

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

LUCYJANE DE ALMEIDA SILVA

**Campos vetoriais suaves por partes:
Modelos Predador-Presa**

Goiânia
2015

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: Dissertação Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Lucyjane de Almeida Silva		
E-mail:	lucyjanealmeida@gmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor			
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior	Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	GO
CNPJ:	00.889.834/0001-08		
Título:	Campos vetoriais suaves por partes: Modelos Predador-Presa		
Palavras-chave:	modelo predador-presa, modelo de Gause com refúgio, ciclo limite, ciclo de canard, bifurcação Bogdanov-Takens		
Título em outra língua:	Piecewise smooth vector fields: Predator-Prey Models		
Palavras-chave em outra língua:	predator-prey model, Gause model with refuge, limit cycle, canard cycle, Bogdanov-Takens bifurcation		
Área de concentração:	Sistemas Dinâmicos		
Data defesa:	06/03/2015		
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado em Matemática		
Orientador (a):	João Carlos da Rocha Medrado		
E-mail:	joaocarlosmedrado@gmail.com		
Co-orientador (a):			
E-mail:			

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Lucyjane de Almeida Silva
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 20 / 03 / 2015

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

LUCYJANE DE ALMEIDA SILVA

Campos vetoriais suaves por partes: Modelos Predador-Presa

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos.

Orientador: Prof. João Carlos da Rocha Medrado

Goiânia
2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

de Almeida Silva, Lucyjane
Campos vetoriais suaves por partes: Modelos Predador-Presa
[manuscrito] / Lucyjane de Almeida Silva. - 2015.
Lxxxviii, 88 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de
Matemática e Estatística (IME) , Programa de Pós-Graduação em
Matemática, Goiânia, 2015.

Bibliografia.

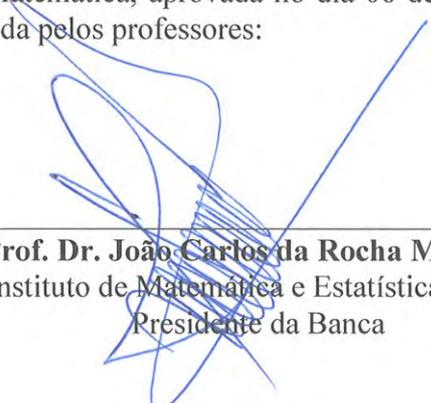
Inclui lista de figuras.

1. modelo predador-presa. 2. modelo de Gause com refúgio. 3.
ciclo limite. 4. ciclo de canard . 5. bifurcação Bogdanov-Takens. I. da
Rocha Medrado, João Carlos, orient. II. Título.

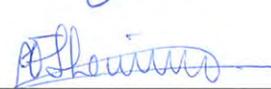
LUCYJANE DE ALMEIDA SILVA

**CAMPOS VETORIAIS SUAVES POR PARTES: MODELOS
PREDADOR-PRESA**

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 06 de março de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado
Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Maurício Firmino Silva Lima
Centro de Matemática, Computação e Cognição - UFABC



Prof. Dr. Durval José Tonon
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Lucyjane de Almeida Silva

Bacharela em Matemática pela Universidade Federal de Goiás - UFG.

Aos meus pais, Raimundo (in memoriam) e Santana,
e aos meus irmãos, Raimundo Junio e Lucimar.

Agradecimentos

A Deus, por ter me dado a vida, pelas oportunidades e por ter me concedido graça e força nessa caminhada.

A minha mãe e meus irmãos pelo apoio, amor, carinho, pelos conselhos e incentivo. Ao meu pai que não teve a oportunidade de vivenciar esse momento da minha vida, mas partiu deixando seu exemplo de vida e luta. A todos os meus familiares (mãe, irmãos, cunhado(a), tios(as), primos(as), avós), pela paciência e por compreenderem minha ausência em diversos momentos.

Ao meu amigo e noivo, Ilton, por me apoiar, aconselhar, por me fazer sorrir e por ser meu ombro amigo nos momentos difíceis.

A todos os meus amigos do IME-UFG que de alguma forma me ajudaram. Dentre eles, Nastasha, Marcos, Carlos, Fernando, Oscar, Brunna, Mailine, Douglas, Adriana, Mônica, Bira, Pablo e Bruno. Em especial, Nara, Paula, Thamara, Ilton e Laredo, que estiveram mais próximos de mim durante esses anos, tanto na graduação quanto no mestrado, juntos nós enfrentamos e vencemos desafios, agradeço a eles pela companhia, pelo carinho, apoio, pelos momentos de descontração, discussões e estudos. A Kamilinha, por ser uma grande amiga que me apoiou desde os primeiros passos na graduação e sempre esteve disposta a ouvir, aconselhar, incentivar e me ajudar com dúvidas relacionadas a Sistemas Dinâmicos e Latex.

Aos meus amigos da igreja pelas orações e por compreenderem minha ausência. Em especial, ao grupo de jovens e os líderes, Débora e Abner, que inúmeras vezes não puderam contar com a minha colaboração e participação em diversos eventos.

Ao Professor Alacyr e ao meu amigo Mayk que além de contribuírem para minha aprendizagem, sempre disponibilizaram tempo para me ajudar a resolver os problemas com o Corel, Maple e Latex fazendo tudo que estava ao alcance, incluindo formatação e reinstalação de programas.

A todos os professores que tive em minha vida, pois eles me ensinaram muito. Em especial, a Professora Maria José por ter contribuído para o despertar do meu interesse pela Matemática e o Professor Romildo pelo apoio, incentivo, conselhos e acima de tudo por ter me ensinado que "difícil é o desconhecido".

Ao meu orientador, Professor João Carlos, por tudo que me ensinou desde a

graduação, pela paciência, pelos conselhos, por todo apoio, incentivo e por ter sido um grande amigo todo este tempo que trabalhamos juntos. Ao Professor Ronaldo Garcia pelos ensinamentos durante o estágio docência.

Aos Professores e funcionários do IME-UFG por sempre estarem dispostos a nos atender, resolver nossos problemas e nos direcionarem quando necessário.

À CAPES pelo apoio financeiro.

"O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis."

José de Alencar,
em entrevista.

Resumo

Silva, Lucyjane de Almeida. **Campos vetoriais suaves por partes: Modelos Predador-Presa**. Goiânia, 2015. 88p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho estudamos o comportamento qualitativo global de três modelos predador-presa. Analisamos a existência de ciclos limite e ciclos de canard e investigamos os tipos de bifurcações que podem ocorrer. No primeiro modelo, modelo predador-presa de Gause com refúgio, analisamos os efeitos do refúgio para as presas no comportamento dinâmico do ecossistema. Empregando a capacidade de suporte para a população de presas no modelo de Gause com refúgio obtemos o segundo modelo, para o qual analisamos os efeitos da capacidade de suporte e comparamos os resultados obtidos. No terceiro modelo consideramos as estratégias de colheita com limiar contínuo que é aplicada quando a densidade de predadores está acima de um certo limite e investigamos o comportamento dinâmico global. Observamos que o modelo possui uma dinâmica complexa com múltiplos pontos de equilíbrio e diferentes tipos de bifurcações.

Palavras-chave

modelo predador-presa, modelo de Gause com refúgio, ciclo limite, ciclo de canard, bifurcação Bogdanov-Takens.

Abstract

Silva, Lucyjane de Almeida. **Piecewise smooth vector fields: Predator-Prey Models**. Goiânia, 2015. 88p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work we study the global qualitative behavior of three predator-prey models. We analyze the existence of limit cycle and canard cycle and we investigate the kinds of bifurcation that can occur. In the first model, Gause predator-prey with a refuge, we analyze the effects of a prey refuge on the ecosystem qualitative behavior. Employing the carrying capacity of the prey population in the Gause Model with a refuge we obtain the second model, for which we analyze the effects of the carrying capacity and we compare the results. In the third model we consider the continuous threshold harvesting strategies occurring when the predator density is above a certain threshold. We note that the model has a complex dynamics with multiple internal equilibria and different types of bifurcation.

Keywords

predator-prey model, Gause model with refuge, limit cycle, canard cycle, Bogdanov-Takens bifurcation.

Introdução

Controle biológico é um fenômeno que acontece espontaneamente na natureza e consiste na regulação do número de plantas e animais por inimigos naturais. Esta é uma estratégia que o homem vem utilizando há muito tempo para o controle de patógenos, pragas e ervas daninhas. Este método de controle populacional tem sido um dos temas de maior interesse em pesquisas, ver em [11] e [18], e depende de predação, parasitismo, herbivoria ou outros mecanismos naturais, mas também depende de uma gestão humana ativa. A seleção e aplicação de uma gama ideal de estratégias de controle biológico minimiza a perda e maximiza o retorno. O objetivo dessas estratégias é atingir um nível de controle biológico que é aceitável em termos econômicos para as pessoas causando perturbação mínima ao ambiente dos indivíduos que não são alvos. Geralmente a erradicação completa de uma espécie não é possível e nem é biologicamente ou economicamente desejável, portanto uma boa estratégia de controle biológico pode reduzir uma população a um nível aceitável para o público.

No mundo natural, algumas vezes precisamos controlar a população de predadores pois eles podem levar as presas a diminuir e tornarem extintas. O exemplo deste controle pode ser encontrado em Ecologia, especialmente nos sistemas ecológicos agropecuário. Em meados dos anos 1920 o biofísico Alfred J. Lotka e o matemático Vito Volterra formularam a equação conhecida como Lotka- Volterra utilizada para descrever dinâmicas nos sistemas biológicos, principalmente quando duas espécies interagem como no modelo predador-presa.

Estimulado por implicações da equação Lotka-Volterra, Gause elaborou o primeiro experimento detalhado para observar as evidências de ciclos populacionais entre *Paramecium* (presa) e *Didinium* (predador). No experimento os indivíduos eram colocados em um mesmo ambiente e a cada período de tempo Gause observava o resultado e modificava o ambiente. Gause confirmou que se algum sedimento fosse adicionado ao meio como um refúgio para as presas então uma certa concentração limite de presas ficando no sedimento não podia ser destruída pelos predadores. Isto porque as presas podiam evitar o predador via mudança de habitat, movendo para o refúgio, quando estava em baixa concentração. Uma vez que a densidade de presas excedia a concentração limite as presas reapareciam e mais uma vez tornava acessível aos predadores. Sobre tais circunstâncias a

presa e o predador podiam coexistir e oscilar periodicamente.

Com o objetivo de considerar teoricamente o resultado experimental observado, Gause estendeu o clássico modelo Lotka-Volterra, ver [10] e [22]. Para isto, Gause usou uma função de saturação por partes para repassar a taxa de consumo linear a um sistema dinâmico não suave ou sistema de Filippov dado por

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \left(rx - \frac{\varepsilon bxy}{1 + bhx}, \frac{\varepsilon kbxy}{1 + bhx} - \delta y \right), \quad (0-1)$$

onde x e y denotam a densidade de presas e predadores, respectivamente, r é a taxa intrínseca de crescimento da população presa, k denota a eficiência com que a presa capturada é convertida em novos predadores, δ é a taxa de morte do predador, b descreve a taxa de busca do predador e h é o tempo de manuseio, isto é, o tempo entre a presa sendo encontrada e a busca concluída. Além disso, o parâmetro ε é definido por

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{se } x - R_c < 0, \\ 1, & \text{se } x - R_c > 0, \end{cases} \quad (0-2)$$

onde R_c é a densidade de presas crítica.

