

Treballs de Fi de Grau

Titulació de Matemàtiques

Curs 2021-2022

1 Tipus A. Propostes del professorat

1. Ramon Antoine. [ramon@mat.uab.cat] Àlgebres de Hopf.
2. Ramon Antoine. [ramon@mat.uab.cat] Anells de divisió: Més enllà dels quaternions.
3. Ramon Antoine. [ramon@mat.uab.cat] Localització en anells no commutatius.
4. Pere Ara. [para@mat.uab.cat] Representacions de grups finits.
5. Pere Ara. [para@mat.uab.cat] Una introducció als grups infinits.
6. Pere Ara. [para@mat.uab.cat] Àlgebres associades a grafs.
7. Joan C. Artés. [artesc@mat.uab.cat] Estudi d'una família quadratidimensional de sistemes diferencials quadràtics (3 propostes diferents per a 3 TFG's).
8. Florent Balacheff [fbalacheff@mat.uab.cat] Grafs amb llarga sístole.
9. Florent Balacheff [fbalacheff@mat.uab.cat] Desigualtat isosistílica d'Ivanov.
10. Francesc Bars. [francesc@mat.uab.cat] Exponencial de Carlitz i nombres de Bernoulli-Carlitz.
11. Francesc Bars. [francesc@mat.uab.cat] Anàleg de la funció zeta en característica positiva, funció zeta de Carlitz-Goss.
12. Francesc Bars. [francesc@mat.uab.cat] Extensions abelianes explícites sobre els racionals, teorema de Weber.
13. Francesc Bars. [francesc@mat.uab.cat] Extensions abelianes explícites sobre el cos de fraccions de l'anell de polinomis sobre un cos finit, Drinfeld-Hayes.
14. Francesc Bars. [francesc@mat.uab.cat] Extensions ciclotòmiques.

15. Francesc Bars. [francesc@mat.uab.cat] Atacant el teorema de Fermat, idees de Kummer.
16. Francesc Bars. [francesc@mat.uab.cat] La funció zeta de Riemann, diverses meravelles de la funció. I
17. Francesc Bars. [francesc@mat.uab.cat] La funció zeta de Riemann, diverses meravelles de la funció. II
18. Francesc Bars. [francesc@mat.uab.cat] Aritmètica de corbes planes no singulars.
19. Francesc Bars. [francesc@mat.uab.cat] Forats negres i grups de classes.
20. Giulia Binotto. [gbinotto@mat.uab.cat] Models epidemiològics estocàstics.
21. Josep Maria Burgés. [josep@mat.uab.cat] Mecànica quàntica:
22. Josep Maria Burgés i Joan Mateu. [mateu@mat.uab.cat, josep@mat.uab.cat] Algunes aplicacions de l'anàlisi complexa a la física.
23. Àngel Calsina [acalsina@mat.uab.cat] Dinàmica de poblacions estructurades.
24. Joan Josep Carmona [carmona@mat.uab.cat] Transformacions conformes.
25. Magdalena Caubergh [leen@mat.uab.cat] Teorema de Phragmén-Lindelöf i funcions quasi-analítiques.
26. Álvaro Corral. [alvaro.corral@uab.es] Les propietats anti-intuitives de les distribucions de probabilitat amb mitjana o variància infinites.
27. Julià Cufí [jcufi@mat.uab.cat] Condició de Lipschitz i diferenciabilitat de funcions.
28. Pilar Dellunde [Pilar.dellunde@uab.cat] Lògica matemàtica borrosa (mathematical fuzzy logic).
29. Eduard Gallego. [egallego@mat.uab.cat] Valoracions, toerema de Hadwiger, geometria integral i probabilitats geomètriques.
30. Eduard Gallego. [egallego@mat.uab.cat] La formula de Gauss-Bonnet en varietats.
31. Eduard Gallego. [egallego@mat.uab.cat] Fórmula cinemàtica de Blaschke-Santaló
32. Yamila Garcia. [ygarcia@mat.uab.cat] New graph's theory based molecular descriptors to define molecular architectures.
33. Yamila Garcia. [ygarcia@mat.uab.cat] An electrical description of chemical bonds.
34. Yamila Garcia. [ygarcia@mat.uab.cat] A new electrical based molecular descriptor to define intramolecular bonds.
35. Armengol Gasull. [gasull@mat.uab.cat] Òrbites periòdiques d'equacions diferencials al pla.
36. Armengol Gasull. [gasull@mat.uab.cat] Equacions diferencials de Riccati i d'Abel.
37. Armengol Gasull. [gasull@mat.uab.cat] El mètode del balanç harmònic.
38. Armengol Gasull. [gasull@mat.uab.cat] Òrbites periòdiques per sistemes dinàmics no autònoms.
39. Armengol Gasull. [gasull@mat.uab.cat] La funció de Lambert i les seves aplicacions.
40. David Marín. [davidmp@mat.uab.cat] Geometria de webs.

41. David Marín. [davidmp@mat.uab.cat] Grups, geometria i dinàmica.
42. David Marín. [davidmp@mat.uab.cat] Mathematical Omnibus.
43. David Marín. [davidmp@mat.uab.cat] Geometry and the imagination.
44. Joaquim Martín. [jmartin@mat.uab.cat] Optimal Sobolev embeddings.
45. Joaquim Martín. [jmartin@mat.uab.cat] Espais invariants per reordenació i interpolació.
46. Marc Masdeu. [masdeu@mat.uab.cat] El teorema de Mordell–Weil.
47. Marc Masdeu. [masdeu@mat.uab.cat] La teoria de mòduls singulars.
48. Joan Mateu. [mateu@mat.uab.cat] Equació d'Euler i mecànica de fluids.
49. Joan Mateu. [mateu@mat.uab.cat] La transformada de Hilbert i la desigualtat de Cotlar.
50. Marcel Nicolau. [nicolau@mat.uab.cat] Simetria: Grups de Lie clàssics i les seves representacions.
51. Joan Orobítg. [orobitg@mat.uab.cat] Problema de Dirichlet i el lema de Weyl.
52. Joan Orobítg. [orobitg@mat.uab.cat] Zeros de polinomis al pla complex.
53. Joan Orobítg. [orobitg@mat.uab.cat] El problema del quadrat inscrit.
54. Walter Ortiz. [waortiz@mat.uab.cat] Bi-dimensional rearrangement and Lorentz spaces.
55. Walter Ortiz. [waortiz@mat.uab.cat] A density result for Sobolev spaces in dimension two.
56. Francesc Perera. [perera@mat.uab.cat] Grups amenables.
57. Francesc Perera. [perera@mat.uab.cat] Anells noetherians i anells de polinomis.
58. Francesc Perera. [perera@mat.uab.cat] Monoides commutatius i condicions de refinament.
59. Francesc Perera. [perera@mat.uab.cat] Mòduls finitament generats sobre dominis d'ideals principals. Aplicacions a la forma de Jordan d'un endomorfisme.
60. Francesc Perera. [perera@mat.uab.cat] Introducció a l'Àlgebra Homològica.
61. Francesc Perera. [perera@mat.uab.cat] Els grups de Teoria K de baixa dimensió.
62. Joan Porti. [porti@mat.uab.cat] Superfícies mínimes.
63. Joan Porti. [porti@mat.uab.cat] El pla hiperbòlic.
64. Joan Porti. [porti@mat.uab.cat] Teoria de nusos i polinomi de Jones.
65. Joan Porti. [porti@mat.uab.cat] Desigualtat Isoperimètrica.
66. Sergey Tikhonov. [stikhonov@crm.cat] Convergence/ equiconvergence of numeric series.

67. Sergey Tikhonov. [stikhonov@crm.cat] Hardy's inequality.
68. Sergey Tikhonov. [stikhonov@crm.cat] Convergence of the Fourier series.
69. Mercé Villanueva. [merce.villanueva@gmail.com] Desenvolupament de software matemàtic en teoria de codis.
70. Xavier Xarles [xarles@mat.uab.cat] Matemàtiques Condensades.
71. Xavier Xarles [xarles@mat.uab.cat] Quan una cosa és igual a una altra?

2 Tipus B. Línies temàtiques dels tutors

1. Ramon Antoine. [ramon@mat.uab.cat] Semigrups ordenats, Teoria d'anells i mòduls.
2. Carles Broto. [broto@mat.uab.cat]
 - (a) Grups de Lie i àlgebres de Lie. Sistemes d'arrels i grups de reflexions.
 - (b) Grups finits. Estructura local: teoremes de Sylow, teorema de fusió d'Alperin, sistemes de fusió i axiomes de saturació. El sistema de fusió exòtic de Solomon.
3. Joaquim Bruna [bruna@mat.uab.cat] Ondetes i mostratge comprimit (wavelets and compressed sensing).
4. Josep Burgues [josep@mat.uab.cat] Mecànica Quàntica des del punt de vista de l'Anàlisi (Funcional, Complexa, Real, Harmònica i/o EDPs)
5. Alejandra Cabaña [acabana@mat.uab.cat] Anàlisi de dades funcionals.
6. Natàlia Castellana [natalia@mat.uab.cat] Topologia, Topologia Algebraica i aplicacions.
7. Magdalena Cauberg [leen@mat.uab.cat] Equacions Diferencials i aplicacions.
8. María Pilar Dellunde Clavé (UAB i Institut d'Investigació en Intel·ligència Artificial, IIIA-CSIC.) [Pilar.Dellunde@uab.cat]
 - (a) Teoria de models de la lògica matemàtica borrosa (mathematical fuzzy logic).
 - (b) Lògiques no clàssiques per a la intel·ligència artificial.
9. Juan Jesús Donaire. [JuanJesus.Donaire@uab.cat] Teoria Geomètrica de funcions. Anàlisi Complexa.
10. Eduardo Gallego. [egallego@mat.uab.cat] Geometria Diferencial, Geometria Integral i Geometria Hiperbòlica (Gil Solanes, Eduard Gallego)
11. Maria Jolis. [mjolis@mat.uab.cat]
 - (a) Processos de Markov.
 - (b) Processos i successions de variables aleatòries estacionàries.
 - (c) Introducció a l'Anàlisi estocàstica.
12. Toni Lozano [tonilb@mat.uab.cat] Deep Learning.
13. David Marín. [davidmp@mat.uab.cat] Geometria diferencial. Sistemes dinàmics.
14. Joaquim Martín. [jmartin@mat.uab.cat]

(a) Interpolació i extropolació d'operadors.

