)$ soit un homéomorphisme. Nous posons

$$(28) \quad h_2 := F(\cdot, 1) : \mathcal{M}_\eta \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}'_{\eta'}.$$

Remarque 4.2. La relation $h_2 \asymp \check{h}_1$ est satisfaite.

4.2. Construction d'un homéomorphisme JSJ-compatible. Considérons maintenant pour $\mathcal{M}'_{\eta'}$, la décomposition de JSJ similaire à celle effectuée pour $\mathcal{M}_\eta$: nous conservons les notations (14) pour les blocs élémentaires de $\mathcal{M}'_{\eta'}$; Nous désignons par $\mathfrak{R}'$ la collection des composantes de $\mathcal{D}'$ de valence ≥ 3 et par $\mathfrak{C}'$ celle des chaînes de composantes de $\mathcal{D}'$ reliant deux éléments de $\mathfrak{R}'$; pour chaque $\mathcal{C}' \in \mathfrak{C}'$, les tores épaissi $\mathcal{M}'_{\mathcal{C}'}$ et $\widetilde{\mathcal{M}}'_{\mathcal{C}'}$, ainsi que leur structure produit $\sigma'_{\mathcal{C}'} : \widetilde{\mathcal{M}}'_{\mathcal{C}'} \xrightarrow{\sim} \mathbb{T} \times [-1 - \epsilon, +1 + \epsilon]$ sont construits comme en (19) ; le 2-tore $\mathbb{T}'_{\mathcal{C}'} = \sigma'^{-1}_{\mathcal{C}'}(\mathbb{T} \times \{0\})$ est proprement plongé dans $\mathcal{M}'_{\eta'}$ et les adhérences des composantes connexes de $\mathcal{M}'_{\eta'} \setminus \bigcup_{\mathcal{C}' \in \mathfrak{C}'} \mathbb{T}'_{\mathcal{C}'}$ constituent les *blocs de JSJ de $\mathcal{M}'_{\eta'}$* ; chacun d'eux est noté $B'_{D'}$, car il contient un unique bloc élémentaire $\mathcal{M}'_{D'}$, $v(D') \geq 3$; une fibration de Seifert étendue $\check{\rho}'^{\text{ext}} : B'_{D'} \rightarrow \widehat{K}'_{D'}{}^{\text{ext}}$, définie comme en (24), prolonge la fibration de Hopf $\rho'_D : \mathcal{M}'_{D'} \rightarrow K'_{D'}$; enfin la famille $(\mathbb{T}'_{\mathcal{C}'})_{\mathcal{C}' \in \mathfrak{C}'}$ est, pour les mêmes raisons, une famille caractéristique de tores essentiels proprement plongés dans $\mathcal{M}'_{\eta'}$.

Visiblement $(\mathbb{T}_{\mathcal{C}})_{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}}$ et $(h_2^{-1}(\mathbb{T}'_{\mathcal{C}'}))_{\mathcal{C}' \in \mathfrak{C}'}$ sont deux familles caractéristiques de tores essentiels de $\mathcal{M}_\eta$. D'après le théorème d'unicité des familles caractéristiques, cf. (1.2.6) de [8], il existe une bijection

$$(29) \quad \kappa_2 : \mathfrak{C} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{C}'$$

et un automorphisme ψ de $\mathcal{M}_\eta$ isotope à l'identité, tels que $h_2(\psi(\mathbb{T}_{\mathcal{C}})) = \mathbb{T}'_{\kappa_2(\mathcal{C})}$, pour tout $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$. Posons $\tilde{h}_2 := h_2 \circ \psi$, nous avons :

$$(30) \quad \tilde{h}_2 \asymp h_2 \asymp h \quad \text{et} \quad \tilde{h}_2(\mathbb{T}_{\mathcal{C}}) = \mathbb{T}'_{\kappa_2(\mathcal{C})}, \quad \text{pour tout } \mathcal{C} \in \mathfrak{C}.$$

Remarque 4.3. Visiblement $\tilde{h}_2$ transforme tout bloc de JSJ de $\mathcal{M}_\eta$ en un bloc de JSJ de $\mathcal{M}'_{\eta'}$, définissant ainsi une (unique) bijection $\kappa_3 : \mathfrak{R} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{R}'$ telle que $\tilde{h}_2(B_D) = B'_{\kappa_3(D)}$.

Lemme 4.4 (de l'accordéon). *Il existe un homéomorphisme $\check{h}_2$ isotope à $\tilde{h}_2$, qui transforme tout tore épaissi en un tore épaissi, en respectant la structure produit ; précisément : $\check{h}_2(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}) = \mathcal{M}'_{\kappa_2(\mathcal{C})}$ et $\sigma'_{\kappa_2(\mathcal{C})} \circ \check{h}_2 = \sigma_{\mathcal{C}}$.*

Preuve. Soit $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$ et B_D une composante de JSJ de $\mathcal{M}_\eta$, telle que $\mathbb{T}_{\mathcal{C}} \subset \partial B_D$. Le tore $\mathbb{T}'_{\mathcal{C}'}$, $\mathcal{C}' := \kappa_2(\mathcal{C})$, est une composante connexe de $\partial B'_{\kappa_3(D)}$. Nous pouvons supposer que $\partial B_D^b \supset \sigma_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathbb{T} \times \{1\})$ et $\partial B'_{\kappa_3(D)}^b \supset \sigma'_{\mathcal{C}'}^{-1}(\mathbb{T} \times \{1\})$. L'homéomorphisme r_s de $\mathbb{T} \times [0, 1 + \epsilon]$ sur $\mathbb{T} \times [s, 1 + \epsilon]$, défini par $r_s(p, t) := (p, s + t \frac{1+\epsilon-s}{1+\epsilon})$, $s \in [0, 1]$, se relève en un homéomorphisme de $\sigma_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathbb{T} \times [0, 1 + \epsilon])$ sur $\sigma_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathbb{T} \times [s, 1 + \epsilon])$, qui se prolonge par l'identité en un homéomorphisme

$$R_s : B_D \xrightarrow{\sim} B_D(s) := (B_D \setminus \sigma_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathbb{T} \times [0, s])), \quad R_{s|B_D^b} = \text{id}_{B_D^b}.$$

On construit un homéomorphisme similaire R'_s de $B'_{\kappa_3(D)}$ sur $B'_{\kappa_3(D)}(s) := (B'_{\kappa_3(D)} \setminus \sigma_{\mathcal{C}'}^{-1}(\mathbb{T} \times [0, s]))$. Pour $s \in [0, 1]$, posons $F_s : \mathcal{M}_\eta \rightarrow \mathcal{M}'_{\eta'}$ défini par :

$$\begin{cases} F_s(m) = \check{h}_2(m), & \text{si } m \notin B_D, \\ F_s(m) := R'_s \circ \check{h}_2 \circ R_s^{-1}(m), & \text{si } m \in B_D(s), \\ F_s(m) := \sigma_{\mathcal{C}'}^{-1} \circ (H_2 \times \text{id}_{[0, s]}) \circ \sigma_{\mathcal{C}}(m), & \text{si } m \in \sigma_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathbb{T} \times [0, s]), \end{cases}$$

où $H_2(p) := \sigma_{\mathcal{C}'}(\check{h}_2(\sigma_{\mathcal{C}}^{-1}(p, 0)))$. Visiblement F_s est une isotopie qui vérifie $F_0 = \check{h}_2$ et $F_1(\mathcal{M}_{\mathcal{C}} \cap B_D) = \mathcal{M}'_{\mathcal{C}'} \cap B'_{\kappa_3(D)}$. Pour achever la preuve du lemme, il suffit d'effectuer successivement de telles isotopies, pour toutes les composantes du bord de chaque bloc de JSJ de $\mathcal{M}_\eta$. $\square$

Lemme 4.5. *Il existe un homéomorphisme h_3 isotope à $\check{h}_2$, qui satisfait les mêmes propriétés (4.4) que $\check{h}_2$ et qui de plus conjugue les fibrations de Seifert du complémentaire des tores épaissis, i.e. il existe des homéomorphismes $\varsigma_D : \widehat{K}_D \xrightarrow{\sim} \widehat{K}'_{\kappa_3(D)}$, $D \in \mathfrak{R}$, tels que $\widehat{\rho}'_{\kappa_3(D)} \circ h_3|_{B_D^b} = \varsigma_D \circ \widehat{\rho}_D$.*

Preuve. Visiblement B_D^b est muni de deux fibrations de Seifert : $\widehat{\rho}_D$ de base $\widehat{K}_D$ et $\widehat{\rho}'_{\kappa_3(D)} \circ \check{h}_2|_{B_D^b}$ de base $\widehat{K}'_{\kappa_3(D)}$. Comme B_D^b n'est ni un tore plein, ni un tore épaissi, le théorème d'unicité des fibrations de Seifert (1.2.5) de [8], donne une isotopie $\psi_{D,s} : B_D^b \rightarrow B_D^b$, $s \in [0, 1]$, telle que $\psi_{D,0}$ est l'identité et $\psi_{D,1}$ conjugue les feuilletages définies par ces deux fibrations. Précisément, si $\varsigma_D : \widehat{K}_D \rightarrow \widehat{K}'_{\kappa_3(D)}$ est l'homéomorphisme induit par $\psi_{D,1}$ sur les espaces de feuilles, on a : $\widehat{\rho}'_{\kappa_3(D)} \circ \check{h}_2 \circ \psi_{D,1} = \varsigma_D \circ \widehat{\rho}_D$. Grâce à l'assertion (a) du lemme (4.6) ci-dessous, ces isotopies se recollent en une isotopie globale $\psi_s : \mathcal{M}_\eta \rightarrow \mathcal{M}_\eta$, vérifiant $\psi_0 = \text{id}_{\mathcal{M}_\eta}$, $\psi_s|_{B_D^b} = \psi_{D,s}$, $D \in \mathfrak{R}$ et $\psi_s|_{\mathbb{T}_{\mathcal{C}}} = \text{id}_{\mathbb{T}_{\mathcal{C}}}$, $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$. Pour achever la démonstration, il suffit de poser $h_3 = \check{h}_2 \circ \psi_1$. $\square$

Lemme 4.6 (d'extension des isotopies). *Soit B une variété à bords et $B^b \subset B$ une sous-variété à bords de même dimension, telle qu'il existe un homéomorphisme σ de $\overline{B} \setminus B^b$ sur $\partial B \times [0, 1]$, vérifiant $\sigma(\partial B) = \partial B \times \{1\}$ et $\sigma(\partial B^b) = \partial B \times \{0\}$. Alors :*

- (a) *si $F_s : B^b \rightarrow B^b$, $s \in [0, 1]$, est une isotopie telle que $F_0 = \text{id}_{B^b}$, alors il existe une isotopie $F'_s : B \rightarrow B$, telle que $F'_s|_{B^b} = F_s$ et $F'_s|_{\partial B} = \text{id}_{\partial B}$, $s \in [0, 1]$;*
- (b) *si $G_s : \partial B \rightarrow \partial B$, $s \in [0, 1]$, est une isotopie telle que $G_0 = \text{id}_{\partial B}$, alors il existe alors une isotopie $G'_s : B \rightarrow B$, telle que $G'_s|_{B^b} = \text{id}_{B^b}$ et $G'_s|_{\partial B} = G_s$, $s \in [0, 1]$.*