A quantidade de presas que o ambiente suporta é um fator que interfere no comportamento dinâmico do modelo de Gause, ver [24]. Assim, levando em consideração a capacidade de suporte K o modelo (0-1) pode ser escrito como

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \left(rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\varepsilon bxy}{1 + bhx}, \frac{\varepsilon kbxy}{1 + bhx} - \delta y \right). \quad (0-3)$$

Atualmente muitos trabalhos têm sido desenvolvidos para analisar modelos predador-presa com limiar de colheita impulsivo. Jiang, em [12], investiga um modelo onde uma estratégia de controle de realimentação com limiar impulsivo é tomada somente quando a densidade das presas atinge um limite. Além disso, em [3] e [19], alguns autores formulam uma forma alternativa de colheita com limiar contínuo e investiga suas propriedades no âmbito de um modelo predador-presa. A presença de um limiar de colheita é interessante e faz o comportamento dinâmico mais complexo. Portanto, é necessário considerar como o limiar afeta a dinâmica do ecossistema. Collie e Spencer, em [7], analisa a dinâmica de um modelo predador-presa considerando as estratégias de colheita com limiar contínuo de forma que quando a população predador está acima de um certo limite, a estratégia de colheita ocorre e quando esta densidade está abaixo do limite, as estratégias são encerradas. Uma análise adicional tem sido desenvolvida desde então, por exemplo em [1] e [16]. Um modelo predador-presa com essa política é descrito pelo seguinte sistema

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \left(rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\beta xy}{\alpha + x}, \frac{\beta_1 xy}{\alpha + x} - \delta y - H(y) \right), \quad (0-4)$$

onde os parâmetros r , K , δ são definidos como nos modelos anteriores, β é a taxa máxima de captação por predador, β_1 denota a proporção de conversão de biomassa com $0 < \beta_1 < \beta$, α é a constante de meia saturação para uma função resposta Holling tipo II, ver [20], que contribui para o crescimento do predador e a função colheita $H(y)$ significa que a colheita inicia quando a densidade de predadores ultrapassa o limite T , e decresce suavemente para o valor limite de saturação h . Além disso, $H(y)$ é definida por

$$H(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \leq T, \\ \frac{h(y-T)}{c+y-T}, & \text{se } y > T. \end{cases} \quad (0-5)$$

Observe que os parâmetros definidos acima são todos positivos, e a segunda coordenada de (0-4) é sempre negativa se $\beta_1 < \delta$, assim assumimos $\beta_1 - \delta > 0$.

O objetivo desse trabalho é investigar o comportamento qualitativo global dos modelos predador-presa (0-1), (0-3) e (0-4) quanto à estabilidade do sistema, a existência de ciclos limite, ciclos de canard e tipos de bifurcações que ocorrem. Além disso, comparamos os resultados obtidos para o modelo (0-1) com os obtidos para o modelo (0-3) analisando os efeitos da capacidade de suporte para a população presa e discutimos os efeitos da estratégia de colheita com limiar contínuo no modelo (0-4). Do ponto de vista biológico, estamos interessados no comportamento dinâmico dos modelos no primeiro quadrante do \mathbb{R}^2 . Assim, vamos considerar $x, y \in \mathbb{R}_+$ e, quando necessário, a condição inicial $x(0) = x_0 > 0$ e $y(0) = y_0 > 0$.

Observamos que, todos os retratos de fase apresentados neste trabalho foram plotados no Maple. Além disso, utilizamos o Corel Draw para pontilhar retas e adicionar componentes como setas, pontos e símbolos.

Sumário

Lista de Figuras	13
1 Preliminares	14
1.1 Campo vetorial	14
1.2 Campo vetorial descontínuo ou sistema de Filippov	21
2 Modelo predador-presa de Gause com refúgio	25
2.1 Comportamento qualitativo do modelo quando a densidade das presas está acima do limite crítico	25
2.2 Dinâmica na região de deslize	36
2.3 Análise do comportamento dinâmico global	39
3 Modelo predador-presa de Gause considerando a capacidade de suporte	47
3.1 Comportamento qualitativo do modelo	47
3.1.1 Dinâmica na região de deslize e existência de equilíbrios	50
3.1.2 Análise qualitativa global	53
3.2 Análise da bifurcação e simulações numéricas	57
4 Modelo predador-presa com estratégia de colheita com limiar contínuo	61
4.1 Existência de pontos de equilíbrio	62
4.1.1 Análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio	66
4.2 Análise da bifurcação	67
4.3 Resultados numéricos	81
5 Conclusão	84
Referências Bibliográficas	87

Lista de Figuras

1.1	(a) Um setor hiperbólico. (b) Um setor parabólico. (c) Um setor elíptico.	19
1.2	Uma sela-nó na origem.	19
1.3	Uma cúspide na origem.	19
1.4	Região de costura.	22
1.5	Região de escape.	22
1.6	Região de deslize.	22
1.7	(a) Órbita tangente a Σ ; (b) Órbita transversal a Σ .	22
2.1	Retrato de fase para o subsistema (2-2), onde fixamos os parâmetros $r = 2, b = 1, k = 0.4, h = 1$ e $\delta = 0.2$.	28
2.2	Retrato de fase para o modelo (2-12) nos casos 1 2 e 3: (a) $m = 3, \delta = 1.5, r = 1$ e $\alpha = 3.2$; (b) $m = 3, \delta = 2.1, r = 1$ e $\alpha = 3.2$; (c) $m = 1, \delta = 1.5, r = 1$ e $\alpha = 1.2$.	34
2.3	Retrato de fase para o modelo (2-2) quando $1 < p_2 < p^*$ e $0 \leq m - \delta < r$.	36
2.4	Retrato de fase para o modelo (2-1) com os parâmetros fixos $r = 1, b = 1, k = 0.5, h = 0.1, \delta = 0.2$ e $R_c = 0.2$.	40
2.5	Retrato de fase para o sistema (2-16) e uma solução particular do modelo (2-1).	43
3.1	Retrato de fase do modelo (3-1), onde fixamos $b = 0.19$ e o parâmetro de bifurcação $R_c = 8$.	54
3.2	Retrato de fase para o modelo (3-1), onde fixamos $b = 0.19$ e escolhemos R_c como um parâmetro de bifurcação, em (a) $R_c = 10.3$ e em (b) $R_c = 11$.	55
3.3	Retrato de fase para o modelo (3-1), com (a) $R_c = 21$; (b) $R_c = 35$.	57
3.4	Retrato de fase para o modelo (3-1), onde $b = 0.175$ e (a) $R_c = 14$; (b) $R_c = 22.8$; (c) $R_c = 35$.	58
3.5	Retrato de fase para o modelo (3-1), onde $b = 0.1$ e o parâmetro de bifurcação em (a) $R_c = 30$; em (b) $R_c = 40$ e em (c) $R_c = 45$.	59
3.6	O diagrama de bifurcação para o modelo (3-1) com respeito a taxa de busca de presas b e o limite populacional crítico de presas R_c .	59
4.1	Raízes de um polinômio de grau quatro.	64
4.2	Retratos de fase para o modelo (4-1), onde o parâmetro de bifurcação h é dado por (a) $h = 0.97$, (b) $h = 0.9755$ e (c) $h = 1.005$.	82
4.3	Retratos de fase para o modelo (4-1), onde (a) $h = 1.1$, (b) $h = 1.26$ e (c) $h = 1.32185$.	82
4.4	Retrato de fase do modelo (4-1) quando $h = 1.4$.	83

Preliminares

Neste capítulo apresentamos as definições e os resultados preliminares necessários para o desenvolvimento do trabalho.

1.1 Campo vetorial

Seja E um subconjunto aberto do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n . Um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$, em E é uma aplicação $F : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k . Ao campo vetorial F associamos o sistema de equações diferenciais

$$\dot{x} = F(x), \quad (1-1)$$

onde $x = x(t)$ e \dot{x} é a derivada de x em relação ao tempo t .

Para o sistema de equações diferenciais (1-1) temos as definições seguintes que podem ser encontradas em [13] e [21].

Definição 1.1 *Uma solução para o sistema (1-1) é uma aplicação diferenciável $\varphi(\cdot, x) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$, com $x \in E$, tal que*

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = F(\varphi(t)), \quad (1-2)$$

para todo $t \in I$, estas soluções são chamadas trajetórias, fluxo ou curvas integrais do sistema.

Definição 1.2 *Um ponto $x_0 \in E$ é um ponto de equilíbrio para o sistema (1-1), ou ponto singular, se $F(x_0) = 0$, caso contrário, x_0 é um ponto regular. Um ponto de equilíbrio x_0 é chamado hiperbólico se todos os autovalores da matriz Jacobiana, $D_x F(x_0)$, tem parte real não nula.*

Definição 1.3 *Dizemos que uma função escalar $I(x)$ é uma integral primeira se ela é constante ao longo trajetórias do sistema (1-1), isto é, se*

$$\dot{I}(x) = \nabla I(x) \cdot \dot{x} = \nabla I(x) \cdot F(x) = 0.$$

Definição 1.4 Considere $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $F(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$ na equação (1-1). Assim $dy/dx = Y(x, y)/X(x, y)$ é a equação diferencial dos retratos de fase. Os retratos de fase que intercepta a curva definida por $Y(x, y) = cX(x, y)$ interceptarão com a mesma inclinação c , tais curvas são conhecidas como *Isóclinas do campo vetorial*. As *isóclinas particulares*, são dadas por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; X(x, y) = 0\}$, a qual os retratos de fase do sistema (1-1) intercepta com inclinação infinita, e $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; Y(x, y) = 0\}$, a qual os retratos de fase do sistema intercepta com inclinação zero.

Observamos que, as isóclinas particulares são também conhecidas como x -nullcline quando $X(x, y) = 0$ e y -nullcline quando $Y(x, y) = 0$. Além disso, pontos onde as isóclinas particulares se interceptam definem os pontos de equilíbrio do sistema.

Se identificarmos a função $\varphi(\cdot, x)$, na Definição 1.1, com o seu gráfico, então podemos pensar na trajetória de (1-1) passando pelo ponto $\varphi(0, x_0) = x_0 \in E$ como o movimento ao longo da curva

$$\Gamma_{x_0} = \{x \in E; x = \varphi(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}.$$

Logo, podemos definir a semi-trajetória positiva passando por x_0 como o movimento sobre a curva

$$\Gamma_{x_0}^+ = \{x \in E; x = \varphi(t, x_0), t \geq 0\}.$$

A semi-trajetória negativa $\Gamma_{x_0}^-$ é similarmente definida. Consequentemente, qualquer trajetória do sistema (1-1) é dada por $\Gamma = \Gamma_{x_0}^+ \cup \Gamma_{x_0}^-$.

Temos a seguinte definição.

Definição 1.5 Seja Γ uma trajetória do sistema (1-1). Um ponto $p \in E$ é um ponto ω -limite da trajetória Γ se existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, x) = p.$$

Similarmente, se existe uma sequência $t_n \rightarrow -\infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \varphi(t_n, x) = q,$$

com $q \in E$, então q é um ponto α -limite da trajetória Γ .

O conjunto de todos os pontos ω -limite de uma trajetória Γ é chamado de conjunto ω -limite de Γ , vamos denotá-lo por $\omega(\Gamma)$. O conjunto de todos os pontos α -limite de Γ é chamado de conjunto α -limite de Γ e denotado por $\alpha(\Gamma)$.