(b) Espais Sobolev. Espais de Besov

15. Marc Masdeu [masdeu@mat.uab.cat] Teoria de nombres.

16. Joan Mateu [mateu@mat.uab.cat] Anàlisi Harmònica, Equacions de transport i Mecànica de fluids.

17. Artur Nicolau. [artur@mat.uab.cat] Anàlisi matemàtica.

18. Marcel Nicolau. [nicolau@mat.uab.cat] Geometria Diferencial.

19. Walter Ortiz. [waortiz@mat.uab.cat] Function spaces, Sobolev embeddings.

20. Francesc Perera. [perera@mat.uab.cat] Àlgebra No Commutativa, Àlgebres d'Operadors, Topologia No Commutativa, Semigrups ordenats.

21. Wolfgang Pitsch. [pitsch@mat.uab.es]

Propuestas temáticas (entre paréntesis el número de alumnos máximo por tema).

- Topología algebraica (2)
- Teoría de grupos (1)
- Álgebra conmutativa (1)

Se aceptan también temas propuestos directamente por los candidatos interesados, en ese caso venir a verme para hablar del tema.

22. Sergey Tikhonov. [stikhonov@crm.cat] Fourier analysis, Approximation theory, Real Functions. Topics: Convergence problem of number series, Inequalities for sums, Convergence of Fourier transforms. Maximum number of students: 3

23. Mercé Villanueva. [merce.villanueva@gmail.com] Teoria de codis correctors d'errors. Codis no lineals sobre l'anell Z/p^s .

3 Resums dels treballs tipus A

Àlgebres de Hopf. Tutor: Ramon Antoine

Les àlgebres de Hopf són una classe particular d'àlgebres amb una estructura dual associada que les fa particularment interessants, donant lloc per exemple a la introducció dels Grups Quàntics. Apareixen relacionades amb problemes de Topologia algebraica, de Teoria de Grups i en molts problemes de Física a través de classes particulars d'exemples.

El treball proposat és el la introducció formal de les àlgebres de Hopf, des d'una perspectiva algebraica, i complementar-la amb l'estudi concret d'alguna família particular d'exemples.

Anells de divisió: Més enllà dels quaternions. Tutor: Ramon Antoine

Un anell de divisió és un anell no trivial D on tot element no nul té invers. És a dir, un cos llevat que no és necessàriament commutatiu. En algun moment de la carrera és habitual que es parli dels *Quaternions de Hamilton* com a exemple de cos no commutatiu, però no es solen donar més exemples. En aquest treball es proposa aprofundir en l'estudi dels anells de divisió i fer-ho a través d'un problema concret.

Un exemple podria ser l'estudi del següent problema d'Artin per anells de divisió i desenvolupar els exemples corresponents donats per P.M. Cohn:

(Problema) Moltes de les coses que podem dir per a un cos són certes també per anells de divisió. Per exemple, podem definir espais vectorials sobre un anell de divisió D , tenir una noció de independència lineal, de base i per tant de dimensió. Així, si $k \subset D$ són anells de divisió, tenim el que s'anomena una extensió i podem preguntar-nos sobre el grau (dimensió) d'aquesta extensió $[D : k]$. Ara bé, és el mateix si es calcula la dimensió com a espai vectorial per l'esquerra ${}_k D$ que com a espai vectorial per la dreta D_k ?

P.M. Cohn respon negativament aquesta pregunta donant un exemple en què una les dimensions és finita i l'altre infinita. Més endavant Schofield dona exemples en què les dues dimensions són valors finits i arbitraris (diferents de 1).

Localització en anells no commutatius. Tutor: Ramon Antoine

La construcció del cos de fraccions d'un domini commutatiu és una de les eines bàsiques al curs d'Estructures Algebraiques. El procés és senzill, s'afegeixen formalment inverses pels elements no nuls i tot funciona més o menys com un espera, és a dir, com al cas de $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Més en general, una variant del mateix mètode ens permet invertir només certs conjunts d'elements i sense necessitat de fer-ho en un domini.

Aquests mètodes però no es poden traslladar directament al cas d'anells no commutatius, i en aquest camp sorgeixen diferents mètodes per obtenir anells de fraccions, que depenen de l'enfoc que es dona al problema.

Es proposa com a treball donar una visió general dels diferents mètodes de localització en anells commutatius, especialitzant-se si es vol en els detalls d'alguns d'ells.

Això pot incloure partir des del problema bàsic d'incloure monoides en semigrups (a través dels treballs de A.I Maltsev), el cas concret de la localització d'Ore (el més similar al cas commutatiu), fins la localització universal de P.M. Cohn.

Representacions de grups finits. Tutor: Pere Ara

Aquest treball consisteix en un estudi de les representacions lineals dels grups finits. Les representacions lineals són una eina molt potent per entendre l'estructura d'un grup, i tenen moltes aplicacions. Si G és un grup i V és un espai vectorial de dimensió finita sobre un cos K , llavors una representació de G sobre V és un morfisme de grups $\rho: G \rightarrow \text{Aut}_K(V)$, o sigui, cada element del grup defineix una aplicació lineal bijectiva $\rho(g)$ sobre V , de forma que $\rho(gh) = \rho(g) \circ \rho(h)$ per $g, h \in G$. Prenent una base de V sobre K , això és equivalent a estudiar els morfismes de grups $\rho: G \rightarrow GL_n(K)$, on $GL_n(K)$ és el grup de matrius invertibles de mida $n \times n$ sobre K . L'objectiu del treball és arribar a demostrar, utilitzant la teoria de representacions, el Teorema de Burnside, que diu que tot grup d'ordre $p^a q^b$, on p i q són primers diferents, és un grup resoluble. Una bona referència per aquest treball és el llibre [1].

Bibliografia

[1] Benjamin Steinberg, *Representation theory of finite groups. An introductory approach*, Universitext, Springer, New York, 2012.

Una introducció als grups infinits. Tutor: Pere Ara

Aquest treball consisteix en una introducció als grups infinits a través d'exemples de caire geomètric, seguint la magnífica referència recent [1]. Consistirà en l'estudi detallat d'una de les següents classes de grups: Els grups de Thompson, els grups auto-similars, el "lamplighter" o els grups de Baumslag-Solitar. Per donar una idea, els grups de Thompson es defineixen a través d'arbres binaris, o equivalentment a través d'aplicacions lineals a troços definides en l'interval unitat i que tenen pendent de la forma 2^k on k és enter. Els grups de Thompson \mathbf{T} i \mathbf{V} són grups simples (és a dir, sense subgrups normals no-trivials), infinits, i definits per un nombre finit de generadors i relacions. Aquests van ser els primers grups coneguts amb aquestes propietats. D'altra banda, els grups auto-similars estan definits a partir de certs automorfismes d'un arbre binari infinit que actuen de forma recurrent (auto-similar) en les diferents branques de l'arbre. Existeixen exemples d'aquests grups amb propietats molt remarcables, com l'anomenat grup de Grigorchuk i també l'anomenat grup "lamplighter".

Bibliografia

[1] Marianna C. Bonanome, Margaret H. Dean, Judith Putnam Dean, *A sampling of remarkable groups. Thompson's, self-similar, Lamplighter, and Baumslag-Solitar*. Compact Textbooks in Mathematics. Birkhäuser/Springer, Cham, 2018.

Àlgebres associades a grafs. Tutor: Pere Ara

Un graf és una estructura combinatoria bàsica, formada per un conjunt de vertexs i un conjunt d'arestes que connecten aquests vertexs. Un graf s'anomena *dirigit* si cada aresta està dotada d'una direcció, de forma que podem dir que va d'un vertex v a un altra vertex w . El treball consisteix en estudiar diferents àlgebres sobre un cos K que es poden associar a un graf dirigit E . Entre aquestes àlgebres figura l'anomenada *àlgebra de camins* de E , $P_K(E)$, que té com a base el conjunt format per tots els camins dirigits que podem formar en el graf E . El producte de dos camins dirigits es defineix com la concatenació dels camins dirigits, si aquests es poden concatenar, o 0

en cas contrari. En els darrers anys, s'està estudiant també una altra àlgebra associada a E , l'anomenada *àlgebra de camins de Leavitt* de E , denotada per $L_K(E)$. Aquesta àlgebra representa una simetrització de l'àlgebra de camins. Per exemple si A_n denota el graf dirigit amb n vertèxos v_1, v_2, \dots, v_n i amb arestes e_1, e_2, \dots, e_{n-1} tals que e_i connecta v_i amb v_{i+1} , llavors l'àlgebra de camins $P_K(A_n)$ és l'àlgebra $UT_n(K)$ de matrius triangulars superiors, de mida $n \times n$. En canvi, l'àlgebra de camins de Leavitt $L_K(E)$ és l'àlgebra $M_n(K)$ de totes les matrius de mida $n \times n$ sobre K . El treball consisteix en estudiar com diferents propietats del graf es reflexen en l'estructura algebraica de les àlgebres associades. Una bona referència és el llibre [1].