Preuve. (a) Notons $\widetilde{F}_s := \sigma \circ F_s \circ \sigma_{|\partial B^b}^{-1}$. Pour $m \in \overline{B} \setminus B^b$, nous posons $\widetilde{F}'_s(m) := \sigma^{-1} \circ \widetilde{F}_s \circ \sigma(m)$, avec $\widetilde{F}'_s(p, t) := \widetilde{F}_{s-t}(p, t)$, si $0 \leq t \leq s$ et $\widetilde{F}'_s(p, t) := (p, t)$, si $s \leq t \leq 1$. La preuve de (b) est similaire. $\square$

Pour chaque $D \in \mathfrak{R}$, l'homéomorphisme ς_D donné par (4.5), induit une bijection ϖ_D entre les points singuliers de $\mathcal{D}$ situés sur D et ceux de $\mathcal{D}'$ situés sur $D' := \kappa_3(D)$. Celle-ci vérifie, avec les notations (23) :

$$\varpi_D(S_{\mathfrak{M}}(D)) = S_{\mathfrak{M}}(D') \quad \text{et donc} \quad \varpi_D(\widehat{S}(D)) = \widehat{S}(D'),$$

puisque les points d'attache des branches mortes correspondent aux fibres exceptionnelles des fibrations de Seifert et les éléments de $\widehat{S}(D)$, resp. de $\widehat{S}(D')$, correspondent aux composantes connexes de $\partial\widehat{K}_D$, resp. de $\partial\widehat{K}_{D'}$. Il est facile de prouver que, quitte à modifier h_3 par une isotopie, ς_D envoie le disque D_s , $s \in S_{\mathfrak{M}}(D)$, sur le disque $D'_{\varpi_D(s)}$. Ainsi h_3 envoie le bloc élémentaire $\mathcal{M}_D$ sur le bloc élémentaire $\mathcal{M}'_{D'}$, en conjuguant les fibrations de Hopf restreintes à ces blocs.

4.3. Conjugaison des arbres duaux des diviseurs. Récapitulons les résultats obtenus : nous avons construit un homéomorphisme $h_3 : \mathcal{M}_\eta \rightarrow \mathcal{M}'_{\eta'}$ tel que $h_3 \asymp h$, ainsi que des bijections

$$(31) \quad \kappa_3 : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}, \quad \kappa_2 : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}', \quad \kappa_1 : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}',$$

qui satisfont pour tout $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$ et $\tilde{\mathcal{C}} \in \mathfrak{M}$, les propriétés suivantes :

- (a) les images par κ_3 des composantes d'extrémité de $\mathcal{C}$, sont les composantes d'extrémité de $\kappa_2(\mathcal{C})$;
- (b) si $D_0 \in \mathfrak{R}$ est la composante d'attache de $\tilde{\mathcal{C}}$, alors $\kappa_3(D_0)$ est la composante d'attache de $\kappa_1(\tilde{\mathcal{C}})$;
- (c) l'homéomorphisme h_3 envoie $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ sur $\mathcal{M}'_{\kappa_2(\mathcal{C})}$, $\mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{C}}}$ sur $\mathcal{M}'_{\kappa_1(\tilde{\mathcal{C}})}$ et $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}$ sur $\mathbb{T}'_{\kappa_2(\mathcal{C})}$; pour $D \in \mathfrak{R}$, il envoie aussi, en conjuguant les fibrations de Seifert, B_D sur $B'_{\kappa_3(D)}$, B_D^b sur $B_{\kappa_3(D)}^b$ et $\mathcal{M}_D$ sur $\mathcal{M}'_{\kappa_3(D)}$.

La proposition suivante étend les correspondances (31) à toutes les composantes des diviseurs. Elle précise les résultats classiques de Zariski-Lejeune en donnant, par la propriété (c), les relations entre l'homéomorphisme h qui transforme S en S' et la correspondance des arbres duaux de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Proposition 4.7. *Il existe une bijection $\kappa : \text{Comp}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Comp}(\mathcal{D}')$ entre les ensembles de composantes irréductibles de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, telle que :*

- (1) $(\kappa(D), \kappa(D')) = (D, D')$, pour tout $D, D' \in \text{Comp}(\mathcal{D})$;
- (2) pour tout $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$, resp. $\tilde{\mathcal{C}} \in \mathfrak{M}$, on a l'équivalence : $(D \in \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\kappa(D) \in \kappa_2(\mathcal{C}))$, resp. $(D \in \tilde{\mathcal{C}}) \Leftrightarrow (\kappa(D) \in \kappa_1(\tilde{\mathcal{C}}))$; en particulier $\mathcal{C}$ et $\kappa_2(\mathcal{C})$ ont même longueur, ainsi que $\tilde{\mathcal{C}}$ et $\kappa_1(\tilde{\mathcal{C}})$;
- (3) la restriction de κ à $\mathfrak{R} \subset \text{Comp}(\mathcal{D})$ est égale à κ_3 .

En particulier les propriétés (a) (b) et (c) ci-dessus restent satisfaites par κ .

Avant de prouver la proposition 4.7 nous avons besoin d'un résultat auxiliaire. Soit $\mathcal{C} \in \mathfrak{C} \cup \mathfrak{M}$.

- Si $\mathcal{C} = \{D_0, \dots, D_{l_{\mathcal{C}}+1}\} \in \mathfrak{C}$, considérons la chaîne $\mathcal{C}' = \{D'_0, \dots, D'_{l_{\mathcal{C}'}+1}\} = \kappa_2(\mathcal{C}) \in \mathfrak{C}'$, que nous numérotions de manière à avoir $D'_0 = \kappa_3(D_0)$ et $D'_{l_{\mathcal{C}'}+1} = \kappa_3(D_{l_{\mathcal{C}}+1})$.
- Si $\mathcal{C} = \{D_0, \dots, D_{l_{\mathcal{C}}}\} \in \mathfrak{M}$, considérons $\mathcal{C}' = \{D'_0, \dots, D'_{l_{\mathcal{C}'}}\} = \kappa_2(\mathcal{C}) \in \mathfrak{M}'$.

Désignons par $\mathfrak{c}_j \in H_1(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}, \mathbb{Z})$ le méridien associé à D_j et par $\mathfrak{c}'_k \in H_1(\mathcal{M}'_{\mathcal{C}'}, \mathbb{Z})$ celui associé à D'_k , cf. (3.5). L'égalité $h_3(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}) = \mathcal{M}'_{\mathcal{C}'}$ induit un isomorphisme :

$$h_{3*} : H_1(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathcal{M}'_{\mathcal{C}'}, \mathbb{Z}).$$

Dans le cas où $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des branches mortes, $\mathfrak{c}_{l_{\mathcal{C}}+1}$ et $\mathfrak{c}'_{l_{\mathcal{C}'}+1}$ désignent les méridiens exceptionnels correspondants. Comme h_3 conjugue les fibrations de Seifert de B_{D_0} et $B'_{D'_0}$, il conjugue aussi les fibres exceptionnelles ; ainsi h_3 envoie $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\circ}$ sur $\mathcal{M}_{\mathcal{C}'}^{\circ}$ et induit un isomorphisme :

$$h_{3*} : H_1(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\circ}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathcal{M}_{\mathcal{C}'}^{\circ}, \mathbb{Z}).$$

Lemme 4.8. *Pour tout $j = 0, \dots, l+1$, on a les égalités : $l_{\mathcal{C}} = l_{\mathcal{C}'} =: l$ et $h_{3*}(\mathfrak{c}_j) = \mathfrak{c}'_j \in H_1^{\mathcal{C}'}$.*

Nous allons d'abord démontrer le sous-lemme technique suivant¹⁴ :

Sous-Lemme 4.9. *Soient $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ et $b = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{Z}^2$, $\text{pgcd}(\alpha_1, \alpha_2) = 1$, $\text{pgcd}(\beta_1, \beta_2) = 1$ tels que $\det(a, b) > 0$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ unique et une suite finie $\mathbf{c} := (c_0, \dots, c_{n+1})$ d'éléments de $\mathbb{Z}^2 \cap (\mathbb{Q}a + \mathbb{Q}b) \subset \mathbb{Q}^2$ unique tels que :*

$$(32) \quad \begin{cases} \det(c_j, c_{j+1}) = 1, & j = 0, \dots, n, \\ \det(c_{k-1}, c_{k+1}) > 1, & k = 1, \dots, n, \\ c_0 = a, & c_{n+1} = b. \end{cases}$$

En particulier si $\det(a, b) = 1$, l'unique suite $\mathbf{c}$ satisfaisant (32) est donnée par $n = 0$, $c_0 = a$ et $c_1 = b$.

Preuve du sous-lemme. L'existence de n et des c_j se montre aisément à l'aide de fractions continues. Pour l'unicité, nous utiliserons l'assertion suivante, facile à prouver¹⁵ :

($\diamond$) *soient $u := (\nu_1, \nu_2), v := (v_1, v_2) \in \mathbb{Z}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}_{>0}$, tels que $\det(u, v) > 0$, $\nu_1 + \nu_2 > 1$, $v_1 + v_2 > 1$ et $(1, 1) = \lambda u + \mu v$. Alors $\det(u, v) > 1$.*

Pour l'unicité, nous raisonnons par double récurrence, avec l'hypothèse $\mathcal{H}_{N, N'}$ suivante :

“si $\mathbf{c} := (c_j)_{j=0}^{n+1}$ et $\mathbf{c}' := (c'_k)_{k=0}^{n'+1}$ sont deux suites finies d'éléments de $\mathbb{Z}^2 \cap (\mathbb{Q}a + \mathbb{Q}b)$, satisfaisant (32) et si $0 \leq n \leq N$ et $0 \leq n' \leq N'$, alors $n = n'$ et $\mathbf{c} = \mathbf{c}'$.”

Nous allons d'abord montrer $\mathcal{H}_{0, N} \Rightarrow \mathcal{H}_{0, N+1}$; par symétrie on aura aussi $\mathcal{H}_{N, 0} \Rightarrow \mathcal{H}_{N+1, 0}$; comme $\mathcal{H}_{0, 0}$ est évident, il suffira alors de prouver l'implication $\mathcal{H}_{N-1, N'-1} \Rightarrow \mathcal{H}_{N, N'}$.

$\mathcal{H}_{0, N'} \Rightarrow \mathcal{H}_{0, N'+1}$: À un automorphisme de $\mathbb{Z}^2$ près, nous supposons $c_0 = a = (1, 0)$ et $c_1 = b = (0, 1)$. La propriété ($\diamond$) donne l'existence d'un indice $\tilde{k} \in \{1, \dots, N'\}$, tel que $c'_{\tilde{k}} = (1, 1)$, $1 \leq i_0 \leq N$. On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence aux deux suites $((1, 0), (1, 1))$ et $(c'_0, \dots, c'_{\tilde{k}})$, ainsi qu'aux deux suites $((1, 1), (0, 1))$ et $\tilde{\mathbf{c}}' := (c'_{\tilde{k}}, \dots, c'_{N'+1})$.

¹⁴Nous remercions Mark Spivakovski pour son aide et ses suggestions concernant la preuve de ce lemme.

¹⁵Visiblement, $0 < \lambda, \mu < 1$; ainsi $(1, 1)$ appartient à l'intérieur du parallélogramme de sommet $0, u, u+v, v$; mais ceci est impossible lorsque u et v forment une $\mathbb{Z}$ -base de $\mathbb{Z}^2$.