Definimos uma órbita periódica do sistema (1-1) sendo qualquer curva solução fechada de (1-1) que não contém e não é ponto de equilíbrio. Temos o resultado seguinte, ver [21].

Teorema 1.6 (Teorema de Poincaré-Bendixson) *Suponha que $F \in C^1(E)$, onde E é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 e que (1-1) tem trajetórias Γ com Γ_+ contida em um subconjunto compacto K de E . Temos que, se o conjunto $\omega(\Gamma)$ não contém pontos de equilíbrio de (1-1) então $\omega(\Gamma)$ é uma órbita periódica de (1-1).*

Sejam $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^p$ duas aplicações suaves e considere $x \in U_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $x \in U_2 \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que f_1 é equivalente a f_2 , isto é $f_1 \sim f_2$, se existe uma vizinhança $U \subset U_1 \cap U_2$ de x tal que $f_1(z) = f_2(z)$, para todo $z \in U$.

Definição 1.7 *As classes de equivalência sobre essa relação são chamadas Germes de aplicações em x . Denotamos o germe de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ em x por $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$, onde $y = f(x)$. Dizemos que x é a fonte do germe e y é a meta do germe.*

Definição 1.8 *Um germe suave*

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (0,0)) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x) \end{aligned}$$

é chamado p -regular em $(0,0)$ com respeito a t se

$$f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial t}(0,0) = \dots = \frac{\partial^{p-1} f}{\partial t^{p-1}}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^p f}{\partial t^p}(0,0) \neq 0.$$

Com as definições acima temos o seguinte resultado.

Teorema 1.9 (Teorema de Preparação de Malgrange) *Seja $f : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ um germe p -regular em $(0,0)$ com respeito a primeira variável. Então, existem germes $u_1, u_2, \dots, u_p : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ e $Q : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$f = Q \left(t^p + \sum_{j=1}^p u^j t^{p-j} \right),$$

onde $Q(0) \neq 0$.

O teorema seguinte relaciona o comportamento qualitativo das soluções de dois campos vetoriais dependendo de suas respectivas velocidades, ver [4]. Este resultado nos permitirá analisar o comportamento do modelo (0-1), sobre algumas condições, comparando-o com um sistema adequado.

Teorema 1.10 (Teorema da comparação para equações diferenciais ordinárias)

Suponhamos que f e g sejam funções reais contínuas no domínio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\},$$

e denotamos por $y_0(x)$, $z_0(x)$ qualquer solução dos problemas de valor inicial

$$1. y'(x) = f(x, y), \text{ com } y_0(x_0) = y_0,$$

$$2. z'(x) = g(x, z), z_0(x_0) = y_0,$$

respectivamente. Se $f(x, y) > g(x, y)$ em D então $y_0(x) > z_0(x)$ para $x > x_0$ e $y_0(x) < z_0(x)$ para $x < x_0$. No entanto, $f(x, y) \geq g(x, y)$ em D não implica $y_0(x) \geq z_0(x)$ para $x > x_0$, sem alguma condição adicional sobre f ou g .

O Teorema abaixo é um resultado clássico na teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias que pode ser encontrado em [21]. O teorema afirma que numa vizinhança de um equilíbrio hiperbólico, o campo é estruturalmente estável.

Teorema 1.11 (Teorema de Grobman-Hartman) *Seja E um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n contendo a origem, $f \in C^1(E)$ um campo em $E \subset \mathbb{R}^n$ e considere $\phi(t)$ o fluxo do sistema não linear*

$$\dot{x} = f(x), \tag{1-3}$$

com $x \in \mathbb{R}^n$. Suponha que $f(0) = 0$ e que a matriz $A = Df(0)$ não tem autovalores com parte real nula. Então existe um homeomorfismo H de um conjunto aberto U contendo a origem em um conjunto aberto V contendo a origem tal que para cada $x_0 \in U$, existe um intervalo aberto $I_0 \subset \mathbb{R}$ contendo o zero tal que para todo $x_0 \in U$ e $t \in I_0$

$$H \circ \phi_t(t_0) = e^{At} H(x_0),$$

isto é, H leva as trajetórias de (1-3) próximo da origem nas trajetórias de $\dot{x} = A(x)$ próximo da origem e preserva a parametrização pelo tempo.

Sabemos que o comportamento dinâmico de um campo vetorial pode apresentar diferentes bifurcações, como a Bifurcação de Hopf, sela-nó e Bogdanov-Takens. Além disso, o campo pode exibir ciclos limite e cúspides. Para mais detalhes ver [13] e [21]. No que segue apresentaremos alguns resultados sobre essas diferentes dinâmicas.

Definição 1.12 *Um ciclo limite Γ de um sistema planar (1-1) é um órbita periódica de (1-1) que é o conjunto α ou ω -limite de alguma trajetória do sistema (1-1) diferente de Γ . Se Γ é o conjunto ω -limite de todas as trajetórias em alguma vizinhança de Γ , então Γ é um ciclo limite estável. Se Γ é o conjunto α -limite de todas as trajetórias em alguma vizinhança de Γ , então Γ é um ciclo limite instável.*

O resultado seguinte nos fornece um critério para analisar a existência de ciclos limite. Usaremos este resultado para mostrar que o modelo (0-1) não possui ciclo limite em \mathbb{R}_+^2 quando $x > R_c$.

Teorema 1.13 (Critério de Dulac) *Seja $f \in C^1(E)$, onde E é uma região simplesmente conexa em \mathbb{R}^2 . Se existe uma função $B \in C^1(E)$ tal que o divergente de $B \cdot f$, denotado por $\nabla(Bf)$, não é identicamente nulo e não muda de sinal em E , então o sistema $\dot{x} = f(x)$ com $f = (P, Q)^T$ e $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ não tem órbita fechada inteiramente contida em E . Se A é uma região anular contida em E na qual $\nabla \cdot Bf$ não muda de sinal, então existe no máximo um ciclo limite de $\dot{x} = f(x)$ em A .*

O exemplo seguinte pode ser encontrado em [21].

Exemplo 1 *Vamos mostrar que o sistema*

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (y, -ax - by + ax^2 + \beta y^2) = f(x, y), \quad (1-4)$$

com $b \neq 0$, não possui ciclo limite em \mathbb{R}^2 .

Neste caso temos que as funções coordenadas de f são polinômios e portanto $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Tomando a função de Dulac $B(x, y) = be^{-2\beta x}$ temos que $B \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e

$$\nabla(Bf) = \frac{\partial}{\partial x} (be^{-2\beta x}y) + \frac{\partial}{\partial y} (be^{-2\beta x}(-ax - by + ax^2 + \beta y^2)) = -b^2e^{-2\beta x}.$$

Observe que, $b \neq 0$ implica em $\nabla(Bf) < 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assim, pelo Teorema 1.13, o sistema (1-4) não possui ciclo limite em \mathbb{R}^2 .

Para os próximos resultados precisamos da seguinte definição.

Definição 1.14 *Uma função $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ é analítica no conjunto aberto $E \subset \mathbb{R}^n$ se cada componente $f_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, é analítica em E , isto é, se para $j = 1, \dots, n$ e $x_0 \in E$, a componente $f_j(x)$ tem uma série de Taylor que converge para $f_j(x)$ em alguma vizinhança de x_0 em E .*

Suponhamos que existe uma vizinhança V da origem tal que o único ponto de equilíbrio do sistema planar

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (P(x, y), Q(x, y)), \quad (1-5)$$

em V é a origem, ou seja, a origem é um equilíbrio isolado de (1-5), onde P e Q são analíticas em alguma vizinhança da origem. Apresentaremos alguns resultados estabelecidos em [2] para o caso em que a matriz associada à parte linear $A = DF(0)$ possui um ou dois autovalores nulos, mas A não é uma matriz nula.

Definição 1.15 *Um setor que é topologicamente equivalente ao setor mostrado na Figura 1.1-(a) é chamado um setor hiperbólico. Um setor topologicamente equivalente ao setor*

mostrado na Figura 1.1-(b) é chamado um setor parabólico. Finalmente, um setor topologicamente equivalente ao setor mostrado na Figura 1.1-(c) é chamado um setor elíptico.



Figura 1.1: (a) Um setor hiperbólico. (b) Um setor parabólico. (c) Um setor elíptico.

De acordo com a definição 1.15 temos que, uma sela-nó é um ponto crítico do tipo não hiperbólico para o sistema planar (1-5) que consiste de dois setores hiperbólicos e um setor parabólico, bem como as três separatrizes e o ponto de equilíbrio, ver Figura 1.2. Um outro tipo de comportamento que pode ocorrer em um ponto de equilíbrio não hiperbólico, ilustrado na Figura 1.3, consiste de dois setores hiperbólicos e duas separatrizes. Este ponto de equilíbrio é chamado uma cúspide. Nos resultados seguintes teremos condições para que o sistema planar (1-5) apresente um desses comportamentos.

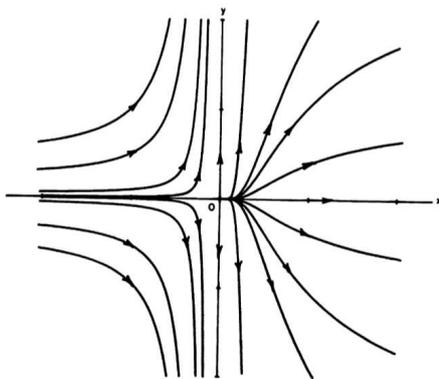


Figura 1.2: Uma sela-nó na origem.

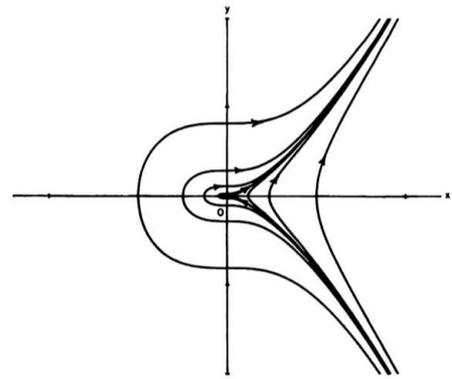


Figura 1.3: Uma cúspide na origem.

Vamos considerar o caso em que a matriz A possui um autovalor nulo, isto é, quando $\det A = 0$ e $\text{tr} A \neq 0$. Neste caso, como é mostrado em [2], o sistema (1-5) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = y + g(x, y), \end{cases} \quad (1-6)$$

onde f e g são analíticas em uma vizinhança da origem e tem expansões com termos de grau maior ou igual a dois em x e y . Segue que, temos o teorema seguinte que é provado em [2].

Teorema 1.16 *Suponhamos que a origem é um ponto singular isolado para o sistema analítico (1-6). Seja $y = \phi(x)$ uma solução da equação $y + g(x, y) = 0$ em uma vizinhança da origem e considere a expansão da função $\psi(x) = f(x, \phi(x))$ em uma vizinhança de $x = 0$ na forma $\psi(x) = a_m x^m + \dots$, onde $m \geq 2$ e $a_m \neq 0$. Então,*

1. *para m ímpar e $a_m > 0$, a origem é um nó instável,*
2. *para m ímpar e $a_m < 0$, a origem é uma sela topológica e*
3. *para m par, a origem é uma sela-nó, ou seja, para $x < 0$ a origem é um ponto de sela e para $x > 0$ a origem é um nó.*

Observamos que, a Forma normal para um sistema de equações diferenciais é um sistema de coordenadas no qual o sistema é apresentado numa forma mais simples. Esta forma mais simples nos permite analisar o comportamento dinâmico do sistema em uma vizinhança de uma solução conhecida. Para nossa proposta, a solução conhecida será um ponto de equilíbrio.