Bibliografia

[1] Gene Abrams, Pere Ara, Mercedes Siles Molina, *Leavitt path algebras*, Lecture Notes in Mathematics, 2191. Springer, London, 2017.

Estudi d'una família quadridimensional de sistemes diferencials quadràtics (3 propostes diferents per a 3 TFG's). Tutor: Joan C. Artés

La Teoria Qualitativa és una de les branques més joves de les matemàtiques amb poc més d'un segle de vida. Sorgeix de la necessitat de trobar formes alternatives de resoldre equacions diferencials (especialment sistemes) sense haver de trobar una solució específica.

La Teoria Qualitativa es pot aplicar a una gran quantitat de problemes diferents. En problemes molt generals pot donar algunes solucions locals, però en problemes més concrets pot arribar a obtenir solucions globals.

Una de les aplicacions es troba en la resolució de sistemes d'equacions diferencials polinomials.

Les equacions diferencials lineals ja van ser completament resoltes a principis del segle XIX, fins i tot en dimensió n arbitrària. Sembla natural doncs preguntar-se per les equacions diferencials quadràtiques, és a dir, on les derivades venen donades per polinomis de grau 2 com a molt en les variables.

Doncs resulta que aquest problema, fins i tot en dimensió 2, continua obert, i és desconegut encara quantes solucions diferents pot tenir un sistema d'aquesta mena. Sembla una mica difícil de creure donat que molts altres problemes polinomials de grau 2, com la classificació de les còniques, o de les quàdriques han estat resolts fa molt de temps, aquest continua obert des de fa més de 100 anys. Potser si diem que els sistemes diferencials lineals en el pla tenen només 11 possibles solucions, i en canvi els quadràtics en tenen més de mil, es pugui entendre el perquè de la dificultat.

Al llarg dels darrers cent anys s'han estudiat centenars de famílies de sistemes diferencials quadràtics. El mètode clàssic d'estudi d'aquestes famílies ha estat buscar les seves singularitats, finites i infinites, i tractar d'avaluar el jacobià en aquests punts.

Això ha obligat a buscar formes normals on al menys dues singularitats finites fossin senzilles de trobar.

Però això ha limitat molt el nombre de paràmetres que podien arribar a deixar-se com a graus de llibertat. Tradicionalment, s'han pogut estudiar famílies amb fins a 3 paràmetres i els pocs estudis amb famílies de 4 paràmetres o més, estan sota revisió doncs s'han detectat alguns errors en ells.

Recentment, un parell de professors de la UAB juntament amb d'altres col·laboradors internacionals, han desenvolupat un mètode que permet estendre aquests estudis a famílies de 4 paràmetres (i fins i tot 5) sense necessitat de fixar (ni tan sols localitzar) els punts

singulars. Això ha convertit treballs de fi de grau de fa 30 anys en simples exercicis, i tasques de tesis en treballs de fi de grau.

En aquesta línia proposo doncs 3 tasques d'investigació que considero adequades per a un treball de fi de grau. Totes elles impliquen estudiar una família de sistemes diferencials quadràtics amb 4 paràmetres.

- 1) Estudi dels sistemes diferencials quadràtics amb un focus feble de primer ordre i un sella-node finit
- 2) Estudi dels sistemes diferencials quadràtics amb un focus feble de primer ordre i un sella-node infinit de tipus (1,1)
- 3) Estudi dels sistemes diferencials quadràtics amb un focus feble de primer ordre i un sella-node infinit de tipus (0,2)

Els alumnes rebran informació avançada sobre Teoria Qualitativa, i s'hauran de llegir diversos articles on es resolen sistemes similars per tal d'assimilar la metodologia. També rebran els programes informàtics necessaris per poder-los resoldre. Els caldrà adaptar els programes al problema concret que hagin escollit.

Els resultats d'aquests treballs son factibles de ser publicats en revistes matemàtiques i serviran que engrandir la base de dades del conjunt de sistemes diferencials quadràtics.

Grafs amb llarga sístole. Tutor: Florent Balacheff

L'objectiu d'aquest TFG ser d'entendre diferents construccions de grafs amb llarg sístole. La sístole és pot pensar com el temps mínim amb el qual un camí d'un graf torna al seu punt inicial. Per tant els grafs amb llarg sístole modelitzen xarxes on la informació viatja el més eficaçment perquè el temps de retorn d'una informació és maximal en relació amb la mida del graf. Estudiarem dos punts de vista. En primer lloc, mostrarem que la mida del gràfic condiona la longitud màxima de la sístole. En segon lloc, construïrem utilitzant mètodes probabilístics per una banda i algebraics per una altra, gràfics òptims per a aquest problema.

Bibliografia:

Bollobas, B. Szemerdy, E.: Girth of sparse graphs. J. Graph Theory 39 (2002).

Bollobas, B.: Extremal graph theory with emphasis on probabilistic methods. CBMS Regional Conference Series in Math. 62.

Margulis, G.: Explicit constructions of graphs without short cycles and low density codes. Combinatorica 2 (1982).

Desigualtat isosistílica d'Ivanov. Tutor: Florent Balacheff

Una desigualtat isosistílica és una mena de desigualtat isoperimétrica inversa, que permet obtenir una cota inferior sobre el volum d'un objecte geomètric en funció de la longitud de certes corbes tancades que conté. En aquest TFG, discutirem la noció de sístole, de mètrica de Finsler, així com les diferents nocions de volum associades. Aquestes nocions formen els ingredients d'un teorema degut a Ivanov, demostrant la desigualtat isosistílica òptima del pla projectiu. Si el temps ho permet, també podem discutir el vincle entre aquestes desigualtats i la noció de filling volume.

Bibliografia:

Ivanov, S. : Filling minimality of Finslerian 2-discs. Proc. Steklov Inst. Math 273 (2011).

Burago, D., Burago, Y. & Ivanov, S.: A course in metric geometry. Graduate Studies in Mathematics 33.

Exponencial de Carlitz i nombres de Bernoulli-Carlitz. Tutor: Francesc Bars

La funció exponencial de Carlitz és un anàleg en característica positiva de la funció exponencial. Els nombres complexos són substituïts per un altre cos i que té una propietat peculiar, hi ha xarxes de rang tan gran com volem. Un com hem entengut l'anàlisi involucrat i definir la exponencial de Carlitz, els nombres de Bernoulli-Carlitz apareixen de manera anàloga com surten per la exponencial complexa, aquest desenvolupament en series via el factorial es canvia per un factorial convenient. És un problema obert estudi de congruències entre aquests nombres, el problema clàssic va ser resolt per Kummer, congruències de Kummer.

Bibliografia:

David Goss: Basic Structures of Function Field Arithmetic, Springer 1996.

David Goss: The ongoing binomial revolution. Preprint 2011.

David Goss: ζ -phenomenology. Preprint 2009. To appear

Anàleg de la funció zeta en característica positiva, funció zeta de Carlitz-Goss. Tutor: Francesc Bars

Considerem l'anell de polinomis a coeficients un cos finit \mathbb{F}_q i considera la suma

$$\zeta(n) = \sum_{a \text{ monic}} \frac{1}{a^n}$$

Donem un sentit analític a l'expressió donant un valor. Estudiareu si aquests valors són algebraics o no, si es pot escriure un anàleg de funció zeta de Riemann, i que succeeix als negatius i amb l'equació funcional. El treball ha de centrar-se en definir i treballar una modificació de la funció zeta de Carlitz proposada pel professor Federico Pellarin (2010) i el valor d'aquesta funció en el 1, fent una introducció a la funció zeta de Carlitz i l'analogia amb la funció zeta de Riemann.

Referències:

David Goss: Basic Structures of Function Field Arithmetic, Springer 1996.

David Goss: The ongoing binomial revolution. Preprint 2011.

David Goss: ζ -phenomenology. Preprint 2009. To appear

Extensions abelianes explícites sobre els racionals, teorema de Weber. Tutor: Francesc Bars

Demostrar el teorema de Weber que afirma que tota extensió finita K/\mathbb{Q} Galois amb grup de Galois abelià està que $K \subseteq \mathbb{Q}(e^{2\pi i/m})$ per cert m .

Extensions abelianes explicites sobre el cos de fraccions de l'anell de polinomis sobre un cos finit, Drinfeld-Hayes. Tutor: Francesc Bars

El treball vol demostrar que tota extensió finita $L/\mathbb{F}_q(t)$ Galois amb grup de Galois abelià compleix que $L \subseteq \mathbb{F}_q(t)[C_L]$ on C_L és certa torsió del mòdul de Carlitz (o de Drinfeld). Às pot fer el cas general de Drinfeld en un dels papers clau qu'Às van fer concedir-li la medalla Fields.

Bibliografia:

David Goss: Basic Structures of Function Field Arithmetic, Springer, 1996.

Dinesh Thakur: Function Field Arithmetic. Academic Press.

Extensions ciclotòmiques. Tutor: Francesc Bars

Ja heu vist que el primer lloc on apareixen les extensions ciclotòmiques en l'estudi de la resolubilitat de les equacions per radicals. Aquest tema consisteix en un estudi profund d'extensions ciclotòmiques.