$\mathcal{H}_{N-1, N'-1} \Rightarrow \mathcal{H}_{N, N'}$: Toujours à un automorphisme de $\mathbb{Z}^2$ près, nous pouvons maintenant supposer $a = (1, 0)$ et $b = (\beta_1, \beta_2)$, avec $\beta_1 < \beta_2$. Grâce à $(\diamond)$ on obtient deux indices $\tilde{j} \in \{1, \dots, N\}$ et $\tilde{k} \in \{1, \dots, N'\}$ tels que $c_{\tilde{j}} = c'_{\tilde{k}} = (1, 1)$. L'hypothèse de récurrence appliquée aux deux suites $(c_j)_{j=0, \dots, \tilde{j}}$ et $(c_k)_{k=0, \dots, \tilde{k}}$, ainsi qu'aux deux suites $(c_j)_{j=\tilde{j}, \dots, N}$ et $(c_k)_{k=\tilde{k}, \dots, N'}$, permet de conclure.

Ceci achève la démonstration du sous-lemme. $\square$

Preuve du lemme (4.8). D'après le lemme (4.5), h_3 envoie toute composante de $\partial\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ sur une composante de $\partial\mathcal{M}'_{\mathcal{C}'}$, en conjuguant les fibrations de Seifert correspondantes. L'isomorphisme h_{3*} induit en homologie satisfait donc les égalités :

$$(33) \quad h_{3*}(\mathbf{c}_0) = \mathbf{c}'_0 \quad \text{et} \quad h_{3*}(\mathbf{c}_{l+1}) = \mathbf{c}'_{l'+1},$$

où nous posons $l := l_{\mathcal{C}}$ et $l' := l_{\mathcal{C}'}$ pour abréger. Grâce à l'assertion (ii) de la proposition 3.6 nous déduisons aussi que

$$(34) \quad \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \det'(h_{3*}(\mathbf{a}), h_{3*}(\mathbf{b})),$$

pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H_1^{\mathcal{C}}$. Des relations (21) on tire :

$$\det(\mathbf{c}_{j-1}, \mathbf{c}_{j+1}) = -(D_j, D_j) \geq 2, \quad j = 1, \dots, l,$$

car l'application E de réduction de S est minimale.

Posons $\mathbf{c}''_j := h_{3*}^{-1}(\mathbf{c}'_j)$. Les deux suites finies $\mathbf{c} := (\mathbf{c}_j)_{j=0, \dots, l+1}$ et $\mathbf{c}'' := (\mathbf{c}''_j)_{j=0, \dots, l'+1}$ d'éléments de $H_1(\mathcal{M}'_{\mathcal{C}'}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2$, ont même premier et même dernier terme (33); elles satisfont les relations (32) du lemme (4.9). La conclusion résulte de l'unicité de ces familles. $\square$

Preuve de la proposition (4.7). Les chaînes et les branches mortes qui se correspondent par κ_2 et par κ_1 , ont même longueur; il existe donc une et une seule bijection $\kappa : \text{Comp}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Comp}(\mathcal{D}')$ qui étend κ_3 et qui satisfait les assertions (2) et (3), ainsi que l'équivalence $(D \cap D' \neq \emptyset \Leftrightarrow \kappa(D) \cap \kappa(D') \neq \emptyset)$. Les auto-intersections de toutes les composantes compactes considérées étant ≤ -1 , il suffit pour prouver (1) de montrer les relations :

$$(35) \quad (D, D) = (\kappa(D), \kappa(D)), \quad \text{pour tout } D \in \text{Comp}(\mathcal{E}).$$

Lorsque D_j est contenue dans une chaîne ou une branche morte de $\mathcal{E}$, les relations (21) se déduisent directement des égalités $(D_j, D_j) = -\det(\mathbf{c}_{j-1}, \mathbf{c}_{j+1})$. Comme h_{3*} commute aux formes déterminants (34), relations $h_{3*}(\mathbf{c}_j) = \mathbf{c}'_j$ du lemme (4.8) donnent : $(D_j, D_j) = (\kappa(D_j), \kappa(D_j))$, pour tout $j = 1, \dots, l_{\mathcal{C}} + 1$.

Il reste à prouver (35) lorsque D est de valence ≥ 3 . Remarquons qu'alors $\mathcal{M}_D$ est un rétract par déformation de

$$\mathcal{M}_D^{\sharp} := \mathcal{M}_D \cup_{j=1}^{v(D)} \mathcal{M}_{s_j}, \quad D \cap D_j =: \{s_j\},$$

où $D_1, \dots, D_{v(D)}$ sont les composantes de $\mathcal{D}$ adjacentes à D . Le point singulier s_j est le point de branchement d'une chaîne, d'une branche morte $\mathcal{C}_j$, ou bien encore d'une transformée stricte. Considérons le méridien associé à D_j , qui est un élément $\mathbf{c}_j$ de $H_1(M_j, \mathbb{Z}) \simeq H_1(\mathcal{M}_{s_j} \cap \mathcal{M}_D, \mathbb{Z})$, où M_j est le tore épaissi $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_j}$, ou $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_j}^{\circ}$ dans les deux premiers cas, ou bien encore $\mathcal{M}_{s_j} \cup \mathcal{M}_{D_j}$ dans le dernier cas. Désignons par $\tilde{\mathbf{c}}_j \in H_1(\mathcal{M}_D, \mathbb{Z})$ l'image de $\mathbf{c}_j$ par le monomorphisme induit en homologie par l'inclusion $\mathcal{M}_D \cap \mathcal{M}_{s_j} \subset \mathcal{M}_D$. Nous

pouvons réécrire la *formule d'indice le long de D* donnée par (12) de la façon suivante, cf. [4, 5] :

$$(36) \quad (D, D)\mathfrak{c} + \sum_{j=1}^{v(D)} \tilde{\mathfrak{c}}_j = 0 \quad \text{dans} \quad H_1(\mathcal{M}_D, \mathbb{Z}),$$

où $\mathfrak{c}$ est la classe d'homologie d'une fibre $\rho_D^{-1}(p)$, $p \in K_D$, que nous appelons *le méridien associé à D* . D'après ce qui précède, $\{\kappa(D_j)\}_{j=1, \dots, v(D)}$ est la collection des composantes adjacentes à $\kappa(D)$ et grâce au lemme (4.8), leurs méridiens respectifs sont $h_{3*}(\mathfrak{c}_j) \in H_1(\mathcal{M}'_{\kappa(D)} \cap \mathcal{M}'_{s'_j}, \mathbb{Z})$, où $\{s'_j\} := \kappa(D) \cap \kappa(D_j)$. De même $h_{3*}(\mathfrak{c})$ est le méridien de $\kappa(D)$, car h_3 conjugue les fibration de Seifert de B_D et $B'_{\kappa(D)}$. La formule d'indice le long de $\kappa_3(D)$ donne l'égalité (35). $\square$

4.4. Extension à la dimension quatre. Toujours avec les notations (4) et (5), nous définissons maintenant la collection des *blocs élémentaires du 4-tube de Milnor $\mathcal{T}_\eta$* par :

$$(37) \quad \mathcal{T}_s := \mathcal{T}_\eta \cap \Omega_s \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_D := \mathcal{T}_\eta(K_D), \quad s \in \text{Sing}(\mathcal{D}), \quad D \in \text{Comp}(\mathcal{D}).$$

Un *4-tube associé à une chaîne $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$* , resp. à *une branche morte $\tilde{\mathcal{C}} \in \mathfrak{M}$* est, avec les notations (15) et (16), resp. (17) et (20) :

$$(38) \quad \mathcal{T}_{\mathcal{C}} := \bigcup_{j=1}^{l_{\mathcal{C}}} \mathcal{T}_{D_j} \cup \bigcup_{j=0}^{l_{\mathcal{C}}} \mathcal{T}_{s_j}, \quad \text{resp.} \quad \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{C}}} := \bigcup_{j=1}^{l_{\tilde{\mathcal{C}}}} \mathcal{T}_{D_j} \cup \bigcup_{j=0}^{l_{\tilde{\mathcal{C}}}-1} \mathcal{T}_{s_j}.$$

Nous définissons de manière similaire les blocs élémentaires de $\mathcal{T}'_{\eta'}$, que nous notons $\mathcal{T}'_{s'}$, $s' \in \text{Sing}(\mathcal{D}')$ et $\mathcal{T}'_{D'}$, $D' \in \text{Comp}(\mathcal{D}')$, ainsi que les 4-tubes $\mathcal{T}'_{\mathcal{C}'}$, $\mathcal{C}' \in \mathfrak{C}'$ et $\mathcal{T}'_{\tilde{\mathcal{C}'}}$, $\tilde{\mathcal{C}}' \in \mathfrak{M}'$.

Nous allons d'abord construire, pour $\star \in \mathfrak{R}$, des homéomorphismes $G_\star : \mathcal{T}_\star \rightarrow \mathcal{T}'_{\kappa(\star)}$ satisfaisant les propriétés (a), (b) de (2.5) et coïncidant avec h_3 sur $\mathcal{T}_\star \cap \mathcal{M}_\eta = \mathcal{M}_\star$. Ensuite nous construirons $G_\star$, lorsque $\star$ est une chaîne, puis une branche morte ou une transformé stricte, qui satisfera toujours les propriétés (a), (b) de (2.5), se recollera avec les G_D , $D \in \mathfrak{R}$ déjà construits, mais qui ne coïncidera plus nécessairement avec h_3 sur $\mathcal{M}_\star$. Enfin, à l'aide de twists de Dehn, nous modifieront l'homéomorphisme global

$$(39) \quad G : \mathcal{T}_\eta \longrightarrow \mathcal{T}'_{\eta'}, \quad G|_{\mathcal{M}_\star} = G_\star, \quad \star \in \mathfrak{R} \cup \mathfrak{C} \cup \mathfrak{M},$$

ainsi obtenu, pour qu'il devienne isotope à h_3 en restriction à $\mathcal{M}_\eta$. Nous avons maintenant un homéomorphisme Φ qui satisfait le théorème 2.9.

4.4.1. Construction de G_D , pour $D \in \mathfrak{R}$. Les restrictions des fibrations de Hopf aux blocs élémentaires $\mathcal{T}_D$ et $\mathcal{T}'_{\kappa(D)}$, $D \in \text{Comp}(\mathcal{D})$, sont des fibrations en disques globalement triviales ; on dispose sur ces blocs de champs de vecteurs différentiables Z et Z' , tangents aux fibres de Hopf qui, en restriction à chaque fibre, correspondent au champ radial réel $u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}$, dans des coordonnées trivialisantes $(u + iv, \rho_D) : \mathcal{T}_D \rightarrow \mathbb{D}_1 \times K_D$. Nous définissons un homéomorphisme qui étend $h_{3|_{\mathcal{M}_D}}$ et conjugue les fibrations de Hopf, en

posant :

$$\begin{cases} G_D : \mathcal{T}_D \rightarrow \mathcal{T}'_{\kappa(D)}, & G_{D|\mathcal{M}_D} = h_3, & \rho'_{\kappa(D)} \circ G_D = \rho_{D|\mathcal{T}_D}, \\ G_D(\phi_t^Z(m)) := \phi_t^{Z'}(h_3(m)), & \text{si } m \in \mathcal{M}_D, t < 0, \\ G_D(m) := \varsigma_D(m)(h_3(m)), & \text{si } m \in K_D, \end{cases}$$

où ϕ_t^Z et $\phi_t^{Z'}$ désignent les flots de Z et Z' respectivement.