Agora, consideramos o caso em que a matriz A possui dois autovalores nulos, ou seja, $\det A = 0$ e $\text{tr} A = 0$ mas $A \neq 0$. Neste caso, é mostrado em [2] que o sistema (1-5), próximo da origem, pode ser escrito na forma normal

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (y, a_k x^k(1 + h(x)) + b_n x^n y(1 + g(x)) + y^2 R(x, y)), \quad (1-7)$$

onde $h(x)$, $g(x)$ e $R(x, y)$ são funções analíticas numa vizinhança da origem, tais que $h(0) = g(0) = 0$, $a_k \neq 0$ e $n \geq 0$. Temos o seguinte teorema.

Teorema 1.17 *Seja $k = 2m$, com $m \geq 1$, na forma normal (1-7). Então a origem do sistema (1-5) é*

1. *uma cúspide se $b_n = 0$ ou se $b_n \neq 0$ e $n \geq m$.*
2. *um ponto sela-nó se $b_n \neq 0$ e $n < m$.*

Se considerarmos que a matriz A possui um autovalor nulo de multiplicidade dois obtemos a seguinte definição. Ver página 477 de [21].

Definição 1.18 (Bifurcação Bogdanov-Takens) *Esta bifurcação resulta do desdobramento da forma normal*

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (y, x^2 \pm xy), \quad (1-8)$$

obtida de qualquer sistema com um autovalor zero de multiplicidade dois dado na forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ax^2 + bxy + cy^2 \\ dx^2 + exy + fy^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{O}_1(|(x, y)|^3) \\ \mathcal{O}_2(|(x, y)|^3) \end{pmatrix}, \quad (1-9)$$

onde $e + 2a \neq 0$ e $d \neq 0$. Um desdobramento universal da forma normal (1-8) é dado por

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (x, \mu_1 + \mu_2 y + x^2 \pm xy). \quad (1-10)$$

O sistema acima com o sinal positivo é transformado no mesmo sistema com sinal negativo sobre a transformação linear de coordenadas $(x, y, t, \mu_1, \mu_2) \rightarrow (x, -y, -t, \mu_1, -\mu_2)$. Portanto, consideramos o sistema (1-10) com o sinal positivo como o desdobramento universal para a Bifurcação Bogdanov-Takens.

1.2 Campo vetorial descontínuo ou sistema de Filippov

Considere o seguinte campo vetorial descontínuo ou sistema de Filippov:

$$\dot{z}(t) = \begin{cases} F_{S_1}(z), & z \in S_1, \\ F_{S_2}(z), & z \in S_2. \end{cases} \quad (1-11)$$

onde $F_{S_1}, F_{S_2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são suficientemente suaves em \mathbb{R}^2 e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função escalar suficientemente suave tal que

$$S_1 = \{z \in \mathbb{R}_+^2; f(z) < 0\}, \quad S_2 = \{z \in \mathbb{R}_+^2; f(z) > 0\}.$$

O conjunto de descontinuidade, denotado por Σ , separando as regiões S_1 e S_2 é definido por

$$\Sigma = \{z \in \mathbb{R}_+^2; f(z) = 0\}.$$

Para investigar a dinâmica global do sistema de Filippov (1-11) é essencial estudar o comportamento qualitativo dos subsistemas determinados pelos campos de vetores F_{S_1}, F_{S_2} e a dinâmica definida na descontinuidade Σ . Considere

$$\sigma(z) = \langle \nabla f(z), F_{S_1}(z) \rangle \langle \nabla f(z), F_{S_2}(z) \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto escalar padrão. Vamos denotar $F_{S_i} f = \langle \nabla f(z), F_{S_i}(z) \rangle$ com $i = 1, 2$. Então, de acordo com as convenções de Filippov, podemos definir as seguintes regiões em Σ .

- **Região de Costura:** quando $\sigma(z) > 0$, ver Figura 1.4.
- **Região de Escape:** quando $\sigma(z) < 0$ com $F_{S_1} f > 0$ e $F_{S_2} f < 0$, ver Figura 1.5.
- **Região de Deslize:** quando $\sigma(z) < 0$ com $F_{S_1} f < 0$ e $F_{S_2} f > 0$, ver Figura 1.6.

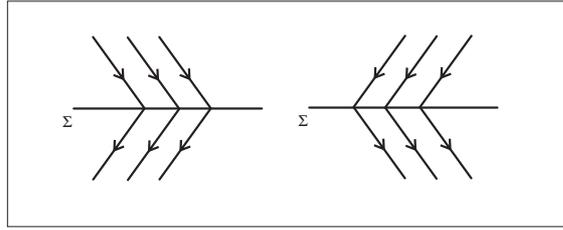


Figura 1.4: Região de costura.

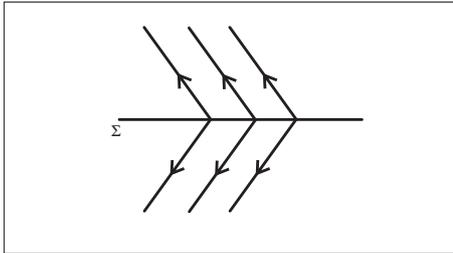


Figura 1.5: Região de escape.

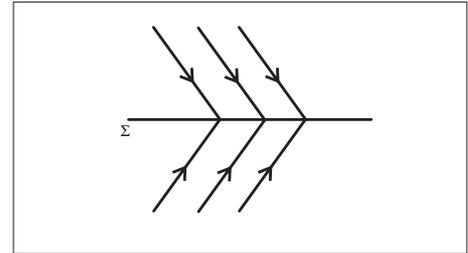


Figura 1.6: Região de deslize.

Observamos que se $F_{S_1}f(z) = 0$ e $F_{S_1}^2f(z) = F_{S_1}(F_{S_1}f(z)) \neq 0$ então $z \in \Sigma$ é um ponto de tangência quadrática de F_{S_1} , caso $F_{S_1}f(z) \neq 0$ a órbita de F_{S_1} é transversal a Σ em z . Ver Figuras 1.7-(a) e 1.7-(b) respectivamente.

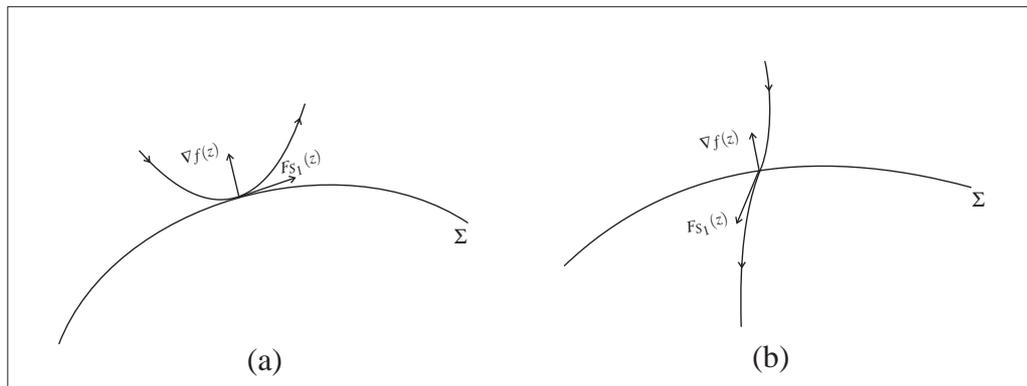


Figura 1.7: (a) Órbita tangente a Σ ; (b) Órbita transversal a Σ .

Temos as seguintes definições para o sistema de Filippov (1-11).

Definição 1.19 Um ponto $z^* \in \mathbb{R}^2$ é chamado um equilíbrio regular do sistema de Filippov (1-11) se $z^* \in S_1$ for um ponto de equilíbrio de F_{S_1} ou se $z^* \in S_2$ for um ponto de equilíbrio de F_{S_2} . Um ponto z^* é chamado um equilíbrio virtual do sistema de Filippov (1-11) se $z^* \in S_2$ for um ponto de equilíbrio de F_{S_1} ou $z^* \in S_1$ for um ponto de equilíbrio de F_{S_2} .

Definição 1.20 Um ponto $z^* \in \mathbb{R}^2$ é chamado um equilíbrio de fronteira do sistema (1-11) se $F_{S_1}(z^*) = 0$ e $f(z^*) = 0$ ou $F_{S_2}(z^*) = 0$ e $f(z^*) = 0$.

O campo de vetores do sistema de Filippov (1-11) na região de deslize Σ_s é definido usando um método de controle, equivalente ao introduzido por Utkin em [23], ou usando o método de Filippov. Pelo método de Filippov temos que o campo de vetores é dado por

$$\frac{dz(t)}{dt} = F_S(z), \quad z \in \Sigma_s,$$

onde $F_S(z) = \lambda F_{S_1}(z) + (1 - \lambda)F_{S_2}(z)$ com $0 < \lambda < 1$ dado por

$$\lambda = \frac{\langle \nabla f(z), F_{S_2}(z) \rangle}{\langle \nabla f(z), F_{S_2}(z) - F_{S_1}(z) \rangle}.$$

Obtemos os seguintes resultados.

Definição 1.21 Um ponto z^* é chamado um pseudo equilíbrio se ele é um equilíbrio na região de deslize do sistema (1-11), isto é, $F_S(z^*) = 0$. Um ponto z^* é chamado um ponto Σ -contato do sistema (1-11) se $z^* \in \Sigma_s$, $F_S(z^*) \neq 0$ e $(F_{S_1}f(z^*))(F_{S_2}f(z^*)) = 0$.

Definição 1.22 Um ponto Σ -contato z^* é chamado um ponto Σ -dobra de F_{S_1} se $F_{S_1}f(z^*) = 0$ mas $F_{S_1}^2f(z^*) \neq 0$, ver Figura 1.7-(a). Além disso, z^* é Σ -dobra visível (resp. invisível) do subsistema F_{S_1} se $F_{S_1}f(z^*) = 0$ e $F_{S_1}^2f(z^*) > 0$ (resp. $F_{S_1}^2f(z^*) < 0$). O ponto z^* é Σ -dobra do sistema (1-11) se ele é um ponto Σ -dobra de F_{S_1} ou de F_{S_2} .

Definição 1.23 Uma curva Γ é chamada um Ciclo de Canard do sistema de Filippov (1-11) se Γ é fechada e

- (i) Γ contém arcos de pelo menos dois dos campos de vetores F_{S_1} , F_{S_2} e F_S ou é composto por um único arco de F_S ,
- (ii) A transição entre arcos de F_{S_1} e arcos de F_{S_2} (ou vice e versa) acontece em pontos de costura,
- (iii) A transição entre arcos de F_{S_1} (ou F_{S_2}) e arcos de F_S acontece nos pontos Σ -dobra de pontos regular no arco escape ou deslize, representando a orientação. Além disso se $\Gamma \neq \Sigma$, então existe pelo menos um ponto Σ - dobra visível em cada componente conexa de $\Gamma \cap \Sigma$.

O próximo resultado nos fornece condições necessárias e suficientes para a existência de um ciclo de canard no sistema de Filippov (1-11), ver [5]. Usaremos este resultado para garantir que existem valores dos parâmetros para os quais os modelos (0-1) e (0-3) possuem um ciclo de canard.