Bibliografia: D. Washington: Cyclotomic Fields, GTM, Springer.

S. Lang: Cyclotomic Fields I, II. GTM, Springer.

Atacant el teorema de Fermat, idees de Kummer. Tutor: Francesc Bars

Un dels resultats matemàtics més importants en els últims anys és la demostració de Andrew Wiles de l'últim teorema de Fermat, és a dir que l'equació $X^n + Y^n = Z^n$ amb $n \geq 3$ no té cap solució amb $XYZ \neq 0$ amb $X, Y, Z \in \mathbb{Z}$.

Fixeu-vos que podem escriure l'equació en l'anell $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$ mitjançant:

$$\prod_{j=1}^n (X + e^{2\pi i j/n} Y) = Z^n$$

i per tant una primera idea per atacar l'últim Teorema de Fermat és estudiar factoritzacions d'elements en l'anell $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$.

Lammé en l'any 1847 va presentar una demostració en l'Acadèmia de les Ciències de Paris. Kummer ja sabia que era errònea la demostració. Perquè? Doncs la demostració de Lammé suposava que l'anell $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$ era un DFU (domini de factorització única) i Kummer ja havia demostrat en l'any 1844 que per tan sols un nombre finit de n l'anell $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$ és un DFU.

El treball consisteix en treballar propietats dels anells $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$ o més en general del que es coneixen actualment dels anells anomenats dominis de Dedekind, un cas concret són els anells $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$. En particular el treball consisteix en demostrar que aquests anells tenen factorització única amb ideals. Si l'alumne té més interès i vol aprofundir més, podrà intentar donar unes traces de la prova del teorema de Fermat per a primers regulars obtinguda per Kummer (resultat més important del teorema de Fermat fins que el 1995 Wiles enunciaciava una demostració modular seguint la idea de Frey que traslladava el teorema de Fermat al camp modular de corbes el·líptiques).

Bibliografia:

Dino Lorenzini: "An invitation to Arithmetic Geometry". Chapter I and III§1 – 4. SGM volum 9, American Mathematical Society.

M.F.Atiyah-I.G.Macdonald: "Introducción al Álgebra conmutativa". Ed. Reverté. Capítol 9.

Z.I.Borevich-I.R.Shafarevich: "Number Theory", Academic Press. Chapter III.

K.Kato-N.Kurokawa-T.Saito: "Number theory 1: Fermat's dream". Iwasawa series, AMS. Chapter 4.

La funció zeta de Riemann, diverses meravelles de la funció. I Tutor: Francesc Bars

Considerem la funció zeta de Riemann

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (1)$$

per $s \in \mathbb{C}$ amb $Re(s) > 1$, on $Re(s)$ denota la part real del nombre complex s .

Euler als 28 anys va aconseguir sumar $\zeta(2k)\pi^{-2k} \in \mathbb{Q}$ amb $k \geq 1$ un natural. Primer misteri de la funció zeta: en els enters positius $2k$ existeix un nombre transcendent Ω_{2k} sobre \mathbb{Q} (anomenat un període) on $\zeta(2k)/\Omega_{2k}$ és un nombre racional!! conjecturalment aquesta propietat passarà per $\zeta(2k+1)$ amb $k \geq 1$.

Euler als 30 anys va demostrar que la funció zeta té un producte d'Euler, és a dir:

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primer}} (1 - p^{-s})^{-1}, \quad Re(s) > 1$$

Euler als 32 anys va avaluar els valors $\zeta(1-d)$ amb $d \geq 1$ natural, però us preguntariu: com? Fins ara $\zeta(s)$ sol està definida per a $Re(s) > 1$!!! Us recomano llegir la primera referència.

Riemann uns anys més tard, va formalitzar $\zeta(s)$ per a $Re(s) \leq 1$, on tan sols per $Re(s) > 1$ és de la forma anterior (1). Per exemple Euler afirmava:

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-1) = \frac{-1}{12}, \quad \zeta(-11) = \frac{691}{2^3 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13},$$

Amb la definició formal de Riemann per a $\zeta(s)$ amb $Re(s) \leq 1$, els valors que va donar Euler són els correctes !!!!!

Igualment Euler comparant els valors entre d i $1-d$ va obtenir una equació que relacionava la funció zeta de Riemann avaluada en s amb la funció zeta de Riemann avaluada en $1-s$ amb s enter. Amb el anys, va ser Riemann qui demostra formalment aquesta equació: escrivim $Z(s) := \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$ on la funció Γ és relacionada amb la funció apareguda a probabilitat, tenim una equació que relaciona $\zeta(s)$ amb $\zeta(1-s)$, mitjançant (segon fet sorprenent)

$$Z(s) = Z(1-s).$$

Quan $Z(s) = 0$? Riemann va conjecturar (i també ja ho havia afirmat Euler abans!!!) que això succeirà tan sols quan $Re(s) = 1/2$, aquest és un altre dels problemes que l'Institut Clay premia amb un milió de dòlars.

Bé fixem-nos en els següents fets sorprenents de la funció zeta de Riemann: té un producte d'Euler, s'estén a una funció analítica a tots els nombres complexos, admet una equació funcional i misteriosament avaluada als enters apareixen certs valors racionals. Anem a aprofundir en aquesta última propietat.

Té algún significat aritmètic $\zeta(0) = -1/2$? Sí! El resultat $1/2$ per $\zeta(0)$ és el cas concret de la famosa fórmula de nombre de classes aplicada al cos \mathbb{Q} , per exemple el 2 apareix perquè és el nombre d'arrels de l'unitat que té el cos \mathbb{Q} , que són $\{1, -1\}$.

Anem tot seguit a buscar resultats aritmètics als altres valors de la funció zeta avaluada als enters.

De l'equació funcional podem relacionar $\zeta(r)$ amb $\zeta(1-r)$ per tant centrem-nos amb r estrictament negatiu per a buscar el significat aritmètic del valor racional que surt. Es demostra que $\zeta(r) \in \mathbb{Q}$ per un enter r negatiu i tan sols ens interessa el significat per r senars ja que en els parells $\zeta(r)$ s'anul·la (recordeu la dificultat per $\zeta(1+r)$ si r és parell!!). Kummer va donar quins denominadors han de sortir i congruències modul primer p per a diversos d'aquests r . Anem però a preguntar-nos sobre el significat que aporta que un nombre que surt al numerador de $\zeta(-2\ell - 1)$ amb $\ell \in \mathbb{N}$. Recordeu per exemple que $\zeta(-11) = \frac{691}{2^3 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13}$, hi ha un significat aritmètic en el fet que surti 691, i que aquest surti en avaluant-ho al número -11?

Doncs la resposta és SI!!!! Per a justificar que surt el 691 és gràcies al que s'anomena el criteri de Kummer, que afirma p divideix el numerador de $\zeta(r)$ per algun r negatiu senar si i només si aquest primer apareix en l'ordre d'un grup associat al cos $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})$ (aquest grup s'escriu $Cl(\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p}))$), màgic no? Però l'anterior criteri de Kummer no ens explica quin paper hi juga el 11. Perquè el 691 surt en avaluar al -11? Bé per això s'usa la teoria Iwasawa, teoria molt tècnica però molt interessant, i resulta que -11 apareix en un factor de fer la descomposició del grup $Cl(\mathbb{Q}(e^{2\pi i/691}))$ via l'acció del grup $Gal(\mathbb{Q}(e^{2\pi i/691})/\mathbb{Q})$, aquests resultats en teoria Iwasawa corresponen ja a l'any 1976!!

El treball consisteix en l'estudi aritmètic dels valor enters de la funció zeta, les congruències de Kummer (congruències entre nombres de Bernouilli) el teorema de van Staudt i si hi ha molta energia el criteri de Kummer.

Bibliografia:

K.Kato-N.Kurokawa-T.Saito: "Number theory 1: Fermat's dream". Iwasawa series, AMS. Chapter 3.

J. Neukirch: "Algebraische Zahlentheorie", Springer. També traduït a l'anglès. Kapitel VII-§1.

La funció zeta de Riemann, diverses meravelles de la funció. II Tutor: Francesc Bars

Intentar plantejar la hipòtesi de Riemann i els diversos punts de vista per tal que els zeros es trobin tots a $1/2$.

Aritmètica de corbes planes no singulars. Tutor: Francesc Bars

La tesis del meu estudiant Eslam Badr aportem un estudi general de corbes planes no singulars majoritàriament en característica zero amb automorfismes, respecte el loci dins l'espai de moduli. (Veieu papers de la tesis de l'Eslam Badr a la meua web). Un exemple de

corba plana és l'equació de Fermat $X^n + Y^n = Z^n$, en general una corba plana no singular es certa expressió polinomial de grau d homogeni amb les variables X,Y,Z sota certes condicions.

El treball pot estudiar preguntes que queden obertes de la tesis, sobre cossos finits de característica positiva petita, un estudi dels punts de certes corbes que no siguin la de Fermat ni la de Klein,... i per tant podria ser un treball original.

Forats negres i grups de classes. Tutor: Francesc Bars

Entendre els resultats del treball: BLACK HOLES AND CLASS GROUPS, NATHAN BENJAMIN¹, SHAMIT KACHRU¹, KEN ONO², AND LARRY ROLEN. arXiv:1807.00797v1

Models epidemiològics estocàstics. Tutor: Giulia Binotto.