4.4.2. *Construction de $G_{\mathcal{C}}$, lorsque $\mathcal{C}$ est une chaîne.* Considérons une chaîne $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$ de $\mathcal{D}$ et la chaîne de $\mathcal{D}'$ associée, $\mathcal{C}' := \kappa_2(\mathcal{C})$,

$$\mathcal{C} = \{D_j\}_{j=0,\dots,l+1} \in \mathfrak{C}, \quad \mathcal{C}' = \{D'_j\}_{j=0,\dots,l+1}, \quad D'_j := \kappa(D_j),$$

les composantes D_0, D_{l+1} étant de valences ≥ 3 . Nous supposons $l \geq 1$, le cas d'une chaîne de longueur $l = 0$, n'ayant aucune composante de valence 2 et avec un seul point singulier $\{s\} = D_0 \cap D_1$ se traitant de manière identique, avec $\mathcal{M}_{\mathcal{C}} = \mathcal{M}_s$ et $\mathcal{M}'_{\mathcal{C}'} = \mathcal{M}'_{s'}$, $\{s'\} := D'_0 \cap D'_1$.

Dans une première étape, nous allons construire des homéomorphismes g_{s_j} holomorphes sur des voisinages W_{s_j} des singularités $\{s_j\} := D_{j-1} \cap D_j$; ensuite nous construirons des homéomorphismes g_{D_j} sur les blocs élémentaires $\mathcal{T}_{D_j}$, qui conjuguent les fibrations de Hopf; enfin, à la dernière étape, nous recollons ces homéomorphismes, pour obtenir un homéomorphisme

$$(40) \quad G_{\mathcal{C}} : \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{T}'_{\mathcal{C}'}$$

qui satisfait les propriétés (a) et (b) des homéomorphismes excellents (2.5).

Étape 1. L'application $f \circ E$, composée de l'équation de S fixée à la section (2.2) avec l'application de réduction, est une équation globale de $\mathcal{D}$. Le corollaire 3.4 donne des formules universelles (voir aussi [5, Theorem 18.2]) exprimant les multiplicités $\nu_D(f \circ E)$ le long de chaque composante D de $\mathcal{D}$, à partir de la matrice d'intersection de $\mathcal{D}$. Les matrices d'intersection (D', D'') et $(\kappa(D'), \kappa(D''))$, $D', D'' \in \text{Comp}(\mathcal{D})$, sont égales d'après l'assertion (1) de (4.7). On a donc en particulier, toujours avec les notations de la section (2.2),

$$\nu_{D'_j}(f' \circ E') = \nu_{D_j}(f \circ E) =: m_j, \quad j = 0, \dots, l+1.$$

Soit s_j le point d'intersection de D_j et D_{j+1} et s'_j celui de D'_j et D'_{j+1} . Il existe en ces points des coordonnées holomorphes locales

$$(41) \quad (u_j, v_j) : W_{s_j} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_1 \times \mathbb{D}_1, \quad (u'_j, v'_j) : W'_{s'_j} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_1 \times \mathbb{D}_1,$$

avec $W_{s_j} \subset \overset{\circ}{\Omega}_{s_j}$ et $W'_{s'_j} \subset \overset{\circ}{\Omega}'_{s'_j}$, telles que $v_j = 0$, resp. $v'_j = 0$, soit une équation locale de D_j , resp. de D'_j et qui rendent $f \circ E$ et $f' \circ E'$ monomiaux :

$$f \circ E|_{W_{s_j}} = u_j^{m_{j+1}} v_j^{m_j} \quad \text{et} \quad f' \circ E'|_{W'_{s'_j}} = \frac{\eta}{\eta'} u_j'^{m_{j+1}} v_j'^{m_j},$$

On obtient ainsi un difféomorphisme holomorphe g_{s_j} entre les variétés à bords et à coins $W_{s_j} \cap \mathcal{T}_{s_j} = W_{s_j} \cap \mathcal{T}_{\eta}$ et $W'_{s'_j} \cap \mathcal{T}'_{s'_j} = W'_{s'_j} \cap \mathcal{T}'_{\eta'}$, en posant :

$$(42) \quad g_{s_j} := (u'_j, v'_j)^{-1} \circ (u_j, v_j) : W_{s_j} \cap \mathcal{T}_{\eta} \longrightarrow W'_{s'_j} \cap \mathcal{T}'_{\eta'}.$$

En supposant $\eta > 0$ suffisamment petit, la 3-variété $W_{s_j} \cap \mathcal{M}_{\eta}$, ainsi que les composantes connexes $\mathfrak{T}_j$ et $\mathfrak{T}_{j+1}$ de $\overline{\mathcal{M}_{s_j} \setminus W_{s_j}}$, avec $\mathfrak{T}_j \cap \mathcal{M}_{D_j} \neq \emptyset$,

sont des tores épaissis. Leurs inclusions dans $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ sont des isomorphismes en homologie. Supposons que $W'_{s'_j} \cap \mathcal{M}'_{\eta'}$ satisfait les mêmes propriétés. Quitte à diminuer $\eta' > 0$, la restriction de g_{s_j} à $W_{s_j} \cap \mathcal{M}_{\eta}$, à valeurs dans $W'_{s'_j} \cap \mathcal{M}'_{\eta'}$, définit alors un isomorphisme, noté :

$$(43) \quad g_{s_j *} : H_1(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathcal{M}'_{\mathcal{C}'}, \mathbb{Z}).$$

Lemme 4.10. *Soient $\mathbf{c}_j$ et $\mathbf{c}'_j$, les méridiens associés aux composantes D_j et D'_j respectivement, cf. (3.5). Alors $g_{s_j *}(\mathbf{c}_k) = \mathbf{c}'_k$, $k := j, j+1$, pour tout $j = 0, \dots, l$.*

Preuve. Supposons $k = j$, le cas $k = j+1$ se traite de la même manière. Quitte à permuter les coordonnées du système local, nous supposons aussi que $y_{s_j} = 0$ est une équation de D_j . Pour $\eta > 0$ assez petit, les fibres de x_{s_j} et de u_j sont transverses en tout point de $W_{s_j} \setminus D_{j+1}$, aux fibres de Milnor, i.e. aux fibres de $f \circ E$. Sur $D_j \cap W_{s_j}$, le champ de vecteurs holomorphe qui s'écrit $u_j \frac{\partial}{\partial u_j}$, se relève donc (via l'application u_j) en un champ Z tangent aux fibres de Milnor -et donc aussi à $\mathcal{M}_{\eta}$. On construit facilement une fonction à support compact $\alpha : \overset{\circ}{W}_{s_j} \cap \mathcal{M}_{\eta} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que le flot au temps 1 de αZ envoie $\mathfrak{l}_j := u_j^{-1}(p) \cap W_{s_j} \cap \mathcal{M}_{\eta}$ sur $\mathfrak{l}'_j := x_{s_j}^{-1}(p) \cap W_{s_j} \cap \mathcal{M}_{\eta}$, où $p \neq s_j$ désigne un point fixé de $D_j \cap \overset{\circ}{W}_{s_j}$. Soit $K \subset D_j \cap \overset{\circ}{W}_{s_j}$, $s_j \in \overset{\circ}{K}$, $p \notin K$, un disque conforme fermé. Quitte à diminuer $\eta > 0$, la restriction de x_{s_j} à $\mathcal{M}_{s_j} \setminus x_{s_j}^{-1}(K)$ est encore une fibration en cercles triviale; ainsi une fibre $\mathfrak{l}''_j$ de la restriction de ρ_{D_j} à $\mathcal{M}_{D_j} \cap \mathcal{M}_{s_j} \subset \partial(\mathcal{M}_{s_j} \setminus x_{s_j}^{-1}(K))$, est homologue à $\mathfrak{l}'_j$. Finalement on obtient :

$$[\mathfrak{l}_j] = [\mathfrak{l}'_j] = [\mathfrak{l}''_j] = \mathbf{c}_j \in H_1(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}, \mathbb{Z}).$$

Supposons $\eta' > 0$ assez petit, pour que les égalités similaires dans $\mathcal{M}'_{\mathcal{C}'}$ soient satisfaites. Pour achever la démonstration, il suffit de remarquer que par construction, g_{s_j} envoie les fibres de u_j , resp. de v_j , sur les fibres de u'_j , resp. de v'_j . $\square$

Étape 2. Donnons-nous maintenant des homéomorphismes

$$(44) \quad g_{D_j} : \mathcal{T}_{D_j} \longrightarrow \mathcal{T}'_{D'_j}, \quad j = 1, \dots, l$$

tels que :

- (a) $g_{D_j}(\mathcal{T}_{D_j} \cap \mathcal{T}_{s_j}) = \mathcal{T}'_{D'_j} \cap \mathcal{T}'_{s'_j}$,
- (b) g_{D_j} conjugue les fibrations de Hopf : il existe un homéomorphisme $\varsigma_{D_j} : K_{D_j} \rightarrow K'_{D'_j}$, tel que $\varsigma_{D_j} \circ \rho_{D_j}(m) = \rho'_{D'_j} \circ g_{D_j}(m)$, $m \in \mathcal{T}_{D_j}$,
- (c) le morphisme $g_{D_j *} : H_1(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathcal{M}'_{\mathcal{C}'}, \mathbb{Z})$ induit¹⁶ par la restriction de g_{D_j} à $\mathcal{M}_{D_j}$, à valeurs dans $\mathcal{M}'_{D'_j}$, vérifie : $g_{D_j *}(\mathbf{c}_k) = \mathbf{c}'_k$, $k = j \pm 1$, où $g_{D_j *}$.

¹⁶via les identifications $H_1(\mathcal{M}_{D_j}, \mathbb{Z}) \simeq H_1(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}, \mathbb{Z})$ et $H_1(\mathcal{M}'_{D'_j}, \mathbb{Z}) \simeq H_1(\mathcal{M}'_{\mathcal{C}'}, \mathbb{Z})$ donnés par les inclusions.

Remarquons que l'égalité (c) pour $k = j$, se déduit de (b) et que le cas $k = j - 1$ est équivalent au cas $k = j + 1$, d'après les formule d'indices (21) et l'assertion (1) de (4.7). Ainsi, la construction de g_{D_j} se fait sans peine, après avoir trivialisé les fibrations de Hopf.

Étape 3. Il reste à construire, pour chaque composante connexe $\mathfrak{T}$ de $\mathcal{T}_{s_j} \setminus W_{s_j}$, $j = 0, \dots, l$, un homéomorphisme défini sur $\mathfrak{T}$, à valeur sur une composante connexe $\mathfrak{T}'$ de $\mathcal{T}'_{s'_j} \setminus W'_{s'_j}$, qui se recolle avec g_{s_j} et $g_{D_{j'}}$, $j' = j$ ou $j + 1$. Pour cela fixons un homéomorphisme Λ de $\mathfrak{T}$ sur $[0, 1] \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}_1$. Donnons-nous aussi une fibration en disques $\rho_{\mathfrak{T}} : \mathfrak{T} \rightarrow C_{\mathfrak{T}} := D_{j'} \cap \mathfrak{T}$, qui coïncide avec $\rho_{D_{j'}}$ sur une composante connexe de $\Lambda^{-1}(\{0, 1\} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}_1)$ et qui, sur l'autre composante, coïncide avec une coordonnée homogénéisante définie en (41). On procède de même avec $\mathfrak{T}'$. On constate que les restrictions de g_{s_j} et $g_{D_{j'}}$ à $\partial\mathfrak{T}$, conjuguent les fibrations construites. Pour conclure, il suffit d'appliquer le lemme suivant, en utilisant pour cela le lemme (4.10).