Lema 1.24 Suponhamos que o sistema de Filippov (1-11) tem um único ponto Σ - dobra A_1 que é visível. Denote por Γ_1 o arco de F_{S_i} ($i = 1$ ou $i = 2$) que passa pelo

ponto A_1 e seja A_2 o ponto de contato transversal de Γ_1 com Σ . Então o sistema de Filippov (1-11) tem um ciclo de canard Γ se e somente se as seguintes condições são satisfeitas

- (i) a componente Γ_1 de Γ que passa por A_1 é um arco tipo focal,
- (ii) $(F_{S_1}f)(F_{S_2}f) < 0$ no intervalo $(A_1, A_2]$ e $\{F_{S_1}, F_{S_2}\}$ é um conjunto linearmente independente em $[A_1, A_2]$.

Uma classe de modelos predador-presa de Gause é dada pelo seguinte sistema

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (xg(x) - \xi(y)p(x), \eta(y)(-\gamma + q(x))), \quad (1-12)$$

com condições iniciais $x(0) \geq 0$ e $y(0) \geq 0$, onde \dot{x} e \dot{y} são derivadas em relação ao tempo t e as funções g, ξ, η, q são suficientemente suave de modo que a existência, unicidade e continuidade para todo t positivo são satisfeitas para problemas de valor inicial. Temos que $x(t)$ e $y(t)$ representam as populações presa e predador, respectivamente, em um dado tempo $t \geq 0$. A Proposição seguinte, provada em [15], fornece uma condição para que o sistema (1-12) com $\eta(y) = \xi(y) = y$ apresente um único ciclo limite globalmente assintoticamente estável. Usaremos essa proposição para mostrar que o modelo (0-3) possui um ciclo limite para $x > R_c$.

Proposição 1.25 *Considere o sistema*

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (xg(x) - yp(x), y(-\gamma + q(x))), \quad (1-13)$$

com condição inicial $x(0) > 0$ e $y(0) > 0$. Se

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{xg'(x) + g(x) - xg(x) \frac{p'(x)}{p(x)}}{-\gamma + q(x)} \right) \leq 0,$$

em $0 \leq x < x^*$ e $x^* < x \leq K$, então o sistema (1-13) tem exatamente um ciclo limite que é globalmente assintoticamente estável no conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\} - \{E^*\}$, onde $E^* = (x^*, y^*)$ é o único ponto de equilíbrio interior do sistema de equações diferenciais (1-13).

Modelo predador-presa de Gause com refúgio

Empregando métodos qualitativo e numérico Krivan mostrou, em [14], que o modelo predador-presa de Gause com refúgio (0-1) pode apresentar seis dinâmicas qualitativas distintas.

1. Todas as trajetórias convergem para um ciclo de canard estável.
2. Todas as trajetórias convergem para um pseudo equilíbrio.
3. Algumas trajetórias tendem a um ciclo de canard localmente estável e outras tendem para infinito.
4. Algumas trajetórias tendem a um pseudo equilíbrio localmente estável e outras tendem para infinito.
5. A densidade de presas tende para infinito e a densidade de predadores tende a zero.
6. Todas as trajetórias tendem ao infinito.

O principal objetivo deste capítulo é provar os seis resultados acima para o modelo predador-presa de Gause com refúgio definido em (0-1) por

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \left(rx - \frac{\varepsilon bxy}{1 + bhx}, \frac{\varepsilon k bxy}{1 + bhx} - \delta y \right). \quad (2-1)$$

Para isto fornecemos condições necessárias e suficientes para os cinco primeiros resultados e dois grupos de condições suficientes para que o modelo apresente a dinâmica descrita no sexto resultado.

2.1 Comportamento qualitativo do modelo quando a densidade das presas está acima do limite crítico

Quando a densidade de presas está acima do limite crítico, isto é, quando $x > R_c$ temos que $\varepsilon = 1$ e o comportamento qualitativo do modelo de Gause (2-1) é determinado

pelo subsistema

$$\begin{cases} \dot{x} = rx - \frac{bxy}{1+bhx} = P_2(x,y), \\ \dot{y} = \frac{kby}{1+bhx} - \delta y = Q_2(x,y). \end{cases} \quad (2-2)$$

Nesta seção vamos analisar o comportamento qualitativo do subsistema (2-2). Os pontos de equilíbrio do subsistema (2-2) são $O = (0,0)$ que é um ponto de sela e $E^* = (x^*, y^*)$ que é o único equilíbrio interior, onde $x^* = \frac{\delta}{b(k-\delta h)}$ e $y^* = \frac{rk}{b(k-\delta h)}$. Observe que o ponto de equilíbrio interior E^* esta no primeiro quadrante se

$$\beta = kb - \omega\delta = b(k - \delta h) > 0,$$

onde $\omega = bh$ e como o parâmetro b é sempre maior ou igual a zero temos que $\beta > 0$ implica que $(k - \delta h) > 0$.

Determinando a matriz Jacobiana associada ao subsistema (2-2) no ponto de equilíbrio E^* obtemos que o polinômio característico é dado por

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{\delta rh}{k} \cdot \lambda + \frac{\delta r(k - \delta h)}{k}.$$

O discriminante de $P(\lambda)$ é dado por $\Delta = \frac{r\delta}{k^2} \cdot (r\delta h^2 - 4k^2 + 4k\delta h)$, onde $\frac{r\delta}{k^2} > 0$. Se $(r\delta h^2 - 4k^2 + 4k\delta h) < 0$ então os autovalores são um par de complexos conjugados da forma $\lambda = a_1 \pm ia_2$ com $a_1 = \frac{\delta hr}{2k} > 0$. Assim, pelo Teorema 1.11, o ponto de equilíbrio E^* é, localmente, um foco instável. Além disso, se $(r\delta h^2 - 4k^2 + 4k\delta h) \geq 0$ então os autovalores são $\lambda_{1,2} = a_1 \pm a_2$ onde $a_1 > 0$ e $a_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} > 0$, observamos que $\lambda_{1,2} > 0$, pois pela definição de a_1 e a_2 temos $\lambda_1 = a_1 + a_2 > 0$ e

$$\begin{aligned} \lambda_2 = a_1 - a_2 < 0 &\Leftrightarrow \frac{\delta hr}{2k} < \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \Leftrightarrow \frac{\delta h^2 r^2}{k^2} < \frac{r\delta}{k^2} \cdot (r\delta h^2 - 4k^2 + 4k\delta h) \\ &\Leftrightarrow \frac{4\delta^2 hr}{k} - 4\delta r = 4\delta r(\delta h - k) > 0, \end{aligned}$$

como assumimos $k - \delta h > 0$ e $4\delta r \geq 0$ a última desigualdade é uma contradição, portanto $\lambda_2 > 0$ e, novamente pelo Teorema 1.11, o ponto de equilíbrio E^* é, localmente, um nó instável.

Fazendo a mudança de variáveis $u = x - x^*$ e $v = y - y^*$, obtemos

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{(u+x^*)(rbhu - bv)}{1 + bh(u+x^*)}, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{bu(k - \delta h)(v+y^*)}{1 + bh(u+x^*)}, \end{cases} \quad (2-3)$$

então,

$$\frac{dv}{du} = \frac{bu(k - \delta h)(v+y^*)}{(u+x^*)(rbhu - bv)} = \frac{(k - \delta h)(v+y^*)}{rhu - v + rhx^* - x^* \frac{v}{u}}.$$

Considerando $v = v(u)$ temos que $v(0) = 0$, pois $(u, v) = (0, 0)$ é singularidade isolada do sistema (2-3), assim $q = \frac{dv}{du}(0) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{v(u)}{u}$. Consequentemente, tomando $(u, v) \rightarrow (0, 0)$ na equação acima, obtemos

$$q = \frac{dv}{du} = \frac{y^* k - \delta h}{x^* rh - q} = \frac{rk k - \delta h}{\delta rh - q}, \quad (2-4)$$

simplificando a equação (2-4) obtemos $\delta q^2 - \delta hrq + rk(k - \delta h) = 0$. Resolvendo esta equação quadrática, em q , obtemos

$$q_{1,2} = \frac{rh \pm \sqrt{\frac{r}{\delta}(r\delta h^2 - 4k^2 + 4k\delta h)}}{2} = \frac{rh \pm \sqrt{\frac{k^2}{\delta^2} \Delta}}{2}. \quad (2-5)$$

Portanto, se $\Delta \geq 0$, ou seja o equilíbrio interior E^* é um nó instável, então existem duas assíntotas para o modelo (2-2) na direção negativa, denotadas por

$$L_1 : y = q_1(x - x^*) + y^*, \quad L_2 : y = q_2(x - x^*) + y^* .$$

Além disso, temos que $q_1 > q_2$ e ambos são positivos. De fato, pela expressão (2-5) é fácil ver que $q_1 > q_2$ e $q_1 > 0$, agora para mostrar que $q_2 > 0$ devemos verificar que $rh > \sqrt{\frac{k^2}{\delta^2} \Delta}$, mas isto é válido se e somente se,

$$r^2 h^2 > \frac{k^2}{\delta^2} \Delta = \frac{r}{\delta} (r\delta h^2 + 4k\delta h - 4k^2).$$

Dividindo ambos os lados da inequação acima por r e simplificando o resultado encontrado obtemos

$$4k\delta h - 4K^2 = 4k(\delta h - k) < 0.$$

Esta inequação é verdadeira, já que $\beta = k - \delta h > 0$. Portanto, $q_2 > 0$ como queríamos mostrar.

Resolvendo as equações $Q_2(x, y) = 0$ e $P_2(x, y) = 0$ obtemos, pela Definição 1.4, que as isóclinas particulares do modelo (2-2) são dadas, respectivamente, por

$$L_3 : x = x^*, \quad L_4 : y = rhx + \frac{r}{b},$$

obtidas resolvendo Note que, a inclinação da isóclina L_4 é maior que a inclinação da assíntota L_1 , assim $rh > q_1 > q_2 > 0$. Segue que, se E^* é um nó instável o retrato de fase para o subsistema (2-2) pode ser representado pela Figura 2.1.

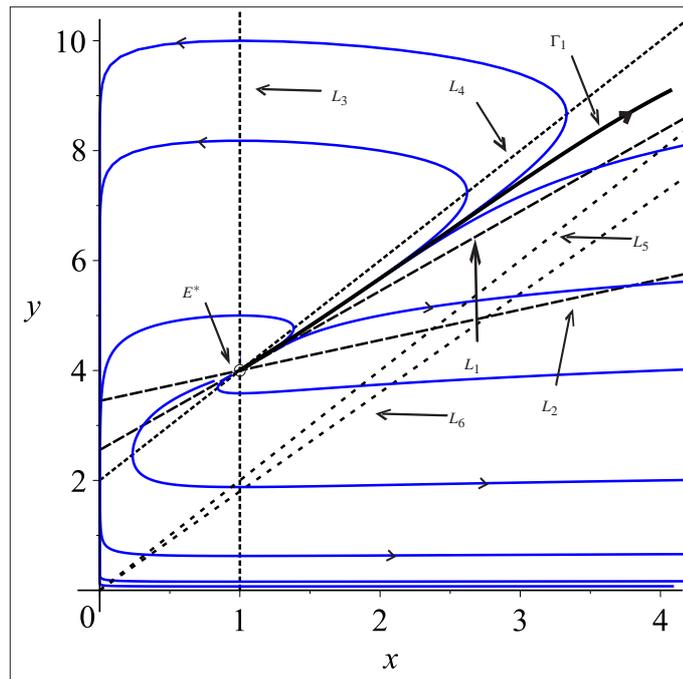


Figura 2.1: Retrato de fase para o subsistema (2-2), onde fixamos os parâmetros $r = 2$, $b = 1$, $k = 0.4$, $h = 1$ e $\delta = 0.2$.