El segle passat es van començar a utilitzar models matemàtics per l'estudi del comportament de les pandèmies. Entre els més utilitzats es troben els SIR, uns tipus de models senzills on la població és dividida en compartiments formats per individus que comparteixen les mateixes característiques. L'objectiu d'aquest treball és estudiar aquest tipus de models, primer amb un enfocament determinista i després estocàstic. Es completarà el treball amb simulacions per determinar com evoluciona una pandèmia en funció dels diferents paràmetres presos en consideració. A més a més, es podran estudiar algunes variants més complexes dels models SIR.

S'aconsella que l'estudiant interessat en aquest treball segueixi el curs de Processos Estocàstics.

Algunes aplicacions de l'anàlisi complexa a la física. Tutors: Josep Maria Burgés i Joan Mateu

L'objectiu d'aquest treball fi de grau és utilitzar eines d'anàlisi complexa en certs problemes de la física i de la tècnica en dos dimensions. Les aplicacions proposades tenen relació amb Hidrodinàmica, Dinàmica de gasos, Electricitat i Elasticitat.

Mecànica quàntica: Tutors: Josep Maria Burgés

Es tracta d'estudiar i desenvolupar un tema de Mecànica Quàntica des del punt de vista de l'Anàlisi (Funcional, Complexa, Real, Harmònica i/o EDPs). L'objectiu és entendre i aprofundir aspectes de la matèria, intentant de fer una aproximació raonable i evitar al màxim el surrealisme (i altres aproximacions).

Dinàmica de poblacions estructurades. Tutor: Àngel Calsina.

La dinàmica de poblacions estructurades s'ocupa dels canvis en la mida de les poblacions biològiques heterogènies. Exemples d'això són les poblacions d'individus de diferents mides o les distribucions espacials en Ecologia o les d'individus susceptibles i d'infectats en diferent grau en Epidemiologia.

Les eines matemàtiques que s'utilitzen són les equacions diferencials i en derivades parcials per a les densitats de població i/o les equacions integrals per a les taxes de naixement.

Una situació natural però matemàticament complexa sorgeix en la dinàmica de poblacions estructurades per la mida quan la velocitat de creixement individual depèn de la pròpia població degut a la competència pels recursos (per exemple en la competència forestal per

la llum). Això fa el model quasilineal (significa que la part principal de l'equació conté termes no lineals amb derivades d'ordre inferior a l'ordre màxim) i possiblement no local (perquè les interaccions no es produeixen només entre individus de la mateixa mida).

Consideraríem un model en aquest camp i miraríem d'estudiar-ne els equilibris. A més, el formularíem usant equacions en derivades parcials i també mitjançant equacions integrals de Volterra.

Transformacions conformes. Tutor: Joan Josep Carmona.

1. Teorema de representació conforme de Riemann. La demostració de Riemann i la de Fèjer i Koebe.
2. Les representacions conformes explícites donades per les transformacions de Cristoffel-Schwarz. Casos particulars i generals.
3. Exploració d'àmbits de la tecnologia on aquestes transformacions tinguin una funció, tant si és dèbil com essencial. Aquí serà important tenir nocions tècniques i capacitat de buscar referències en àmbits no matemàtics.

Teorema de Phragmén-Lindelöf i funcions quasi-analítiques. Tutor: Magdalena Caubergh.

Aquest treball es basa en l'Anàlisi Complexa amb una possible aplicació en l'àrea de Sistemes Dinàmics contínuus.

A l'Anàlisi Complexa sabem que el mòdul d'una funció holomorfa a l'interior d'una regió fitada està delimitat pel mòdul màxim a la frontera de la regió. Aquest principi és conegut com al principi del mòdul màxim. No es pot aplicar aquest principi per una regió no fitada del pla complex. El Teorema de Phragmén-Lindelöf és una extensió del principi del mòdul màxim per a funcions en regions no fitades.

Estudiem aquest teorema i el fem servir en l'estudi de les funcions quasi-analítiques. Així es demostra que les zeros d'una funció quasi-analítica són aïllades si la funció no és idènticament zero.

Dependent de l'interés de l'estudiant es pot aprofundir més en les aplicacions del Teorema de Phragmén-Lindelöf en l'Anàlisi Complexa o estudiar-ne una aplicació a l'àrea dels Sistemes Dinàmics. Analitzant l'estructura de la transició prop d'una sella hiperbòlica determinada pel flux d'un sistema analític d'equacions diferencials es pot demostrar que aquesta transició defineix una funció quasi-analítica. Aleshores aquest resultat permet demostrar una versió simplificada del Teorema famós de Dulac que diu que el nombre d'òrbites periòdiques aïllades per a un sistema d'equacions diferencials analític al pla és finit.

Les propietats anti-intuitives de les distribucions de probabilitat amb mitjana o varianza infinites. Tutor: Álvaro del Corral, Grup de Sistemes Complexos, Centre de Recerca Matemàtica.

Teoria: estimació per màxima versemblança de la llei de Zipf, lleis de potencia i correlacions en distribucions bivariades.

Aplicacions a sistemes complexos: economia, demografia, propagació d'epidèmies, música, desastres naturals, clima, etc.

Condió de Lipschitz i diferenciabilitat de funcions. Tutor: Julià Cufí

Contingut:

- Funcions lipschitzianes, de variació acotada i absolutament contínues a la recta
- Teorema de derivació de Lebesgue
- El teorema de Rademacher a R^n
- La generalització de Stepanov del teorema de Rademacher
- El teorema de Rademacher en altres contextos

Referències bàsiques:

- H.L. Royden, 'Real Analysis' The Macmillan Company, London, 1968
- W.P. Ziemer 'Weakly differentiable functions' Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1989

Lògica matemàtica borrosa (mathematical fuzzy logic). Tutora: Pilar Dellunde

Objectius: Conèixer els principals sistemes de lògica borrosa per representar coneixement i raonament en intel·ligència artificial.

Breu descripció: Estudi de les t-normes contínues. Introducció als llenguatges de la lògica proposicional real-valorada, als reticles residuats i demostració del teorema de completeness. Es demanarà a l'alumne que presenti exemples bàsics de modelització i representació del coneixement en intel·ligència artificial utilitzant els llenguatges formals apresos.

Valoracions, teorema de Hadwiger, geometria integral i probabilitats geomètriques. Tutors: Gil Solanes, Eduard Gallego.

En poques paraules una valoració és un funcional additiu sobre el conjunt de convexos. La característica d'Euler i el volum són valoracions. El teorema de Hadwiger diu que les valoracions contínues i invariants per isometries a l'espai euclidià són un espai vectorial generat per la característica d'Euler, el volum i els volums intrínsecs. En aquest treball es s'hauria d'estudiar la demostració de Klain d'aquest teorema i veure les implicacions que té en geometria integral i probabilitats geomètriques.

La fórmula de Gauss-Bonnet en varietats. Tutors: Gil Solanes, Eduard Gallego.

Un dels teoremes més importants en geometria diferencial és el teorema de Gauss-Bonnet que relaciona la geometria mètrica de la varietat amb la seva topologia.

En aquest treball s'haurà d'enunciar la versió que Chern va donar de la fórmula de Gauss-Bonnet. Per arribar a aquest punt caldrà passar pels fibrats, les connexions i les classes característiques.

Fórmula cinemàtica de Blaschke-Santaló Tutors: Eduard Gallego, Gil Solanes.

La fórmula cinemàtica de Blaschke-Santaló està relacionada amb la fórmula de Crofton que són temes centrals de la geometria integral. Hi ha diverses variants i anàlegs d'aquestes fórmules, en part motivades per les aplicacions. En el treball s'hauran de presentar i provar les fórmules clàssiques i explicar els desenvolupaments recents al voltant d'elles.

New graph's theory based molecular descriptors to define molecular architectures. Tutor: Yamila Garcia.

Propuesta para trabajo en implementación numérica (preferiblemente programación en C/C++, o Python). El objetivo es que el estudiante implemente modelos previamente desarrollados para describir propiedades estructurales de moléculas. Este trabajo puede permitir introducir un nuevo "descriptor molecular", y por tanto puede ser relevante como contribución en el área de diseño molecular. El programa desarrollado por el estudiante deseamos sea incluido como plugin al programa científico actualmente disponible "VMD" (<https://www.ks.uiuc.edu/Research/vmd/plugins>), lo que daría una relevancia académica adicional al trabajo.

An electrical description of chemical bonds. Tutor: Yamila Garcia.

Propuesta para contribución en desarrollo de modelo matemático. El objetivo es usar criterios físico-matemáticos para contribuir en un área usualmente tratada por los químicos: la descripción de los enlaces intramoleculares. Ya desde el año 1936, Pauli enunció la necesidad de usar criterios eléctricos para describir estas interacciones (enlaces), y aun en el año 2011 según reporta la IUPAC carecemos de modelos de tal calibre para adentrarnos en el mundo molecular. Por tanto, completando trabajos que tenemos preliminares en el área, pretendemos que el estudiante contribuya a cerrar la propuesta de un modelo eléctrico para caracterizar enlaces y que supla las carencias que tienen los modelos termodinámicos actuales. El desarrollo de este trabajo puede permitir al estudiante trabajar de forma sistemática, pero también innovar e incluso publicar sus resultados.

A new electrical based molecular descriptor to define intramolecular bonds. Tutor: Yamila Garcia.

Propuesta para trabajo en implementación numérica (preferiblemente programación en C/C++, o Python). El objetivo es que el estudiante implemente modelos previamente desarrollados para describir enlaces interatómicos. Este trabajo puede permitir introducir un nuevo "descriptor molecular", y por tanto puede ser relevante como contribución en el área de diseño molecular. El programa desarrollado por el estudiante deseamos sea incluido como plugin al programa científico actualmente disponible "VMD" (<https://www.ks.uiuc.edu/Research/vmd/plugins>), lo que daría una relevancia académica adicional al trabajo.