Lemme 4.11. *Soient ϕ_0 et ϕ_1 deux homéomorphismes du tore plein $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}_1$ sur lui-même, qui commutent à la première projection, i.e. $\phi_k(\theta, z) = (\theta, \underline{\phi}_k(\theta, z))$, $k = 0, 1$. Si leurs restrictions à $\mathbb{S}^1 \times \partial\mathbb{D}_1$ induisent l'identité en homologie, il existe un homéomorphisme Φ de $[0, 1] \times \mathbb{S} \times \mathbb{D}_1$ sur lui-même, qui commute aux deux premières projections, i.e. $\Phi(\theta, z, t) = (t, \theta, \underline{\Phi}_t(\theta, z))$ et tel que : $\Phi_0 = \underline{\phi}_0$, $\Phi_1 = \underline{\phi}_1$, et $\underline{\Phi}_t(\theta, z) = (\theta, z)$ si $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$.*

Preuve. Les applications continues $\tilde{\phi}_k : \theta \mapsto \underline{\phi}_k(\theta, \cdot)$, $k = 0, 1$, de $\mathbb{S}^1$ dans le groupe $\text{Aut}(\mathbb{S}^1)$ des homéomorphismes (préservant l'orientation) de $\mathbb{S}^1$ dans lui-même, sont homotopes. En effet l'application

$$(\psi_\tau)_{\tau \in [0, 1]} \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_{\tau \mapsto \psi_\tau(1)} \frac{dz}{z}$$

est un isomorphisme du groupe fondamental de $\text{Aut}(\mathbb{S}^1)$ sur $\mathbb{Z}$; or

$$\int_{\tau \mapsto \phi_k(e^{2i\pi\tau}, 1)} \frac{dz}{z} = 0,$$

car l'automorphisme de $H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathbb{Z})$ induit par ϕ_k est l'identité. Fixons des homotopies $t \mapsto \tilde{\Phi}_{k,t} \in C^0(\mathbb{S}^1, \text{Aut}(\mathbb{S}^1))$, $t \in [0, 1]$, $\tilde{\Phi}_{k,0} = \tilde{\phi}_k$, $\tilde{\Phi}_{k,1} = (\theta \mapsto id_{\mathbb{S}^1})$. Il suffit de poser :

$$\underline{\Phi}_t(\theta, z) = \begin{cases} \tilde{\Phi}_{0, |z|+3t-1}(\theta)(\frac{z}{|z|}), & \text{si } 0 \leq 1-3t \leq |z| \leq 1, \\ \underline{\phi}_0(\theta, \frac{z}{1-3t}), & \text{si } 0 \leq |z| \leq 1-3t, \\ (\theta, z), & \text{si } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}, \\ \underline{\phi}_1(\theta, \frac{z}{3t-2}), & \text{si } 0 \leq |z| \leq 3t-2, \\ \tilde{\Phi}_{1, |z|+2-3t}(\theta)(\frac{z}{|z|}), & \text{si } 0 \leq 3t-2 \leq |z| \leq 1. \end{cases}$$

□

4.4.3. Construction de $G_{\mathcal{C}}$, lorsque $\mathcal{C}$ est une branche morte ou une transformée stricte. Considérons d'abord le cas d'une une branche morte de $\mathcal{D}$, notée $\mathcal{C} = \{D_j\}_{j=0, \dots, l}$, $v(D_0) \geq 3$ et désignons par $\mathcal{C}' := \kappa_1(\mathcal{C}) = \{D'_j\}_{j=0, \dots, l}$, $D'_j := \kappa(D_j)$, la branche morte de $\mathcal{D}'$ correspondante. Nous pouvons encore effectuer, dans ce contexte, toutes les constructions précédentes,

sauf pour la composante d'extrémité : pour $\{s_j\} := D_j \cap D_{j+1}$, $j = 0, \dots, l-1$, nous construisons, avec les mêmes notations qu'en (42), un homéomorphisme g_{s_j} et, pour chaque composante de valence deux, un homéomorphisme g_{D_j} comme en (44). Dans $H_1(\mathcal{M}'_{\mathcal{C}}, \mathbb{Z})$, nous avons encore les égalités

$$g_{s_j}*(\mathbf{c}_k) = \mathbf{c}'_k, \quad k = j, j+1, \quad j = 0, \dots, l-1,$$

pour les mêmes raisons qu'au lemme (4.10) et grâce à (4.8) ; les g_{s_j} et g_{D_j} se recollent donc, comme à l'étape 3 ci-dessus. Il ne reste plus qu'à étendre $g_{s_{l-1}}$ le long de D_l . Pour cela, nous supposons comme précédemment que $\eta, \eta' > 0$ sont assez petits pour que les composantes connexes de $\overline{\mathcal{T}_{s_{l-1}}} \setminus \overline{W_{s_{l-1}}}$ et $\overline{\mathcal{T}'_{s_{l-1}}} \setminus \overline{W'_{s_{l-1}}}$ soient des tores épaissis. Il suffit alors de construire un homéomorphisme g de la composante connexe $\mathfrak{T}$ de $(\mathcal{T}_{s_{l-1}} \setminus W_{s_{l-1}}) \cup \mathcal{T}_{D_l}$ contenant D_l , sur la composante connexe $\mathfrak{T}'$ de $(\mathcal{T}'_{s_{l-1}} \setminus W'_{s_{l-1}}) \cup \mathcal{T}'_{D'_l}$ contenant D'_l , qui coïncide avec $g_{s_{l-1}}$ sur le tore plein $\mathfrak{T} \cap W_{s_{l-1}}$. Fixons encore des fibrations $\rho_{\mathfrak{T}} : \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{T} \cap D_l$ et $\rho'_{\mathfrak{T}'} : \mathfrak{T}' \rightarrow \mathfrak{T}' \cap D'_l$, qui coïncident avec les fibrations de Hopf sur $\mathcal{T}_{D_l}$, resp. sur $\mathcal{T}'_{D'_l}$ et avec une coordonnée homogénéisante (41) sur $\mathfrak{T} \cap W_{s_{l-1}}$, resp. sur $\mathfrak{T}' \cap W'_{s_{l-1}}$. Visiblement $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ sont homéomorphes à $\mathbb{D}_1 \times \mathbb{D}_1$, les fibrations $\rho_{\mathfrak{T}}$ et $\rho'_{\mathfrak{T}'}$ correspondant à la première projection. Pour achever la construction de $G_{\mathcal{C}}$, il suffit d'utiliser le lemme suivant dont la démonstration est similaire à celle de (4.11).

Lemme 4.12. *Soit ϕ un homéomorphisme de $\partial\mathbb{D}_1 \times \mathbb{D}_1$ sur lui-même, qui commute à la première projection : $\phi(\theta, p) = (\theta, \phi(\theta, p))$ et qui, en restriction à $\partial\mathbb{D}_1 \times \partial\mathbb{D}_1$, induit l'identité en d'homologie. Alors ϕ se prolonge en un homéomorphisme Φ de $\mathbb{D}_1 \times \mathbb{D}_1$ sur lui-même, qui commute aussi à la première projection.*

Preuve. Comme pour (4.11), il existe une application continue $t \mapsto \tilde{\Phi}_t \in C^0(\mathbb{S}^1, \text{Aut}(\mathbb{S}^1))$, $t \in [0, 1]$, telle que $\tilde{\Phi}_0(\theta)(\vartheta) = \vartheta$ et $\tilde{\Phi}_1(\theta)(\vartheta) = \phi(\theta, \vartheta)$. On pose $\Phi(z', z'') := (z', \underline{\Phi}(z', z''))$, avec :

$$\underline{\Phi}(z', z'') := \begin{cases} |z''| \cdot \tilde{\Phi}_{|z'|}(\frac{z'}{|z'|})(\frac{z''}{|z''|}), & \text{si } |z'| \leq |z''| \leq 1, \\ |z''| \cdot \tilde{\Phi}_{1+|z'|-\frac{|z''|}{|z'|}}(\frac{z'}{|z'|})(\frac{z''}{|z''|}), & \text{si } |z'|^2 \leq |z''| \leq |z'|, \\ |z'|^2 \cdot \phi(\frac{z'}{|z'|}, \frac{z''}{|z''|^2}), & \text{si } |z''| \leq |z'|^2 \leq 1. \end{cases}$$

□

Considérons maintenant D_1 et $D'_1 := \kappa(D_1)$, des transformées strictes de composantes irréductibles de S et S' respectivement. Les composantes adjacentes $D_0 \in \text{Comp}(\mathcal{D})$, resp. $D'_0 := \kappa(D_0) \in \text{Comp}(\mathcal{D}')$, sont de valence ≥ 3 . Notons $\{s\} := D_0 \cap D_1$ et $\{s'\} := D'_0 \cap D'_1$, $\mathcal{C} := \{D_0, D_1\}$, $\mathcal{C}' := \{D'_0, D'_1\}$ et posons : $\mathcal{M}_{\mathcal{C}} := \mathcal{M}_s \cup \mathcal{M}_{D_1}$, $\mathcal{T}_{\mathcal{C}} := \mathcal{T}_s \cup \mathcal{T}_{D_1}$, $\mathcal{M}'_{\mathcal{C}'} := \mathcal{M}'_{s'} \cup \mathcal{M}'_{D'_1}$ et $\mathcal{T}'_{\mathcal{C}'} := \mathcal{T}'_{s'} \cup \mathcal{T}'_{D'_1}$. Avec les mêmes notations, nous construisons comme en (43) un biholomorphisme $g_s : W_s \cap \mathcal{T}_{\eta} \rightarrow W'_{s'} \cap \mathcal{T}'_{\eta'}$. Pour les mêmes raisons qu'en (4.10), celui-ci vérifie le égalités $g_{s*}(\mathbf{c}_k) = \mathbf{c}'_k$, $k = 0, 1$, où $\mathbf{c}_k$, resp. $\mathbf{c}'_k$, sont les classes dans $H_1(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}, \mathbb{Z})$, resp. dans $H_1(\mathcal{M}'_{\mathcal{C}'}, \mathbb{Z})$, d'une fibre quelconque de la fibration de Hopf ρ_{D_k} restreinte à $\mathcal{M}_s \cap \mathcal{M}_{D_k}$, resp. $\rho'_{D'_k}$ restreinte à $\mathcal{M}'_{s'} \cap \mathcal{M}'_{D'_k}$. Remarquons que la restriction de h_3 à $\mathcal{M}_{\mathcal{C}} \cap \partial\mathcal{B}$

(qui est une composante du bord de $\mathcal{M}_\eta$), à valeurs dans $\mathcal{M}'_{\mathcal{C}'} \cap \partial\mathcal{B}'$, vérifie aussi l'égalité¹⁷

$$h_{3*}(\mathbf{c}_k) = \mathbf{c}'_k \quad \text{dans} \quad H_1(\mathcal{M}'_{\mathcal{C}'}, \mathbb{Z}), \quad , \quad k = 0, 1.$$