A fim de analisarmos o comportamento qualitativo global do modelo (2-2) consideramos um reescalonamento do tempo dado por

$$t = (1 + \omega x)\tau, \quad \text{ou} \quad dt = (1 + \omega x)d\tau,$$

então o modelo (2-2) torna-se

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = x(r + ax - by), \\ \frac{dy}{d\tau} = y(\beta x - \delta), \end{cases} \quad (2-6)$$

onde $r > 0$, $a = r\omega > 0$ e $\beta = kb - \delta\omega$. Observe que se $\beta \leq 0$, então $\frac{dy}{d\tau} < 0$ para todo $\tau \geq 0$. Isto implica que $(dy/dt)(dt/d\tau) < 0$, ou seja, $\frac{dy}{dt} < 0$ para todo $t \geq 0$, então quando t tende ao infinito temos que y tende a zero, e conseqüentemente x tende ao infinito. Segue

que, se o ponto de equilíbrio E^* não existe então a densidade de presas tende para infinito e a população de predadores morre eventualmente, ou seja, obtemos o seguinte lema.

Lema 2.1 *Se $\beta \leq 0$, então a densidade de presas do modelo (2-2) tende para infinito e a população de predador entra em extinção.*

Para $\beta > 0$ podemos considerar um reescalonamento do tempo no modelo (2-6), dado por $\tilde{t} = \delta\tau$, e a seguinte mudança de variáveis

$$\tilde{x} = \frac{\beta}{\delta}x, \quad \tilde{y} = \frac{b}{\delta}y.$$

Substituindo no modelo (2-6) obtemos,

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{d\tilde{x}}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{d\tilde{t}} = \frac{\beta}{\delta} \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{d\tilde{t}} = \tilde{x} \left(\frac{r}{\delta} + \frac{a}{\beta} \tilde{x} - \tilde{y} \right),$$

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}} = \frac{d\tilde{y}}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{d\tilde{t}} = \frac{b}{\delta} \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{d\tilde{t}} = \tilde{y}(\tilde{x} - 1),$$

ou seja, obtemos o seguinte modelo

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \tilde{x}(p_1 + p_2\tilde{x} - \tilde{y}) = P(\tilde{x}, \tilde{y}), \\ \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}} = \tilde{y}(\tilde{x} - 1) = Q(\tilde{x}, \tilde{y}), \end{cases} \quad (2-7)$$

onde $p_1 = \frac{r}{\delta} > 0$, $p_2 = \frac{a}{\beta} > 0$. O modelo (2-7) possui dois pontos de equilíbrios denotados por $E_0 = (0, 0)$ e $E_1 = (1, p_1 + p_2)$. Determinando a matriz Jacobiana, associada ao campo de vetores do modelo, no ponto E_1 e seu polinômio característico, encontramos que os autovalores são dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{p_2 \pm \sqrt{p_2^2 - 4(p_1 + p_2)}}{2}.$$

Baseado na discussão acima, para E^* , podemos mostrar que, se $p_2^2 < 4(p_1 + p_2)$ então E_1 é um foco instável e se $p_2^2 \geq 4(p_1 + p_2)$ então E_1 é um nó instável. Observe que, a função $f(p_2) = p_2^2 - 4(p_1 + p_2)$ atinge seu valor mínimo em $p_2 = 2$ com $f_{min} = -4(p_1 + 1)$. Além disso, existe uma raiz positiva da equação $f(p_2) = 0$, a qual denotamos por $p^* = 2 + 2\sqrt{p_1 + 1}$. Logo, $f(p_2) < 0$ para todo $0 < p_2 < p^*$, então fazendo uma mudança de variáveis inversa em E_1 , ou seja $1 = \tilde{x} = \beta x / \delta$ e $rk / \delta(k - \delta h) = \tilde{y} = by / \delta$, concluímos que o equilíbrio E^* é um foco instável para $0 < p_2 < p^*$ e um nó instável se $p_2 \geq p^*$.

Vamos mostrar que o modelo (2-7) não possui ciclos limite no primeiro quadrante do \mathbb{R}^2 . Para isto considere $B(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x}^{n-1} \tilde{y}^{m-1}$ uma função de Dulac, então o di-

vergente de $Bf(\tilde{x}, \tilde{y})$ é dado por

$$\nabla(Bf) = \frac{\partial BP}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial BQ}{\partial \tilde{y}} = \tilde{x}^{n-1} \tilde{y}^{m-1} (np_1 + (n+1)p_2 \tilde{x} - n\tilde{y} - m + m\tilde{x}).$$

Assim $n = m = 0$ são tais que $\nabla \cdot Bf = p_2 \tilde{y}^{-1} > 0$ quando $\tilde{y} > 0$. Pelo Teorema 1.13, concluímos que o modelo (2-7) não possui órbitas fechadas no primeiro quadrante do \mathbb{R}^2 , portanto tal modelo não possui ciclo limite nesta região.

Vimos que, para um estudo local o sistema (2-2) pode ser um foco ou um nó instável. A fim de estudarmos o comportamento qualitativo global do sistema é necessário saber como as soluções se comportam quando aproximam do infinito. Para isto, consideramos uma extensão do campo de vetores, associado ao sistema (2-2), à esfera \mathbb{S}^2 e trabalharemos nos hemisférios separados pelo equador. Na esfera \mathbb{S}^2 temos que, o equador representa os pontos do infinito e podemos definir seis cartas locais, dadas por

$$U_i = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2; y_i > 0\}, \quad V_i = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2; y_i < 0\},$$

para $i = 1, 2, 3$. As correspondentes aplicações locais $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ and $\psi_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ são definidas como $\varphi_i(y) = -\psi_i(y) = (y_m/y_i, y_n/y_i)$ para $m < n$ e $m, n \neq i$. Este método é conhecido como Compactificação de Poincaré, ver [9].

Primeiro, consideramos as coordenadas (\tilde{x}, \tilde{y}) para o \mathbb{R}^2 , a carta (U_1, φ_1) e o subsistema (2-2) reescrito como o sistema (2-7). Neste caso, aplicamos a mudança de coordenadas $u = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}$ e $z = \frac{1}{\tilde{x}}$, no subsistema (2-7), e obtemos

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tilde{t}} = \frac{1}{z}(u(1-p_2) - zu(1+p_1) + u^2), \\ \frac{dz}{d\tilde{t}} = \frac{1}{z}(uz - p_2z - p_1z^2). \end{cases} \quad (2-8)$$

Agora reescalamos o tempo no sistema acima tomando $\tau = \frac{\tilde{t}}{z}$ e obtemos

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u(1-p_2) - zu(1+p_1) + u^2, \\ \frac{dz}{d\tau} = uz - p_2z - p_1z^2. \end{cases} \quad (2-9)$$

Considerando $z = 0$ vemos que $O_1 = (0, 0)$ e $N = (p_2 - 1, 0)$ são duas singularidades. Observe que, se voltarmos às variáveis originais x e y obtemos que $O_1 = (\infty, 0)$ e $N = (\infty, \infty)$ são duas singularidades no infinito para o modelo (2-1).

A matriz Jacobiana associada ao campo de vetores do sistema (2-9) é dada por

$$J(u, z) = \begin{pmatrix} -(p_1 + 1)z + (1 - p_2) + 2u & -(p_1 + 1)u \\ z & u - p_2 - 2p_1z \end{pmatrix},$$

então, calculando $J(O_1)$ obtemos uma matriz diagonal cujos autovalores são dados por $\lambda_{1,2} = 1 - p_2, -p_2$. Calculando $J(N)$ obtemos uma matriz cujo polinômio característico é dado por $p(\lambda) = \lambda^2 - (p_2 - 2)\lambda - (p_2 - 1)$. Isto implica que os autovalores de N são $\lambda_{1,2} = p_2 - 1, -1$. Conseqüentemente, se $p_2 > 1$ temos que O_1 é um nó estável e N é um ponto de sela e se $0 < p_2 < 1$ então O_1 é um ponto de sela e N é um nó estável. Além disso, $p_2 < 1$ implica que $p_2^2 < 4(p_1 + p_2)$ pois $p_1 > 0, p_2 > 0$ e, neste caso, $p_2^2 < 4p_2$, assim E_1 é um foco instável, de onde concluímos que E^* é um foco instável quando $p_2 < 1$. Em particular, se $p_2 = 1$ então os pontos de equilíbrio no infinito, O_1 e N , coincidem. Segue que, fazendo um reescalonamento do tempo, $\tau = -\lambda$, no sistema (2-9) com $p_2 = 1$ obtemos

$$\begin{cases} \frac{du}{d\lambda} = zu(1 + p_1) - u^2 = \Phi(u, z), \\ \frac{dz}{d\lambda} = z - uz + p_1z^2 = z + \Psi(u, z), \end{cases} \quad (2-10)$$

onde O_1 é um ponto singular de ordem superior. Tomando $z + \Psi(u, z) = 0$, obtemos $z_1(u) = 0$ e $z_2(u) = (u - 1)/p_1$. Note que $z_1(0) = 0, z_2(0) \neq 0$ e substituindo $z = z_1$ em $\Phi(u, z)$ temos $\Phi(u, z_1) = -u^2$. Segue, pelo Teorema 1.16, que O_1 é um ponto sela-nó.

Agora, consideramos a carta (U_2, ϕ_2) e aplicamos a mudança de coordenadas $v = \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}$ e $z = \frac{1}{\tilde{y}}$ no sistema (2-7). Em seguida, reescalonando o tempo com $\tilde{\tau} = -z\tau$ obtemos o sistema

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\tilde{\tau}} = v - vz(p_1 + 1) - (p_2 - 1)v^2 = v + \Psi_1(v, z), \\ \frac{dz}{d\tilde{\tau}} = vz - z^2 = \Phi_1(v, z), \end{cases} \quad (2-11)$$

que possui duas singularidades, a saber $O_2 = (0, 0)$ e $\bar{N} = (1/(p_2 - 1), 0)$.

Os autovalores de O_2 são $\lambda_{1,2} = 1, 0$, o que implica que O_2 também é uma singularidade de ordem superior. Tomando $v + \Psi_1(v, z) = 0$ em (2-11), obtemos $v_1(z) = 0$ e $v_2(z) = (1 - z(p_1 + 1))/(p_2 - 1)$, onde $v_1(0) = 0$ e $v_2(0) \neq 0$. Substituindo $v = v_1$ em $\Phi_1(v, z)$ obtemos $\Phi_1(v_1, z) = -z^2$ e, novamente pelo Teorema 1.16, concluímos que O_2 é um ponto sela-nó.

Observamos que, nas variáveis x e y , se $p_2 > 1$ então, $O_2 = (0, \infty)$ e $N = \bar{N} = (\infty, \infty)$ são as singularidades no infinito para o subsistema (2-2) e se $0 < p_2 \leq 1$ então N não pertence a \mathbb{R}_+^2 ou coincide com O_1 , assim, O_1 e O_2 são as únicas singularidades no infinito de (2-2).