Òrbites periòdiques d'equacions diferencials al pla. Tutor: Armengol Gasull

Un dels problemes més difícils i d'interès actual de la teoria qualitativa d'equacions diferencials al pla és el de la determinació del nombre de cicles límit que poden tenir certes famílies d'equacions. En aquest treball es proposa estudiar i aplicar en diversos exemples el mètode conegut per a trobar o bé fites superiors o bé fites inferiors del nombre de cicles límit. Els temes que s'estudiaran són: Teorema de Cherkas-Zhang Zhifen, Teorema de Bendixson-Dulac, Equacions d'Abel, Constants de Lyapunov, Integrals Abelianes,...

Equacions diferencials de Riccati i d'Abel. Tutor: Armengol Gasull

Les equacions diferencials no lineals més senzilles són les ED de Riccati i les d'Abel. Aquestes equacions son casos particulars ($n = 2$ i $n = 3$, respectivament) de la família d'ED polinomials en x ,

$$\frac{dx}{dt} = a_n(t)x^n + a_{n-1}(t)x^{n-1} + \dots + a_1(t)x + a_0(t).$$

En aquest treball es proposa estudiar, tant propietats de aquesta família d'ED com la seva relació amb temes clàssics i actuals de recerca. Per exemple: el problema XVI de Hilbert, el seu número de solucions periòdiques, el conegut com problema dels moments, la caracterització dels "centres", la seva integrabilitat, les seves pertorbacions i les funcions de Melnikov associades, l'estudi de la existència i número de solucions polinomials o racionals, ... Com a motivació addicional, s'estudiaran problemes de modelització on aquestes equacions juguen un paper fonamental. Així, per exemple, es veurà com l'estudi d'una equació de Riccati va ser fonamental en l'implantació de la vacunació com a mètode per a controlar la verola.

El mètode del balanç harmònic. Tutor: Armengol Gasull

Les solucions periòdiques d'una equació diferencial es poden aproximar per les seves corresponents series de Fourier. El mètode del balanç harmònic (MBH) és un mètode heurístic per a trobar aquestes aproximacions que es utilitza sovint en treballs de física i enginyeria. L'objectiu d'aquest treball serà aplicar el MBH a certes famílies d'equacions diferencials, tant per aproximar les seves solucions periòdiques com els seus corresponents períodes, així com estudiar resultats teòrics que permeten assegurar que prop de les solucions aproximades obtingudes hi ha veritables solucions periòdiques de l'equació diferencial. També es plantejaran mètodes alternatius al MBH que intenten donar aproximacions més acurades de les series de Fourier de les òrbites periòdiques

Òrbites periòdiques per sistemes dinàmics no autònoms. Tutor: Armengol Gasull

En aquest treball s'estudiarà com controlar el número d'òrbites periòdiques que bifurquen d'una EDO o d'un sistema dinàmic discret, no autònom a \mathbb{R}^n , que presenten continus d'òrbites periòdiques, a partir de les seves equacions variacionals d'ordre k associades. Es veurà com, usant aquest mètode, la qüestió es redueix a un problema de buscar solucions d'un sistema d'equacions. S'aplicaran les tècniques desenvolupades a diverses situacions. En particular, a l'estudi del número de cicles límit de certes EDO autònoms al pla o a l'estudi de equacions en diferencials de Riccati o Abel.

La funció de Lambert i les seves aplicacions. Tutor: Armengol Gasull

La funció de Lambert apareix en diversos àmbits de la ciència: matemàtiques, física, química, ... Es defineix com la funció $y = W(x)$ que compleix l'equació $ye^y = x$. En aquest treball es proposa, primer estudiar el treball de Corless i altres, *On the Lambert W function*, per a entendre la seva ubiqüitat i les seves propietats matemàtiques, i en segon lloc aplicar-la en diferents problemes matemàtics, com per exemple:

- Parametritzar les corbes de certs sistemes Hamiltonians per a estudiar més fàcilment les bifurcacions que apareixen quan els pertorbem.

- La cerca d'expressions explícites per les constants normalitzadores a_n i b_n que fan que la convergència en llei de

$$\frac{M_n - a_n}{b_n}$$

cap el seu límit sigui més ràpida, on $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ i $X_j, j = 1, 2, \dots, n$ són variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes. Per exemple, quan les variables aleatòries son χ^2 , el límit de $(M_n - a_n)/b_n$ té distribució de Gumbel. Aquest fet s'utilitza en la detecció de senyals de satèl.lits.

Geometria de webs. Tutor: David Marín

Fer una introducció geomètrica i dinàmica a la teoria de webs en el pla (superposició finita d'òrbites de camps vectorials).

Grups, geometria i dinàmica. Tutor: David Marín

Triar i desenvolupar (donant les idees de les demostracions) alguns dels temes de la sèrie de conferències "My Favorite Groups que E. Ghys va impartir a l'Escola de Altos Estudos (IMPA), disponibles en youtube.

Mathematical Omnibus. Tutor: David Marín

Triar i desenvolupar alguns dels temes del llibre Mathematical Omnibus de D. Fuchs y S. Tabachnikov disponible en <http://www.math.psu.edu/tabachni/Books/taoba.pdf>

Geometry and the imagination. Tutor: David Marín

Triar i desenvolupar alguns dels temes del llibre Geometry and the imagination de D. Hilbert and S. Conh-Vossen.

Optimal Sobolev embeddings. Tutor: Joaquim Martín

The main objective will be study the optimality of rearrangement invariant Banach spaces in Sobolev embeddings. In other words, we would like to know that the rearrangement invariant Banach range space and the rearrangement invariant Banach domain space are optimal in the Sobolev embedding, in the sense that domain space cannot be replaced by a larger rearrangement invariant Banach space and range space cannot be replaced a smaller one.

Espais invariants per reordenació i interpolació. Tutor: Joaquim Martín

Contingut:

- Espais de funcions.
- Espais invariants per reordenació
- Interpolació d'operadors en espais invariants per reordenació.

Bibliografia:

Bennett, C. and Sharpley, R. *Interpolation of Operators*, Academic Press, Boston (1988).

El teorema de Mordell–Weil. Tutor: Marc Masdeu.

El teorema de Mordell–Weil diu que totes les solucions d’una equació de la forma $y^2 = x^3 + ax + b$ es poden obtenir a partir d’un nombre finit d’elles mitjançant una construcció geomètrica (el mètode de la secant i la tangent). La proposta consisteix en entendre tots els ingredients de la demostració: el mètode del descens (estudi de les altures), la cohomologia de Galois, i l’estudi d’extensions de cossos de nombres amb ramificació controlada.

La teoria de mòduls singulars. Tutor: Marc Masdeu.

Es molt famosa la següent “coincidència numèrica”:

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743.99999999999925 \dots$$

Sembla que una combinació de quantitats transcendents (e i π) amb nombres algebraics ($\sqrt{163}$) resulti en un nombre enter. De fet, el valor exacte del membre de l’esquerra no és enter (ni tan sols racional) però s’hi apropa molt! L’objectiu del treball és el d’entendre d’on surt aquesta “coincidència”. Això ens durà a estudiar funcions modulars i els seus valors en punts quadràtics, que és el començament d’una teoria d’una enorme bellesa.

Equació d’Euler i mecànica de fluids. Tutors: Joan Mateu

En dinàmica de fluids, les equacions d’Euler són les que descriuen el moviment d’un fluid compressible no viscos. La seva expressió correspon a les equacions de Navier-Stokes quan les components dissipatives són menyspreables enfront de les convectives. En aquest treball ens proposem estudiar els conceptes de vorticitat i fluids incompressibles a més de revisar alguns conceptes de equacions en derivades parcials que ens poden ser d’utilitat.

La transformada de Hilbert i la desigualtat de Cotlar. Tutor: Joan Mateu

Aquest treball es pot considerar una introducció a la teoria d’integrals singulars, que és un dels camps de la matemàtica en els quals s’ha estat treballant més durant els darrers 50 anys, obtenint-se molt bons resultats. La transformada de Hilbert que sorgeix de l’estudi de les propietats de la funció harmònica conjugada és el primer exemple de integral singular. En aquest treball es tractaria d’entendre les propietats de la transformada de Hilbert i la seva acotació sobre els espais L^p .

Simetria: Grups de Lie clàssics i les seves representacions. Tutor: Marcel Nicolau.

Els grups de Lie, com per exemple els grups ortogonals $O(n)$ i $O(p,q)$, o els grups unitaris $U(n)$ i $SU(n)$, apareixen de forma natural com grups de simetries contínues de determinades estructures geomètriques i juguen un paper central en moltes branques de les matemàtiques.

Així mateix, els grups de Lie són també importants en física matemàtica, des de la mecànica clàssica fins a les teories d'unificació que utilitzen fortament les propietats algebraiques de grups, com $U(1)$, $SU(2)$ i $SU(3)$, o la teoria de la relativitat on el grup de Lorentz $O(1,3)$ i el grup de Poincaré juguen un paper primordial. Aquest treball és una introducció a l'estudi dels grups de Lie clàssics a través de les seves representacions lineals considerant en detall algun grup concret de particular interès en la física o la geometria.