En effet, par construction h_3 et h sont fondamentalement équivalents ; leurs actions sur Γ diffèrent donc d'un automorphisme intérieur. En passant à l'homologie $h_* = h_{3*}$. Le théorème (3.15) affirme que l'image par h_* du méridien $\mathbf{m}_{D_1}$ du sous-groupe périphérique $\mathcal{P} \subset \Gamma$ associé à $\mathcal{C}$ n'est autre que le méridien $\mathbf{m}_{D'_1} \in \mathcal{P}' \subset \Gamma'$. Comme les isomorphismes $\mathcal{P} \cong H_1(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}, \mathbb{Z})$ et $\mathcal{P}' \cong H_1(\mathcal{M}'_{\mathcal{C}'}, \mathbb{Z})$ font correspondre $\mathbf{m}_{D_1}$ à $\mathbf{c}_1$ et $\mathbf{m}'_{D'_1}$ à $\mathbf{c}'_1$ on obtient l'égalité $h_{3*}(\mathbf{c}_1) = \mathbf{c}'_1$. D'autre part, d'après la remarque 3.9, l'inclusion naturelle $H_1(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H_1(B_{D_0})$ envoie $\mathbf{c}_0$ sur la classe d'homologie de $\mathbf{c}_{D_0} \in \pi_1(B_{D_0}) \subset \Gamma$ représentée¹⁸ par une fibre de la fibration de Seifert de D_0 . Nous avons une description analogue pour $\mathcal{M}'_{\mathcal{C}}$. Comme h_3 conjugue les fibrations de Seifert de B_{D_0} et $B'_{D'_0}$ il en résulte que $h_{3*}(\mathbf{c}_0) = \mathbf{c}'_0$.

Soit $H_{D_1} : \mathcal{T}_{D_1} \rightarrow \mathcal{T}'_{D'_1}$ un homéomorphisme qui coïncide avec h_3 en restriction à $\mathcal{M}_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{B}$ et qui commute aux fibrations de Hopf : $H_{D_1}(K_{D_1}) = K'_{D'_1}$ et $H_{D_1} \circ \rho_{D_1} = \rho'_{D'_1} \circ H_{D_1}$. Comme à l'étape 3 précédente, nous construisons un homéomorphisme $G_{\mathcal{C}} : \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{T}'_{\mathcal{C}'}$ qui étend g_s , qui est égal à H_{D_0} en restriction à $\mathcal{M}_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{M}_{D_0}$ et à H_{D_1} en restriction à $\mathcal{M}_{\mathcal{C}} \cap \partial\mathcal{B}$.

4.4.4. Modification par twists de Dehn. Nous allons maintenant modifier l'homéomorphisme G obtenu par recollement (39), en le composant à droite par un homéomorphisme $\Psi : \mathcal{T}_\eta \rightarrow \mathcal{T}_\eta$ qui vaut l'identité sur chaque bloc $\mathcal{T}_D$, $D \in \mathfrak{R}$ et tel que $G \circ \Psi$ satisfait le théorème (2.9). En posant $\Psi_{\mathcal{C}} := \Psi|_{\mathcal{T}_{\mathcal{C}}}$, il suffit de prouver l'assertion suivante, pour tout $\mathcal{C} =: \{D_j\}_{j=0}^l$ désignant une chaîne de $\mathfrak{C}$, une branche morte, ou bien une paire de composantes associée à une transformée stricte.

($\star\star$) *Il existe un homéomorphisme $\Psi_{\mathcal{C}} : \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$, $\Psi_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{D}) = \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{D}$, à support dans l'intérieur de $(\Omega_{s_0} \setminus \{s_0\})$, $\{s_0\} := D_0 \cap D_1$, tel que $\Psi_{\mathcal{C}|_{\mathcal{M}_{\mathcal{C}}}} \circ G^{-1} \circ h_3 : \mathcal{M}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ sont homotopes relativement au bord de $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$, i.e. il existe une homotopie $F_t : \mathcal{M}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{C}}$, $t \in [0, 1]$, telle que $F_0 = G^{-1} \circ h_3$, $F_1 = \Psi|_{\mathcal{M}_{\mathcal{C}}}$ et $F_t(m) = m$, pour tout $t \in [0, 1]$ et $m \in \partial\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$.*

Rappelons qu'à toute application continue K d'une variété à bord X dans elle-même, qui vaut l'identité en restriction à un sous-ensemble $A \subset X$, est associé un *morphisme de variation relative* à A , cf. [1] :

$$\text{var}_K : H_1(X, A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z}), \quad [\delta] \mapsto [K(\delta) - \delta].$$

Celui-ci est un invariant de la classe d'homotopie relative à A , de K . Notons que si $K_* : H_1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$ désigne le morphisme induit par K et $i_* : H_1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X, A; \mathbb{Z})$ celui induit par l'inclusion $(X, \emptyset) \subset (X, A)$, on a l'identité : $K_* = \text{id}_{H_1(X, \mathbb{Z})} + \text{var}_K \circ i_*$. Nous utiliserons le résultat suivant.

¹⁷avec les identifications données par les inclusions : $H_1(\mathcal{M}_{\mathcal{C}} \cap \partial\mathcal{B}, \mathbb{Z}) \simeq H_1(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}, \mathbb{Z})$ et $H_1(\mathcal{M}'_{\mathcal{C}'} \cap \partial\mathcal{B}', \mathbb{Z}) \simeq H_1(\mathcal{M}'_{\mathcal{C}'}, \mathbb{Z})$.

¹⁸Ici nous utilisons que les désingularisations de S et S' sont minimales et donc $v(D_0) = v(D'_0) \geq 3$.

Proposition 4.13. *Deux homéomorphismes χ_0 et $\chi_1 : \mathcal{M}_C \rightarrow \mathcal{M}_C$ égaux à l'identité en restriction à $\partial\mathcal{M}_C$, sont homotopes relativement à $\partial\mathcal{M}_C$, si et seulement si leurs morphismes de variation sont égaux :*

$$\text{var}_{\chi_0} = \text{var}_{\chi_1} : H_1(\mathcal{M}_C, \partial\mathcal{M}_C; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathcal{M}_C, \mathbb{Z}).$$

Remarquons que si $\mathcal{C}$ est une branche morte, alors $(\mathcal{M}_C, \partial\mathcal{M}_C)$ est homéomorphe à $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}_1, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ et $H_1(\mathcal{M}_C, \partial\mathcal{M}_C; \mathbb{Z}) = 0$. Pour obtenir $(\star\star)$, on pose alors $\Psi_C = \text{id}_{\mathcal{T}_C}$.

Si $\mathcal{C}$ n'est pas une branche morte, l'assertion $(\star\star)$ découle immédiatement du lemme suivant.

Lemme 4.14. *Supposons que $\mathcal{C}$ est une chaîne ou est associé à une transformée stricte. Alors pour tout morphisme de $L : H_1(\mathcal{M}_C, \partial\mathcal{M}_C; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathcal{M}_C, \mathbb{Z})$, il existe un homéomorphisme $\Psi : \mathcal{T}_C \rightarrow \mathcal{T}_C$ à support dans $\mathring{\Omega}_{s_0} \setminus \{s_0\}$, vérifiant $\Psi_C(\mathcal{T}_C \cap \mathcal{D}) = \mathcal{T}_C \cap \mathcal{D}$ et tel que L soit le morphisme de variation de la restriction de Ψ à $\mathcal{M}_C$: $L = \text{var}_{\Psi|_{\mathcal{M}_C}}$.*

Preuve du lemme (4.14). Visiblement $H_1(\mathcal{M}_C, \partial\mathcal{M}_C, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\mathfrak{d}$ est engendré par la classe d'un chemin quelconque δ reliant les deux composantes connexes de $\partial\mathcal{M}_C$. Grâce à la formule¹⁹ $\text{var}_{\chi_1 \circ \chi_2} = \text{var}_{\chi_1} + \text{var}_{\chi_2}$, il suffit de déterminer Ψ pour $L = L_k : [\delta] \mapsto \mathfrak{c}_k$, $k = 0, 1$, où $\mathfrak{c}_0$ et $\mathfrak{c}_1$ sont les méridiens associés à D_0 et à D_1 . En effet ceux-ci forment une $\mathbb{Z}$ -base de $H_1(\mathcal{M}_C, \mathbb{Z})$, d'après la proposition 3.6. Pour $k = 0$ ou 1 , fixons comme (41) des coordonnées (u, v) au point s_0 dans lesquelles l'application $f \circ E$ est monomiale et $v = 0$ est une équation de D_k . L'homéomorphisme (twist de Dehn) $\Psi : \mathcal{T}_C \rightarrow \mathcal{T}_C$ définit par

$$u \circ \Psi = u, \quad v \circ \Psi = \begin{cases} e^{2i\pi(3|u|-1)} \cdot v, & \text{si } \frac{1}{3} \leq |u| \leq \frac{2}{3}, \\ v, & \text{si non,} \end{cases}$$

convient. □

Preuve de la Proposition (4.13). La preuve consiste à appliquer convenablement le théorème de classification d'Eilenberg, cf. [21, Theorem V.6.7], dont nous rappelons l'énoncé :

Théorème 4.15. *Soient Y un espace topologique $(n-1)$ -connexe avec $\pi = \pi_n(Y)$ abélien, (X, A) un CW-complexe relatif et $f_0 : X \rightarrow Y$ une application continue. Supposons que*

- (1) *Y est q -simple pour $n+1 \leq q \leq \dim(X, A)$,*
- (2) *$H^q(X, A; \pi_q(Y)) = 0$ pour $n+1 \leq q \leq \dim(X, A)$,*
- (3) *$H^{q+1}(X, A; \pi_q(Y)) = 0$ pour $n+1 \leq q \leq \dim(X, A) - 1$.*

Alors la correspondance $f \mapsto (f_0, f)^ i^n(Y)$ induit une bijection entre l'ensemble de classes d'homotopie relatives à A d'extensions de $f_0|_A$ et le groupe de cohomologie $H^n(X, A; \pi)$.*

Dans cet énoncé $i^n(Y) \in H^n(Y; \pi) \cong \text{Hom}(H_n(Y), \pi)$ s'identifie à l'inverse de l'isomorphisme de Hurewicz $\pi_n(Y) \xrightarrow{\sim} H_n(Y)$. Si Y est un CW-complexe, alors $i^n(Y)$ envoie chaque n -cellule de Y sur l'unique élément de

¹⁹En effet, $\text{var}_{\chi_1 \chi_2} \mathfrak{d} = [\chi_1 \chi_2 \delta - \delta] = [\chi_1 \chi_2 \delta - \chi_2 \delta] + [\chi_2 \delta - \delta] = \text{var}_{\chi_1} \mathfrak{d} + \text{var}_{\chi_2} \mathfrak{d}$ car $[\chi_2 \delta] = [\delta] = \mathfrak{d}$ dans $H_1(\mathcal{M}_C, \partial\mathcal{M}_C; \mathbb{Z})$.