Em resumo temos o seguinte resultado para o subsistema (2-2).

Teorema 2.2 *Se $\beta > 0$ e $p_2 \leq 1$, então qualquer solução tende à órbita heteroclínica que conecta os pontos O_1 , O_2 e O , onde $O_1 = (\infty, 0)$ e $O_2 = (0, \infty)$ são singularidades no infinito e $O = (0, 0)$ é a origem de \mathbb{R}^2 . Se $\beta > 0$ e $p_2 > 1$, então qualquer solução tende para infinito.*

Demonstração. Se $\beta > 0$ e $p_2 \leq 1$, então o único equilíbrio interior do subsistema (2-2) E^* é um foco instável. Na discussão acima, vimos que não existe ciclo limite em torno de E^* no primeiro quadrante do \mathbb{R}^2 e, além disso, $p_2 \leq 1$ implica em $p_2 - 1 \leq 0$, de onde obtemos que a singularidade $N = \bar{N}$, no infinito, não existe ou coincide com O_1 . As singularidades O_1 e O_2 são pontos de sela ou sela-nó. Assim, numa vizinhança dos pontos O_1 e O_2 , temos os setores hiperbólicos, ver Figura 1.1. Portanto, qualquer solução do modelo irá espiralar em torno de E^* e tender à órbita heteroclínica que conecta os pontos O_1 , O_2 e O .

Se $\beta > 0$ e $p_2 > 1$, então temos três singularidades no infinito, N , O_2 e O_1 que são, respectivamente, um ponto de sela, um ponto sela-nó e um nó estável para o subsistema (2-2). Isto significa que qualquer solução do subsistema iniciando no primeiro quadrante, exceto de E^* tenderá para O_1 ou N , ou seja tenderá para infinito. \square

Se $p_2 > 1$, então o ponto de equilíbrio E^* poderá ser um foco ou nó instável dependendo de p^* . Para analisar a existência de um ciclo de canard no modelo (2-1), precisamos discutir se uma trajetória do subsistema (2-2) partindo de um ponto (x_0, y_0) na isóclina L_4 com $x_0 < x^*$ irá atingir esta linha novamente ou não quando $1 < p_2 < p^*$. Primeiro vamos analisar esta questão considerando um sistema que pode ser um limite do subsistema (2-2) quando $x \rightarrow \infty$, ou um sistema de comparação, dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = rx - \alpha y = P_4, \\ \dot{y} = (m - \delta)y = Q_4, \end{cases} \quad (2-12)$$

onde $\alpha = 1/h$ e $m = k/h$. Denotamos mais duas linhas por

$$L_5 : y = \frac{r}{\alpha}x, \quad L_6 : y = \frac{r + \delta - m}{\alpha}x,$$

com L_5 sendo uma isóclina particular e L_6 uma solução especial do sistema (2-12) dada na forma $y = Ax$, e definimos quatro regiões Θ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, dadas por

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; y < \frac{r}{\alpha}x \right\}, & \Theta_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{r + \delta - m}{\alpha}x < y < \frac{r}{\alpha}x \right\}, \\ \Theta_3 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; y < \frac{r + \delta - m}{\alpha}x \right\}, & \Theta_4 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{r}{\alpha}x < y < \frac{r + \delta - m}{\alpha}x \right\}. \end{aligned}$$

Obtemos os seguintes resultados.

Lema 2.3 *Considere o sistema (2-12), temos que*

- (a) *se $m - \delta > r$ então qualquer solução partindo de $(x_0, y_0) \in \Theta_1$ atinge a linha L_5 em tempo finito.*
- (b) *se $0 \leq m - \delta < r$, então qualquer solução partindo de $(x_0, y_0) \in \Theta_2$ irá alcançar a linha L_5 em tempo finito enquanto qualquer solução partindo de $(x_0, y_0) \in \Theta_3$ irá permanecer nesta região e ambas componentes tenderão para infinito.*
- (c) *se $0 > m - \delta$, então qualquer solução iniciando na região Θ_4 irá atingir a linha L_5 em tempo finito e então a componente x vai para infinito enquanto y tende a zero na região Θ_1 .*

A Figura 2.2 ilustra esse comportamento para valores fixos dos parâmetros.

Demonstração.

Considerando $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ e integrando a segunda equação do sistema (2-12) obtemos

$$y(t) = y_0 e^{(m-\delta)t}, \quad t \geq 0.$$

Substituindo na primeira equação e integrando o resultado concluímos que

$$x(t) = e^{rt} \left\{ x_0 + \frac{\alpha y_0}{m - \delta - r} \left(1 - e^{(m-\delta-r)t} \right) \right\}, \quad t \geq 0.$$

Denotando $M = m - \delta - r$ e $\bar{M} = \alpha y_0 / M$ obtemos

$$x(t) = e^{rt} (x_0 + \bar{M} (1 - e^{Mt})).$$

Portanto

$$\frac{dx}{dt} = r e^{rt} (x_0 + \bar{M} (1 - e^{Mt})) - e^{rt} \bar{M} M e^{Mt}.$$

Observe que, em L_5 temos $dx/dt = 0$, tomando T_M o tempo em que a solução partindo de (x_0, y_0) atinge a linha L_5 e resolvendo esta equação com respeito a t obtemos

$$r e^{rt} (x_0 + \bar{M} (1 - e^{Mt})) - e^{rt} \bar{M} M e^{Mt} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{M} \ln \frac{r(x_0 + \bar{M})}{\bar{M}(r + M)}.$$

Portanto,

$$T_M = \frac{1}{M} \ln \frac{r(x_0 + \bar{M})}{\bar{M}(r + M)} = \frac{1}{M} \ln \frac{r(x_0 + \bar{M})}{\bar{M}(m - \delta)}.$$

Para que $T_M > 0$ exista, consideramos os três casos seguintes.

1. Assumimos que $m - \delta > r$, ou seja, $M > 0$, $m - \delta > 0$ e $\bar{M} > 0$. Segue que,

$$T_M > 0 \Leftrightarrow \frac{r(x_0 + \bar{M})}{\bar{M}(m - \delta)} > 1 \Leftrightarrow r x_0 > \bar{M}(m - \delta) - r \bar{M} = \bar{M} M$$

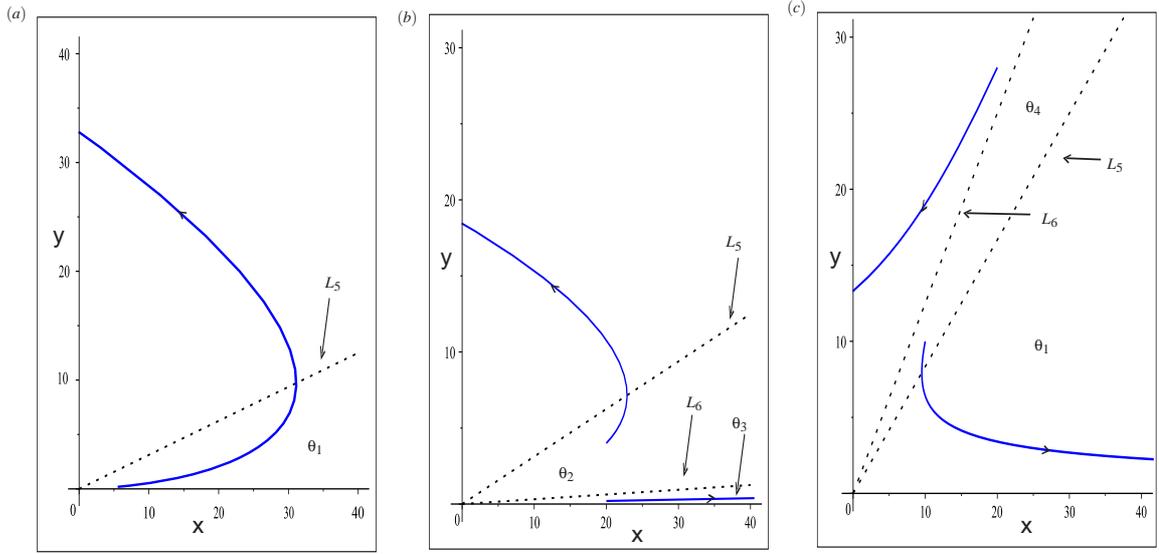


Figura 2.2: Retrato de fase para o modelo (2-12) nos casos 1 2 e 3:
 (a) $m = 3$, $\delta = 1.5$, $r = 1$ e $\alpha = 3.2$; (b) $m = 3$, $\delta = 2.1$,
 $r = 1$ e $\alpha = 3.2$; (c) $m = 1$, $\delta = 1.5$, $r = 1$ e $\alpha = 1.2$.

$$\Leftrightarrow rx_0 > \alpha y_0 \Leftrightarrow y_0 < \frac{rx_0}{\alpha}.$$

Portanto, qualquer solução partindo de $(x_0, y_0) \in \Theta_1$ atinge L_5 em tempo finito.

2. Suponha que $0 \leq m - \delta < r$, então $M < 0$ e $\bar{M} < 0$. Neste caso, devemos ter $x_0 + \bar{M} < 0$ e $T_M > 0 \Leftrightarrow \frac{r(x_0 + \bar{M})}{\bar{M}(m - \delta)} < 1$. Note que, as implicações

$$x_0 + \bar{M} < 0 \Leftrightarrow y_0 > \frac{r + \delta - m}{\alpha} x_0,$$

$$\frac{r(x_0 + \bar{M})}{\bar{M}(m - \delta)} < 1 \Leftrightarrow r(x_0 + \bar{M}) > \bar{M}(m - \delta) \Leftrightarrow rx_0 > \alpha y_0 \Leftrightarrow y_0 < \frac{rx_0}{\alpha},$$

são válidas para todo $(x_0, y_0) \in \Theta_2$. Portanto, qualquer solução partindo de Θ_2 atinge a linha L_5 em tempo finito. Analisando as expressões de $x(t)$ e $y(t)$ em Θ_3 vemos que as soluções partindo de $(x_0, y_0) \in \Theta_3$ não alcançam a linha L_5 , assim tais soluções devem permanecer nesta região. Além disso, quando $t \rightarrow \infty$ ambas componentes x e y tendem para infinito.

3. Suponhamos que $m - \delta < 0$, então $M < 0$ e $\bar{M} < 0$. Neste caso, devemos ter $x_0 + \bar{M} > 0$ e $T_M > 0$ se e somente se $\frac{r(x_0 + \bar{M})}{\bar{M}(m - \delta)} < 1$. Observe que as implicações

$$x_0 + \bar{M} > 0 \Leftrightarrow x_0 > -\frac{\alpha y_0}{m - \delta - r} \Leftrightarrow y_0 < \frac{\delta + r - m}{\alpha} x_0,$$

$$\frac{r(x_0 + \bar{M})}{\bar{M}(m - \delta)} < 1 \Leftrightarrow rx_0 < \bar{M}(m - \delta - r) \Leftrightarrow rx_0 < \alpha y_0 \Leftrightarrow y_0 > \frac{r}{\alpha} x_0,$$

são verdadeiras para todo $(x_0, y_0) \in \Theta_4$. Portanto, qualquer solução partindo Θ_4 atinge a linha L_5 em tempo finito. Analisando as expressões de $x(t)$ e $y(t)$ vemos que, quando $t \rightarrow \infty$ a componente x tende para infinito e y tende a zero.