Bibliografia:

B. C. Hall, Lie Groups, Lie Algebras and representations. Springer, 2003

Y. Kosmann-Schwarzbach, Groups and symmetries. Springer, 2010

T. Bröcker, - T. tom Dieck, Representations of Compact Lie groups. Springer, 1985

Problema de Dirichlet i el lema de Weyl. Tutor: Joan Orobitg

Donada una funció contínua a la vora d'un domini es tracta de trobar una funció harmònica a l'interior del domini i contínua fins a la frontera que coincideixi amb la funció donada a la vora del domini. Una solució es basa en el principi del màxim per a funcions subharmòniques (mètode de Perron). També considerarem la solució mitjançant espais de Sobolev. A més de funcions harmòniques (que es corresponen a funcions de Laplace nul), el problema de Dirichlet també es pot plantejar per a altres solucions d'equacions en derivades parcials. En la vessant històrica, veurem com en aquest context hi apareix el lema de Weyl i la desigualtat de Garding. Naturalment, la profunditat i l'abast dels resultats dependran dels interessos de qui realitzi el treball.

Zeros de polinomis al pla complex. Tutor: Joan Orobitg.

Des dels temps de Gauss hi ha hagut un interès constant en els problemes que se centren en la ubicació dels zeros d'un polinomi. Els zeros d'un polinomi $P(z)$ són funcions dels coeficients. Per tant un problema és especificar regions, determinades per aquests coeficients, en les quals es trobin els zeros. Molt sovint al polinomi $P(z)$ li podem associar un altre polinomi (freqüentment aquest és $P'(z)$), i sorgeix el problema de relacionar la ubicació dels zeros del polinomi associat amb la ubicació dels zeros de $P(z)$. Pel que fa als mètodes i eines que pensem utilitzar hi ha els teoremes de Cauchy, Rouché i Hurwitz de zeros de funcions analítiques. Molts resultats impliquen, ja sigui en la seva demostració o en la seua enunciat, conceptes geomètrics i algebraics de caràcter elemental. Per exemple,

Sigui $Q(z)$ un polinomi de grau 3 amb arrels z_1 , z_2 i z_3 que no siguin punts col·lineals del pla complex. Sigui T el triangle amb vèrtexs z_1 , z_2 i z_3 . Hi ha una única el·lipse inscrita a T i tangent als punts mitjos de cada costat. Els focus d'aquesta el·lipse són les arrels de $Q'(z)$.

En aquest treball proposat hi ha un punt de partida clar, i el camí a seguir dependrà molt de la persona que el dugui a terme.

El problema del quadrat inscrit. Tutor: Joan Orobitg.

El problema del quadrat inscrit és un problema encara sense resoldre. La conjectura diu que tota corba tancada simple del pla conté sempre els 4 vèrtexs d'algun quadrat. Se sap que això és cert per a corbes suaus a trossos i en altres casos especials. Naturalment, no

es tracta pas de resoldre la conjectura, encara que sempre es pot intentar ! El treball consisteix en estudiar els casos coneguts, el més recent de Terence Tao quan la corba està formada per dues gràfiques de funcions Lipschitz amb norma estrictament menor a 1, i també algunes variants (rectangles, triangles equilàters, altres polígons).

Bi-dimensional rearrangement and Lorentz spaces. Tutor: Walter Ortiz

The main goal will be study a bi-dimensional rearrangement, which is related to classical inequalities for functions that are monotone in each variable. We prove the main measure theoretical results of the new theory and characterize the functional properties of the associated weighted Lorentz spaces.

A density result for Sobolev spaces in dimension two. Tutor: Walter Ortiz

The main goal is show that in a bounded simply connected planar domain Ω the smooth Sobolev functions $W^{k,\infty}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ are dense in the homogeneous Sobolev spaces $L^{k,p}(\Omega)$, and Orlicz-Sobolev spaces.

Grups amenables. Tutor: Francesc Perera

Un grup discret G és amenable si admet una mesura de probabilitat (suficientment invariant) finitament additiva. Es pot pensar que aquesta mesura detecta la probabilitat que un element arbitrari de G pertanyi a un determinat subconjunt. L'objectiu del treball és estudiar aquesta classe, a través d'examinar exemples, per veure que és una classe molt àmplia. També es veuran caracteritzacions equivalents, més algebraiques, com ara l'anomenada condició de Foelner.

Anells noetherians i anells de polinomis. Tutor: Francesc Perera

Els anells noetherians formen una classe àmplia d'anells. S'estudiarà aquesta noció en el cas no commutatiu, amb la qual cosa cal distingir entre anell noetherià dreta o esquerra. Una segona part del treball consisteix en analitzar la classe d'exemples anomenats anells de polinomis skew (dels quals els anells de polinomis de tota la vida en són un cas particular). Un dels objectius es provar el teorema de la base de Hilbert: si R és un anell noetherià (dreta), llavors l'anell de polinomis $R[x]$ també. (Es provarà la versió més general utilitzant polinomis skew). Una possible estructura del treball és la següent:

1. Mòduls sobre un anell. Definicions, exemples.
2. Anells noetherians. Exemples.
3. Condició de cadena ascendent: Mòduls noetherians
4. Anells de polinomis skew. El teorema de la base.

Monoides commutatius i condicions de refinament. Tutor: Francesc Perera

Un monoide commutatiu és un conjunt amb una operació aditiva, associativa i commutativa i un element neutre. Un exemple obvi és el conjunt $\mathbb{N} \cup \{0\}$ dels naturals juntament amb el zero. L'objectiu del treball és analitzar les propietats bàsiques d'aquests objectes, i estudiar la classe dels monoides que satisfan la condició anomenada refinament.

Un mòdul sobre un anell és un grup abelià amb multiplicació per escalars de l'anell. En el cas que l'anell sigui un cos, aleshores estem parlant simplement d'un espai vectorial. L'estructura dels espais vectorials ens és molt familiar, però els resultats habituals canvien quan substituïm els elements d'un cos pels d'un anell. En aquest context, els resultats de monoides són extremadament útils. Veurem com problemes relatius als anomenats mòduls Noetherians (que podem pensar com un anàleg de la dimensió finita per espais vectorials), es poden tractar satisfactòriament utilitzant condicions de refinament.

Mòduls finitament generats sobre dominis d'ideals principals. Aplicacions a la forma de Jordand'un endomorfisme. Tutor: Francesc Perera

Un mòdul sobre un anell és, col·loquialment, com un espai vectorial on substituïm el cos d'escalars per un anell, que pot ser o no commutatiu. Aquesta variació en la definició fa que molts dels resultats que podríem esperar deixin de complir-se. Tot i així, per certes classes d'anells es poden obtenir resultats prou satisfactoris. L'objectiu del treball és fer un estudi de la noció de mòdul i obtenir un teorema d'estructura i unicitat en el cas finitament generat i quan estem sobre un domini d'ideals principals. Com a conseqüència recuperarem els resultats de classificació d'endomorfismes.

Introducció a l'Àlgebra Homològica. Tutor: Francesc Perera

Aquest treball consisteix, en primer lloc, en una introducció a la Teoria de Mòduls, que es poden pensar com espais vectorials on els coeficients estan en un anell. L'èmfasi recaurà en els anomenats mòduls lliures, projectius i injectius i plans. A continuació s'estudiaran els conceptes imprescindibles de teoria de categories per tal d'estudiar les nocions de complex de cadenes i els complexos Ext i Tor. Utilitzant aquestes eines, s'establiran possibles aplicacions a l'àlgebra i a la topologia.

Els grups de Teoria K de baixa dimensió. Tutor: Francesc Perera

La teoria K algebraica d'un anell R és una successió $(K_n(R))_{n \in \mathbb{Z}}$ de grups abelians que contenen informació sobre R . Així, per exemple, si R és un cos el grup $K_0(R)$ és el grup \mathbb{Z} i correspon, essencialment, a la dimensió dels espais vectorials sobre R . El grup $K_1(R)$ és $R \setminus \{0\}$, el grup multiplicatiu de les unitats de R , i està relacionat amb el determinant.

L'objectiu del treball és definir i estudiar aquests grups per certes classes d'anells commutatius.

Superfícies mínimes. Tutor: Joan Porti.

Les superfícies mínimes a l'espai són superfícies que minimitzen localment l'àrea i es caracteritzen per tenir curvatura mitjana zero. L'esquema del treball essencialment és donar-ne les diferents caracteritzacions, estudiar les superfícies mínimes de revolució i descriure'n diferents exemples (família catenoide-helicoide, Scherk, Catalan), seguint sobretot el llibre de do Carmo (s'ampliaran les referències en funció dels interessos de l'estudiant). El treball es desenvoluparà a partir dels coneixements adquirits a l'assignatura de geometria diferencial.

Referència bàsica:

Manfredo P. do Carmo. Geometría diferencial de curvas y superficies. Alianza Editorial. 1990

El pla hiperbòlic. Tutor: Joan Porti.

Històricament, el pla hiperbòlic es va desenvolupar com a exemple de geometria no euclidiana (que no satisfà el cinquè postulat d'Euclides). Molts dels objectes en el pla euclidià tenen el seu anàleg en el pla hiperbòlic però amb un comportament diferent (geodèsiques, polígons, àrea del disc, tessellacions). El treball començarà amb els bàsics de geometria hiperbòlica (models del pla hiperbòlic, geodèsiques, isometries) per anar cap a la direcció que triï l'estudiant (accions de grups, trigonometria i fórmules per polígons, mètriques hiperbòliques en superfícies, entre altres). La referència inicial és el llibre d'Anderson, tot i que s'ampliarà segons l'interès de l'estudiant.