$\pi = \pi_n(Y)$ obtenu en écrasant le $(n - 1)$ -squelette de Y au point base. D'autre part $(f_0, f_1)^* = (i^* \times)^{-1} \circ \partial^* \circ F_{(f_0, f_1)}^*$, où l'application $F_{(f_0, f_1)} : X \times \partial\mathbb{I} \cup A \times \mathbb{I} \rightarrow Y$ est définie par $F_{(f_0, f_1)}(x, t) = f_t(x)$ si $x \in X$ et $t \in \partial\mathbb{I} = \{0, 1\}$ et par $F_{(f_0, f_1)}(a, t) = f_0(a) = f_1(a)$ si $a \in A$ et $t \in \mathbb{I} := [0, 1]$. Finalement $\partial^* : H^n(X \times \partial\mathbb{I} \cup A \times \mathbb{I}; \pi) \rightarrow H^{n+1}(X \times \mathbb{I}, X \times \partial\mathbb{I} \cup A \times \mathbb{I}; \pi)$ est le morphisme de connexion et $i^* \times : H^n(X, A; \pi) \rightarrow H^{n+1}(X \times \mathbb{I}, X \times \partial\mathbb{I} \cup A \times \mathbb{I}; \pi)$ est l'isomorphisme induit par le produit par le générateur $i \in H^1(\mathbb{I}, \partial\mathbb{I})$, en remarquant que $(X \times \mathbb{I}, X \times \partial\mathbb{I} \cup A \times \mathbb{I}) = (X, A) \times (\mathbb{I}, \partial\mathbb{I})$.

Notons encore $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ et $\mathbb{I} = [0, 1]$. Si $\mathcal{C}$ est une chaîne, resp. une branche morte, nous appliquons le théorème avec $X = Y := \mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ qui est homéomorphe à $\mathbb{T} \times \mathbb{I}$, resp. à $X = Y \cong \mathbb{D} \times \mathbb{S}^1$, et est donc un espace de Eilenberg-MacLane $K(\pi, 1)$, avec $\pi = \pi_1(\mathbb{T} \times \mathbb{I}) = H_1(\mathbb{T} \times \mathbb{I}) \cong \mathbb{Z}^2$ (resp. $\pi = \mathbb{Z}$). Les hypothèses du théorème précédent sont donc trivialement satisfaites. Nous posons aussi $A := \partial\mathcal{M}_{\mathcal{C}} \cong \mathbb{T} \times \partial\mathbb{I}$, resp. $A \cong \partial\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1$ et $f_0 = \text{id}$.

Si $\mathcal{C}$ est une branche morte alors

$$H^1(X, A; \pi) = H^1(\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1, \partial\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1, \mathbb{Z}) = H^1((\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \times (\mathbb{S}^1, \emptyset)) = 0,$$

par la formule de Künneth relative et par le fait que $H^i(\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) = 0$ pour $i = 0, 1$. Dans ce cas on obtient donc que toutes les extensions de l'identité sur A sont homotopes relativement à A .

Dans le cas où $\mathcal{C}$ est une chaîne (de $\mathfrak{C}$ ou une paire de composantes associée à une transformée stricte) nous obtenons que les classes d'homotopie relatives à A d'extensions de l'identité sont en correspondance bijective avec $H^1(\mathbb{T} \times \mathbb{I}, \mathbb{T} \times \partial\mathbb{I}; \mathbb{Z}^2) \cong \mathbb{Z}^2$. Il suffit de montrer que si $f : \mathbb{T} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{I}$ est une extension de l'identité sur $\mathbb{T} \times \partial\mathbb{I}$ telle que $\text{var}_f = 0$, alors $(\text{id}, f)^* \iota^1(\mathbb{T} \times \mathbb{I}) = (\text{id}, \text{id})^* \iota^1(\mathbb{T} \times \mathbb{I})$. En fait, pour ne pas avoir à travailler avec le morphisme de connexion, il suffit de voir que

$$F_{(\text{id}, f)}^* \iota^1(\mathbb{T} \times \mathbb{I}) = F_{(\text{id}, \text{id})}^* \iota^1(\mathbb{T} \times \mathbb{I}) \in H^1(\mathbb{T} \times \mathbb{I} \times \partial\mathbb{I} \cup \mathbb{T} \times \partial\mathbb{I} \times \mathbb{I}; \mathbb{Z}^2).$$

Comme $\mathbb{T} \times \mathbb{I} \times \partial\mathbb{I} \cup \mathbb{T} \times \partial\mathbb{I} \times \mathbb{I} = \mathbb{T} \times \partial(\mathbb{I} \times \mathbb{I})$, on voit que $H_1(\mathbb{T} \times \mathbb{I} \times \partial\mathbb{I} \cup \mathbb{T} \times \partial\mathbb{I} \times \mathbb{I}) \cong H_1(\mathbb{T}) \oplus H_1(\partial(\mathbb{I} \times \mathbb{I})) \cong \mathbb{Z}^3$, d'où $H^1(\mathbb{T} \times \mathbb{I} \times \partial\mathbb{I} \cup \mathbb{T} \times \partial\mathbb{I} \times \mathbb{I}; \mathbb{Z}^2) \cong \text{Hom}(H_1(\mathbb{T} \times \mathbb{I} \times \partial\mathbb{I} \cup \mathbb{T} \times \partial\mathbb{I} \times \mathbb{I}), \mathbb{Z}^2) \cong \mathbb{Z}^3 \otimes \mathbb{Z}^2$.

Rappelons que $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1$ est une base de $H_1(\mathbb{T} \times \mathbb{I}) = H_1(\mathbb{T})$ telle que $\mathbf{c}_0 \subset \mathbb{D}^* \times \{e^{i\theta}\}$ et $\mathbf{c}_1 \subset \{z\} \times \mathbb{S}^1$. Soit $\mathbf{e}$ un générateur de $H_1(\partial(\mathbb{I} \times \mathbb{I})) \cong \mathbb{Z}$. Il est facile à voir que $\iota^1(\mathbb{T} \times \mathbb{I}) \in H^1(\mathbb{T} \times \mathbb{I}; \pi_1(\mathbb{T} \times \mathbb{I})) \cong \text{Hom}(H_1(\mathbb{T} \times \mathbb{I}), H_1(\mathbb{T} \times \mathbb{I}))$ s'identifie à l'application identité et alors $F_{(\text{id}, f)}^* \iota^1(\mathbb{T} \times \mathbb{I}) \cong F_{(\text{id}, f)*}$, où

$$F_{(\text{id}, f)*} : H_1(\mathbb{T} \times \partial(\mathbb{I} \times \mathbb{I})) \cong \mathbb{Z}\mathbf{c}_0 \oplus \mathbb{Z}\mathbf{c}_1 \oplus \mathbb{Z}\mathbf{e} \rightarrow \mathbb{Z}\mathbf{c}_0 \oplus \mathbb{Z}\mathbf{c}_1 \cong H_1(\mathbb{T} \times \mathbb{I})$$

s'identifie à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix},$$

$(m, k) \in \mathbb{Z}^2$ vérifient que $\text{var}_f(\mathfrak{d}) = k\mathbf{c}_0 + m\mathbf{c}_1$ où $\mathfrak{d}$ est le générateur de $H_1(\mathbb{T} \times \mathbb{I}, \mathbb{T} \times \partial\mathbb{I}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ qui joint les deux composantes connexes de $\mathbb{T} \times \partial\mathbb{I}$. Ceci complète la preuve de la proposition. $\square$

5. GROUPE D'AUTOMORPHISMES D'UN GERME DE COURBE

Étant donnée un germe de courbe plane S , nous notons :

- $\mathcal{G}_S$ l'ensemble de marquages de S par lui même, qui est un groupe pour la composition ;
- Γ_S le groupe fondamental du tube de Milnor épointé $T_\eta \setminus S$;
- $\text{Out}(\Gamma_S) := \text{Aut}(\Gamma_S)/\text{Inn}(\Gamma_S)$ le groupe d'automorphismes extérieurs de Γ_S ;
- $\text{Out}_g(\Gamma_S)$ le sous-groupe de $\text{Out}(\Gamma_S)$ formé des automorphismes extérieurs géométriques, cf. la définition 3.16.

Théorème 5.1. *L'application $*$: $\mathcal{G}_S \rightarrow \text{Out}(\Gamma_S)$, qui a chaque marquage $[h]$ associe son action h_* sur le groupe fondamental Γ_S , est un isomorphisme sur $\text{Out}_g(\Gamma_S)$.*

Démonstration. L'application $*$ est bien définie précisément parce qu'on considère des automorphismes extérieurs de Γ_S qui éliminent l'ambiguïté du choix de h dans la classe fondamentale $[h]$. L'application $*$ est trivialement un morphisme de groupes injectif grâce à la Proposition 2.8 car $T_\eta \setminus S$ est un espace $K(\Gamma_S, 1)$. Finalement, la surjectivité sur $\text{Out}_g(\Gamma_S)$ est conséquence du corollaire 3.19. $\square$

Corollaire 5.2. *Tout élément de $\text{Out}_g(\Gamma_S)$ est réalisable par un homéomorphisme excellent de (T_η, S) sur lui même.*

Soit $\mathbb{A}_S$ l'arbre dual pondéré de la résolution minimale de S et $\mathfrak{S}_S$ le groupe de permutations des composantes irréductibles de S . Il existe deux morphismes naturels bien définis $\sigma : \mathcal{G}_S \rightarrow \mathfrak{S}_S$ et $\bar{\sigma} : \text{Aut}(\mathbb{A}_S) \rightarrow \mathfrak{S}_S$. L'existence d'un homéomorphisme excellent dans chaque classe d'homotopie de $\mathcal{G}_S$ et l'injectivité de $\bar{\sigma}$, prouvé dans le lemme suivant, permet de considérer un morphisme bien défini

$$\alpha : \mathcal{G}_S \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{A}_S)$$

tel que $\sigma = \bar{\sigma} \circ \alpha$.

Lemme 5.3. *Avec les notations précédentes on a que :*

- (i) $\bar{\sigma}$ est injective, et en conséquence $\ker \sigma = \ker \alpha$;
- (ii) α est surjective et donc $\text{Im } \sigma = \text{Im } \bar{\sigma}$.

Démonstration. La première assertion se démontre facilement par récurrence sur le nombre r de composantes irréductibles de S . Le cas $r = 1$ se démontre par récurrence sur le nombre g de paires de Puisseux de S . Quand $g = 1$ une description très explicite de la situation permet de montrer que $\bar{\sigma}$ est injective dans ce cas. La deuxième assertion se démontre aussi par récurrence sur le nombre de composantes irréductibles de S . Quand S est irréductible $\text{Aut}(\mathbb{A}_S) = \{\text{id}\}$ d'après (i). Si S_i et S_j sont deux composantes irréductibles de S échangées par $g \in \text{Aut}(\mathbb{A}_S)$ alors les sous-arbres pondérés correspondants aux réductions de S_i et S_j sont isomorphes. Dans ce cas il est facile à voir qu'il existe un homéomorphisme de $(T_\eta, \mathcal{D})$ qui induit g et qui est l'identité en dehors d'un voisinage de la partie du diviseur $\mathcal{D}$ qui n'intersecte pas les sous-arbres correspondants à S_i et S_j . $\square$

Toujours avec les notations (4), (5), (37), (38), pour une chaîne $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$ nous posons : $K_{\mathcal{C}} := \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{D}$, $\mathcal{T}_\eta(\partial K_{\mathcal{C}}) = \mathcal{T}_\eta(\partial(K_{\mathcal{C}} \cap D_0)) \cup \mathcal{T}_\eta(\partial(K_{\mathcal{C}} \cap D_{l_{\mathcal{C}}+1}))$.

Définition 5.4. Pour chaque élément $B \in \mathfrak{B} := \mathfrak{R} \cup \mathfrak{C}$ considérons le groupe $\mathcal{G}_B$ des classes d'homotopie relatives à $K_B \cup \mathcal{T}_\eta(\partial K_B)$ d'homéomorphismes de $\mathcal{T}_B$ qui laissent K_B invariant et sont l'identité sur $\mathcal{T}_\eta(\partial K_B)$.

Tout élément de $\mathcal{G}_B$ induit un marquage excellent à support contenu dans $\mathcal{T}_\eta(K_B)$. Nous avons donc un morphisme bien défini

$$\beta : \bigoplus_{B \in \mathfrak{B}} \mathcal{G}_B \rightarrow \mathcal{G}_S.$$

Proposition 5.5. Considérons $D \in \mathfrak{R}$ et $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$.

- (i) Le groupe $\mathcal{G}_D$ est isomorphe au groupe $A(D^\bullet)$ des classes d'homotopie relative à $D \cap \text{Sing}(\mathcal{D})$ d'homéomorphismes de D fixant chaque point de $S(D)$.
- (ii) Tout élément de $\mathcal{G}_\mathcal{C}$ est un twist de Dehn le long de $\mathcal{C}$, cf. section (4.4.4). En particulier, $\mathcal{G}_\mathcal{C} \cong \mathbb{Z}^2$.

Démonstration. Pour prouver (i) on trivialisé $\mathcal{T}_\eta(K_D) \cong K_D \times \mathbb{D}$ et on écrit un représentant excellent d'un élément quelconque f de $\mathcal{G}_D$ sous la forme (f, g) où $f : K_D \rightarrow K_D$ est un homéomorphisme valant l'identité sur ∂K_D et $g : K_D \rightarrow \text{Homeo}(\mathbb{D}, 0) \simeq \mathbb{S}^1$. Comme $g|_{\partial K_D}$ est constante égal à $\text{id}_\mathbb{D}$ il en résulte que (f, g) est isotope à $(f, \text{id}_\mathbb{D})$. Ainsi, $f = [(f, g)]$ est complètement déterminé par $[f] \in A(D^\bullet)$. Réciproquement, tout élément $[f] \in A(D^\bullet)$ détermine de façon univoque l'élément $[(f, \text{id}_\mathbb{D})] \in \mathcal{G}_D$. D'autre part, l'assertion (ii) est une conséquence immédiate de la Proposition 4.13. $\square$

Le groupe modulaire pur $A(D^\bullet)$ s'identifie au quotient du groupe d'Artin de tresses pures du plan à $v(D) - 1$ brins, par son centre qui est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Il s'identifie aussi au quotient du groupe de tresses pures de la sphère à $v(D)$ brins, par son centre qui est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, voir par exemple [2]. Nous appellerons les éléments de $\mathcal{G}_D$ *twists d'Artin au dessus de D* .

D'après la Proposition 5.5, le théorème B de l'introduction affirme que l'image de β est le noyau $\mathcal{G}_S^0$ de σ , c'est à dire, les twists d'Artin et les twists de Dehn engendrent le sous-groupe d'indice fini $\mathcal{G}_S^0$ de $\mathcal{G}_S$.

Preuve du théorème B. D'après le théorème principal et le lemme 5.3, tout élément de $\mathcal{G}_S^0$ peut être représenté par un homéomorphisme excellent $f : \mathcal{T}_\eta \rightarrow \mathcal{T}_\eta$ qui fixe chaque composante irréductible de $\mathcal{D}$ et qui est l'identité²⁰ sur le bord de chaque bloc $\mathcal{T}_\eta(K_D)$ et $\mathcal{T}_\eta(\mathcal{C})$. D'après le théorème de Seifert-Van Kampen, le groupe fondamental Γ_S est le produit amalgamé des groupes fondamentaux $\Gamma_S(D) = \pi_1(B_D)$, $D \in \mathfrak{R}$, des blocs Seifert de la décomposition JSJ de M_η au dessus des groupes fondamentaux de ses tores essentiels $\Gamma_S(\mathcal{C}) = \pi_1(\mathbb{T}_\mathcal{C})$, $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$. Soit $D \in \mathfrak{R}$ un sommet terminal de l'arbre de JSJ de M_η , cf. (3.11), et $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$ sa chaîne adjacente. En composant f par deux éléments convenables de $\mathcal{G}_D$ et $\mathcal{G}_\mathcal{C}$ on peut supposer que $f_* : \Gamma_S \rightarrow \Gamma_S$ est l'identité sur $\Gamma_S(D) \supset \Gamma_S(\mathcal{C})$. On conclut en raisonnant par récurrence sur le nombre de blocs de Seifert sur lesquels f_* n'est pas l'identité. $\square$

²⁰Ceci est possible grâce à l'holomorphie de f au voisinage de chaque singularité de $\mathcal{D}$.

L'exemple suivant montre que l'épimorphisme du théorème B n'est pas en général injectif. Ainsi il peut exister d'autres relations entre les générateurs de $\mathcal{G}_D$ et $\mathcal{G}_C$ à part de celles qu'on vient d'expliciter.

Exemple 5.6. La courbe $S = f^{-1}(0)$ avec $f(x, y) = y(y^2 - x^3)^2 - x^8$ a deux paires de Puiseux, le diviseur exceptionnel de sa désingularisation minimale consiste en cinq droites E_i , $i = 1, \dots, 5$, numérotés par ordre d'apparition et ayant pour matrice d'intersection

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, il y a deux diviseurs de valence trois E_3 et E_5 avec deux (resp. une) branches mortes adjacentes E_1 , E_2 (resp. E_4). Il n'y a qu'une chaîne $\mathcal{C}$ de longueur 0 correspondant au point $E_3 \cap E_5$. Le groupe fondamental Γ_S d'un tube de Milnor de f moins S admet comme système de générateurs les classes d'homotopie $a_1, b_1, c_1, b_2, c_2, d$ de lacets contenus dans des fibres de Hopf des diviseurs E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 et S respectivement. Les relations de ces générateurs sont engendrés par

$$a_1^3 = c_1 = b_1^2, \quad a_1 b_1 c_2 = c_1^3, \quad c_2 = b_2^2, \quad c_1 b_2 d = c_2$$

et

$$(45) \quad [c_1, a_1] = [c_1, b_1] = [c_1, c_2] = [c_2, b_2] = [c_2, d] = 1.$$

En prenant le point de base convenablement, l'action sur Γ_S d'un twist de Dehn autour de $\mathcal{C}$ de type (p, q) est de la forme suivante :

$$a_1 \mapsto a_1, \quad b_1 = b_1, \quad c_1 \mapsto c_1, \quad b_2 \mapsto c_1^p b_2 c_1^{-p}, \quad c_2 \mapsto c_2, \quad d \mapsto c_1^p d c_1^{-p},$$

qui d'après les relations (45) coïncide avec l'automorphisme intérieur associé à l'élément $c_1^p c_2^q \in \Gamma_S$. Ainsi, dans ce cas, $\beta(\mathcal{G}_C) \subset \ker(*)$ qui est trivial.

RÉFÉRENCES

- [1] V. ARNOLD, A. VARCHENKO ET S. GOUSSEIN-ZADÉ, *Singularités des applications différentiables. Vol. 2 : Monodromie et comportement asymptotique des intégrales*, Éditions Mir, Moscou, (1986)
- [2] J. BIRMAN, *Braids, Links, and Mapping Class Groups*, Annals of Mathematics Studies, 82, (1974)
- [3] D. CERVEAU ET P. SAD, *Problèmes de modules pour les formes différentielles singulières dans le plan complexe*, Comment. Math. Helv., t. **61**(2), pages 222 à 253, (1986)
- [4] A. DIMCA, *Singularities and topology of hypersurfaces*, Universitext, (1992)
- [5] D. EISENBUD ET W. NEUMANN, *Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities*, Annals of Mathematics Studies, 110, (1985)
- [6] W.H. JACO ET P.B. SHALEN, *Seifert Fibered Spaces in 3-Manifolds*, Memoirs of American Math. Soc. 21, number 220, (1979)
- [7] K. JOHANSSON, *Homotopy equivalences of 3-Manifolds with Boundaries*, Lecture Notes in Mathematics, number 761, (1979)
- [8] D.T. LÊ, F. MICHEL ET C. WEBER, *Courbes polaires et topologie des courbes planes*, Ann. Sci. de l'École Normale Supérieure, t. **24**, no. **2**, pages 141 à 169, (1991)

- [9] M. LEJEUNE, *Sur l'équivalence des singularités de courbes algébroides planes*, dans : Introduction à la théorie des singularités I, Singularités et monodromies, Lê Dung Trang, Travaux en cours, Hermann, **t. 36**, pages 49 à 124, (1988)
- [10] D. MARÍN ET J.-F. MATTEI, *Incompressibilité des feuilles de germes de feuilletages holomorphes singuliers*, Ann. Sci. de l'École Normale Supérieure, **t. 41**, pages 855 à 903, (2008)
- [11] D. MARÍN ET J.-F. MATTEI, *Classification topologique et monodromie de feuilletages holomorphes*, Pre-publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, (2010)
- [12] F. MICHEL ET C. WEBER, *Topologie des germes de courbes planes à plusieurs branches*, Notes, Université de Genève, (1985)
- [13] J. MILNOR, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Ann. of Math. studies, vol. 61, Princeton University Press, (1968)
- [14] D. MUMFORD, *The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **t. 9**, pages 5 à 22, (1961)
- [15] W. D. NEUMANN, *A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves*, Tans. Amer. Math. Soc., **t. 268(2)**, pages 299 à 344, (1981)
- [16] W.D. NEUMANN, *Graph 3-Manifolds, Splice Diagrams, Singularities*, Singularity theory, World Sci. Publ., 787–817, (2007)
- [17] W.D. NEUMANN ET G.A. SWARUP, *Canonical Decompositions of 3-Manifolds*, Geometry & Topology, **t. 1**, pages 21 à 40, (1997)
- [18] J.P. SERRE, *Trees*, Springer Monographs in Mathematics, (2003)
- [19] F. WALDHAUSEN, *Irreducible 3-Manifolds Which are Sufficiently Large*, Annals of Mathematics, **t. 87, no. 1**, pages 56 à 88, (1968)
- [20] C.T.C. WALL, *Singular Points of Plane Curves*, London Mathematical Society Student Texts, vl. 63, Cambridge University Press, (2004)
- [21] G.W. WHITEHEAD, *Elements of Homotopy Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vl. 61, Springer-Verlag, (1978)
- [22] O. ZARISKI, *On the Topology of Algebroid Singularities*, American Journal of Mathematics, **t. 54, no. 3**, pages 453 à 465, (1932)

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES, UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA, E-08193 BELLATERRA (BARCELONA), SPAIN
E-mail address: davidmp@mat.uab.es

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE TOULOUSE, UNIVERSITÉ PAUL SABATIER, 118, ROUTE DE NARBONNE, F-31062 TOULOUSE CEDEX 9, FRANCE
E-mail address: jean-francois.mattei@math.univ-toulouse.fr