Referència bàsica:

Anderson, James W. Hyperbolic geometry. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, 1999. x+230 pp. ISBN: 1-85233-156-9.

Teoria de nusos i polinomi de Jones. Tutor: Joan Porti.

Es comença veient les definicions de teoria de nusos, és a dir subvarietats a l'espai homeomorfes al cercle. Treballarem amb projeccions de nusos al pla i el primer resultat important és el teorema d'Alexander, que ens diu que dues projeccions són equivalents si i només si es pot passar d'una a l'altra mitjançant una seqüència de moviments de Reidemeister. A partir d'aquest teorema, es poden construir invariants de nusos, com ara el polinomi de Jones, pel qual obtingué la medalla Fields l'any 1990.

Referència bàsica:

Murasugi, Kunio: Knot theory and its applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996. viii+341 pp. ISBN: 0-8176-3817-2

Desigualtat Isoperimètrica. Tutor: Joan Porti.

La desigualtat isoperimètrica diu que, de totes les corbes planes tancades de perímetre donat, la circumferència és la que maximitza l'àrea envoltada. El treball comença revisant una demostració de Steiner del S. XIX, molt elegant, però que suposa l'existència d'una corba que realitza l'àrea màxima. Després es fa una demostració completa i es considera el problema per superfícies a l'espai.

Referència bàsica:

Blåsjö, Viktor, The isoperimetric problem, Amer. Math. Monthly, 112 (6), 2005, (526–566). <https://doi.org/10.2307/30037526>,

Convergence/ equiconvergence of numeric series. Tutor: Sergei Tikhonov

In various well-known tests for convergence/divergence of number series

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tag{2}$$

with positive a_k , *monotonicity* of the sequence of $\{a_k\}$ is the basic assumption. Such series are frequently called monotone series. As examples, we mention tests by Abel, Cauchy, de la Vallée Poussin, Dedekind, Dirichlet, du Bois Reymond, Ermakov, Leibniz, Maclaurin, Olivier, Sapogov, Schlömilch; several such tests were named after Abel and Cauchy.

Typical result: the Maclaurin-Cauchy integral test. Consider a non-negative monotone decreasing function f defined on $[1, \infty)$. Then the series

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \tag{3}$$

converges if and only if the integral

$$\int_1^{\infty} f(t) dt \tag{4}$$

is finite. In particular, if the integral diverges, then the series diverges as well.

Questions : how to relax monotonicity assumption in the Maclaurin-Cauchy test and similar problems?

Hardy's inequality. Tutor: Sergei Tikhonov

The following results are well known.

a). Let $a_k \geq 0, b_k \geq 0, \sum_{k=1}^n a_k = a_n \gamma_n$.

If $1 \leq p < \infty$, then

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\sum_{n=k}^{\infty} b_n \right)^p \leq C \sum_{k=1}^{\infty} a_k (b_k \gamma_k)^p.$$

If $0 < p \leq 1$, then

$$(**) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\sum_{n=k}^{\infty} b_n \right)^p \geq C \sum_{k=1}^{\infty} a_k (b_k \gamma_k)^p.$$

b). Let $a_k \geq 0, b_k \geq 0, \sum_{k=n}^{\infty} a_k = a_n \beta_n$.

If $1 \leq p < \infty$, then

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\sum_{n=1}^k b_n \right)^p \leq C \sum_{k=1}^{\infty} a_k (b_k \beta_k)^p.$$

If $0 < p \leq 1$, then

$$(**) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\sum_{n=1}^k b_n \right)^p \geq C \sum_{k=1}^{\infty} a_k (b_k \beta_k)^p.$$

Questions : is it possible to obtain analogues of (*) for $0 < p < 1$ and of (**) for $1 \leq p < \infty$ under some additional conditions on a_k ?

Convergence of the Fourier series. Tutor: Sergei Tikhonov

We first have to discuss integral operators. Integral transforms have their genesis in nineteenth century work of J. Fourier and O. Heaviside, subsequently set into a general framework during the twentieth century. The fundamental idea is to represent a function f in terms of a transform F , using an integral transform pair, $F(p) = \int K(p, x) f(x) dx$ and $f(x) = \int L(x, p) F(p) dp$. The functions K and L are kernels. O. Heaviside invented his operational calculus to solve differential equations, such as those arising in the theory of electrical transmission lines. The formalization of Heaviside's work leads one to the Laplace transforms $K(p, x) = e^{-px}$. One the most important integral transforms is the Fourier transform that represents functions as linear combinations of periodic functions, an idea pioneered by J. Fourier; here $K(p, x) = e^{-ipx}$.

Fourier analysis began with studying the way general functions may be represented by sums of simpler trigonometric functions. It received its name after Joseph Fourier, who showed that representing a function by a trigonometric series greatly simplifies the study of heat propagation. Today, the subject of Fourier analysis encompasses a vast spectrum of mathematics. In the sciences and engineering, the process of decomposing a function into simpler pieces is often called Fourier analysis, while the operation of rebuilding the function from these pieces is known as Fourier synthesis. The decomposition process itself is the Fourier transform.

Questions : we are interested in convergence of Fourier series and integrals with certain restriction on considered functions.

Bibliografia:

D.D. Bonar and M.J. Khoury, Real Infinite Series, MAA, Washington, DC, 2006.

E. Li yand, S. Tikhonov, M. Zeltser, Extending tests for convergence of number series, Jour. Math. Anal. Appl. Vol. 377, 1 (2011), 194–206. [3]

A. Zygmund, Trigonometric Series, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1959.

Desenvolupament de software matemàtic en teoria de codis. Tutor: Mercé Villanueva. Departament d'Enginyeria de la Informació i de les Comunicacions. (Màxim 2 estudiants)

Descripció: En aquest projecte es pretén dissenyar i implementar algunes funcions per a ser afegides en un llibreria de MAGMA sobre codis no lineals ja existent i en procés de desenvolupament amb la finalitat final de ser incorporada en la distribució oficial de MAGMA.

Els codis q-aris no lineals no han estat tant estudiats com els codis lineals degut a la seva dificultat de representació. Darrerament s'ha proposat una representació basada en el kernel del codi que, en alguns casos, permet una bona representació i manipulació. L'objectiu del projecte és, aprofitant aquesta representació, desenvolupar una llibreria de funcions en el sistema MAGMA per tal de manipular aquests codis de forma eficient.

MAGMA is a large, well-supported software package designed to solve computationally hard problems in algebra, number theory, geometry and combinatorics. It provides a mathematically rigorous environment for computing with algebraic, number-theoretic, combinatoric and geometric objects <http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/>.

Actualment, les llibreries de MAGMA ofereixen els algorismes més eficients per treballar amb problemes de teoria de codificació. Aquest software permet crear paquets d'usuari i bases de dades per a poder ser inclosos localment. MAGMA està escrit amb C i utilitza les funcionalitats d'altres llibreries de C. També mencionar que MAGMA proporciona una gran quantitat de llibreries per teoria de codis, però únicament considerant codis lineals. Des de fa uns anys, utilitzant algunes de les llibreries ja implementades en MAGMA, s'està desenvolupant una nova llibreria que permeti treballar amb codis no lineals i estigui totalment integrada amb la llibreria per a codis lineals. L'objectiu principal del projecte és desenvolupar algunes noves funcions en aquesta llibreria per augmentar la seva funcionalitat.

Les funcions a implementar han de desenvolupar seguint l'estil i requeriments de la llibreria on seran incloses. A més, ha de seguir la metodologia, realitzant test de proves i test d'integració amb la llibreria actual. El projecte es desenvoluparà dintre del Dept. d'Enginyeria de la Informació i de les Comunicacions i utilitzarà la infraestructura que disposa aquest departament. A l'alumne se li proporcionarà les eines necessàries (bibliografia, infraestructura bàsica i eines de desenvolupament) per poder completar el projecte dintre d'un semestre.

Matemàtiques Condensades. Tutor: Xavier Xarles.

Els conjunts condensats són uns objectes que volen generalitzar els espais topològics de manera que tinguin algunes propietats millors. Han estat introduïts per Clausen i Scholze molt recentment per tal de poder construir una categoria de grups abelians topològics que tingui bones propietats (concretament, sigui abeliana). El treball proposat consistiria primer en estudiar els conjunts profinitos (que són límits de conjunts finits), i les seves categories equivalents dels espais topològics compactes Hausdorff i totalment disconnexos i la categoria de les àlgebres booleanes, després en estudiar el concepte de feix d'un espai topològic, per finalment introduir la categoria dels conjunts condensats i dels grups (abelians) condensats. La idea és principalment de construir exemples interessants d'aquests conjunts i grups, centrant-nos principalment en els relacionats amb els reals.

Per saber més podeu mirar les notes

<http://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf>

el vídeo introductor del Scholze

<https://www.youtube.com/watch?v=bpD8A2KWoTM>

o el curs

<https://www.youtube.com/watch?v=PHm4bYziyug>

Quan una cosa és igual a una altra? Tutor: Xavier Xarles.

L'objectiu és llegir, entendre i explicar l'article del Barri Mazur on s'introdueix el llenguatge de categories i functors i com aquest llenguatge ens dóna una manera d'atacar el problema de que són els objectes matemàtics més usuals: els naturals, els enters, els racionals, l'anell de polinomis, etc. El treball té un vessant més filosòfic que es pot explorar. Una opció interessant és construir molts exemples de categories i functors, reinterpretant alguns dels resultats obtinguts durant el grau de matemàtiques en aquest llenguatge.