□

Baseado na demonstração do lema acima, existe um tempo T_M tal que a solução $x(t)$ atinge seu valor extremo neste ponto para os três casos. A fim de aplicarmos o Lema 2.3 no sistema (2-2), notamos que $m - \delta = k/h - \delta = (k - \delta h)/h$ tem o mesmo sinal de $\beta = b(k - \delta h)$. Portanto, se $\beta \leq 0$ então, pelo item (c) do Lema e pelo Teorema 1.10, temos que a população presa vai para infinito enquanto a população predador entra em extinção.

Temos que $r - m + \delta = r + \delta - k/h = ((r + \delta)h - k)/h$ e $p_2 - 1 = \frac{(r + \delta)h - k}{k - \delta h}$. Isto significa que, se o equilíbrio E^* existe, então $p_2 < 1$ é equivalente a $r - m + \delta < 0$, isto é $r < m - \delta$, e vale o caso 1 do Lema 2.3, além disso, $p_2 > 1$ é equivalente a $r - m + \delta > 0$ e vale o caso 2 do Lema 2.3. De acordo com essa discussão, temos o seguinte resultado.

Lema 2.4 *Se E^* existe e $1 < p_2 < p^*$, então qualquer solução do sistema (2-2) iniciando nas regiões Θ_3 e Θ_1 , mostradas na Figura 2.2-(b) e (c), não pode atingir a linha L_4 . Além disso, existe um ponto $A_1 = (x_1, y_1)$ pertencente a linha L_4 tal que a trajetória partindo de A_1 irá ser tangente à linha L_6 no infinito como mostra a Figura 2.3.*

Demonstração. Para todo $(x, y) \in \Theta_1$ ou Θ_3 temos que

$$\frac{\frac{kby}{1 + hbx} - \delta y}{rx - \frac{by}{1 + hbx}} = \frac{Q_2}{P_2} < \frac{\frac{y}{h}(k - \delta h)}{rx - \frac{y}{h}} = \frac{Q_4}{P_4}.$$

De fato, observe que as desigualdades

$$rx - \frac{y}{h} < rx - \frac{y}{h} \left(\frac{hbx}{1 + hbx} \right),$$

$$\frac{kby}{1 + hbx} - \delta y = \frac{hbx}{1 + hbx} \left(\frac{ky}{h} \right) - \frac{\delta hy}{h} < \frac{yk}{h} - \frac{\delta hy}{y},$$

são verdadeiras, já que $\frac{hbx}{1 + hbx} < 1$. Além disso, temos que $y < (rx/\alpha) = rhx$ na região Θ_1 e $rx - (y/h) > (k - \delta h)x$ na região Θ_3 , isto implica que em ambas regiões temos $rx - (y/h) > 0$, já que $k - \delta h > 0$. Segue que, $P_2 > 0$, $P_4 > 0$, $Q_4 > 0$, $Q_2 < Q_4$ e $P_4 < P_2$.

Portanto, $\frac{Q_2}{P_2} < \frac{Q_4}{P_4}$ como queríamos mostrar. Assim, pelo Teorema 1.10 e Lema 2.3, a primeira parte do resultado está provado.

Para a segunda parte do resultado, observe que a linha

$$\tilde{y} = (p_2 - 1)\tilde{x} = \frac{(r + \delta)h - k}{k - \delta h}\tilde{x},$$

então, voltando essa expressão para as variáveis x, y obtemos que $y = ((r + \delta)h - k)x$, que é exatamente a linha L_6 . Consequentemente a singularidade N no infinito pertence a L_6 . Portanto, a linha L_6 é uma assíntota da singularidade N no infinito. \square

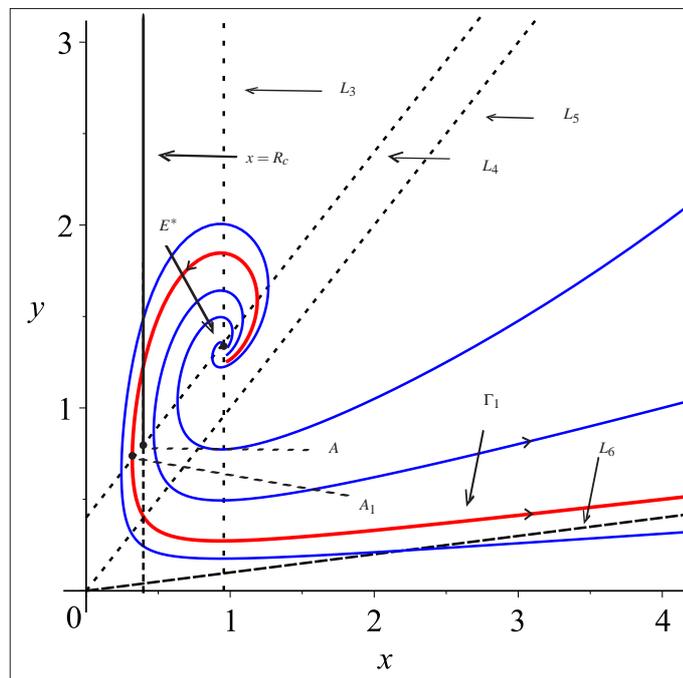


Figura 2.3: Retrato de fase para o modelo (2-2) quando $1 < p_2 < p^*$ e $0 \leq m - \delta < r$.

Vamos denotar as coordenadas de A_1 por (x_1, y_1) . Segue, pelo Lema 2.4, que qualquer solução partindo da linha L_4 com $x < x_1$ entrará na região Θ_3 ou Θ_1 e permanecerá nesta região e qualquer solução partindo da linha L_4 com $x > x_1$ irá espiralar em torno de E^* e então atingir a linha L_4 novamente no lado esquerdo do ponto A_1 . Estas propriedades desempenham um papel fundamental para determinar a existência do ciclo de canard no modelo (2-1).

2.2 Dinâmica na região de deslize

Nesta seção analisamos o comportamento qualitativo do modelo de Gause com refúgio (2-1) na região de deslize Σ_s .

De acordo com as definições dadas na Seção 1.2, podemos considerar o parâmetro ε dado pela expressão (0-2), $f(z) = f(x, y) = x - R_c$ e definir um sistema de Filippov, dado na forma (1-11), associado ao modelo de Gause. Neste caso, o subsistema F_{S_1} definido para $x < R_c$ é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = rx = P_1(x, y), \\ \dot{y} = -\delta y = Q_1(x, y), \end{cases} \quad (2-13)$$

cujo único ponto de equilíbrio, $(0, 0)$, é um ponto de sela e F_{S_2} definido para $x > R_c$ é dado pelo subsistema (2-2). No que segue vamos nos referir aos subsistemas (2-13) e (2-2) como sistemas F_{S_1} e F_{S_2} , respectivamente. Além disso, definimos a região de deslize por $\Sigma_s = \{z \in \Sigma; \sigma(z) < 0\}$, onde

$$\sigma(z) = rx \left(rx - \frac{byx}{1 + bhx} \right),$$

ja que $\nabla f(z) = (1, 0)$. Tomando $f(z) = 0$, isto é $x = R_c$, e resolvendo a inequação $\sigma(z) < 0$ com respeito a y , obtemos $y > \frac{r(1 + bhR_c)}{b} = y_c$, assim, a região de deslize é dada por

$$\Sigma_s = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = R_c, y > y_c\}.$$

Empregando um método de controle, equivalente ao introduzido em [23] por Utkin, podemos obter a equação diferencial para a dinâmica do modelo (2-1) na região de deslize Σ_s . Como $f(z) = 0$ e $x = R_c$ em Σ_s , obtemos que

$$\frac{df}{dt} = \frac{dx}{dt} = rR_c - \frac{\varepsilon b R_c y}{1 + bhR_c} = 0,$$

resolvendo essa equação com respeito a ε , obtemos

$$\varepsilon = \frac{r(1 + bhR_c)}{by}. \quad (2-14)$$

Assim, o comportamento dinâmico na região de deslize Σ_s pode ser determinado pela equação diferencial escalar

$$\frac{dy}{dt} = rkR_c - \delta y, \quad (2-15)$$

que é obtida substituindo o valor de ε , dado em (2-14), na expressão de \dot{y} dada no sistema (2-1). Observe que a equação (2-15) possui um único ponto de equilíbrio que denotamos por y_s^* , com $y_s^* = \frac{rkR_c}{\delta}$, que é estável com respeito a Σ_s . Isto indica que o modelo (2-1) possui um pseudo equilíbrio $E_p = (R_c, y_s^*)$, desde que $y_s^* \geq y_c$.

O campo de vetores do modelo (2-1) definido na região de deslize Σ_s pode ser

descrito por

$$\dot{z}(t) = F_s(z), \quad z \in \Sigma_s,$$

onde $F_s(z) = (0, rkR_c - \delta y)$.

Denotando $A = (R_c, y_c) = \left(R_c, \frac{r(1 + bhR_c)}{b} \right)$, pela Definição 1.22, temos que A é um ponto de Σ -dobra visível para o modelo (2-1). De fato, temos que o campo deslizando aplicado em A é dado por $F_s(A) = (0, rkR_c - \delta y_c) \neq 0$ e

$$(F_{S_1}f(A))(F_{S_2}f(A)) = rR_c \left(rR_c - \frac{bR_c y_c}{1 + bhR_c} \right) = 0,$$

onde a última igualdade é obtida substituindo o valor de y_c na equação. Além disso, $F_{S_2}f(A) = 0$ e

$$F_{S_2}^2 f(A) = \frac{bR_c hr}{1 + bhR_c} > 0,$$

portanto, A é um ponto Σ -dobra do modelo (2-1).

No que segue, identificamos como sistema de Filippov o sistema dado na forma (1-11) que está associado ao modelo de Gause (2-1). Para os pontos de equilíbrio E^* e E_p temos o resultado seguinte.

Lema 2.5 *O equilíbrio regular E^* e o pseudo equilíbrio E_p do sistema de Filippov não podem coexistir.*

Demonstração. Se E^* é um equilíbrio regular do sistema de Filippov, ou seja, $R_c < x^* = \delta/(b(k - \delta h))$, então

$$\begin{aligned} y_c - y_s^* &= \frac{\delta r + rbR_c(\delta h - k)}{b\delta} = \frac{r}{b} \left(1 - \frac{b(k - \delta h)}{\delta} R_c \right) \\ &= \frac{r}{b} \left(1 - \frac{R_c}{x^*} \right) > 0, \end{aligned}$$

isto implica que E_p está fora da região de deslize Σ_s . Segue que, se o equilíbrio regular E^* existe então o pseudo equilíbrio E_p não existe.

Por outro lado, se E_p é um pseudo equilíbrio do sistema de Filippov, ou seja $y_s^* > y_c$, então

$$R_c - x^* = R_c \left(1 - \frac{rk}{b(k - \delta h)} \frac{\delta}{rkR_c} \right) = \left(1 - \frac{y_s^*}{y_c} \right) > 0,$$

pois $y_s^* > y_c \Rightarrow y_s^* > y_c^*$, assim $E^* \in S_1$. Portanto, se o pseudo equilíbrio E_p existe então E^* é um equilíbrio virtual do sistema de Filippov. \square

De acordo com o lema acima, se $x^* > R_c$, então E^* é um equilíbrio regular para o modelo (2-1) e o pseudo equilíbrio E_p não existe, além disso, se $x^* \leq R_c$, então E^* é um equilíbrio virtual e E_p é um pseudo equilíbrio para o modelo (2-1).

2.3 Análise do comportamento dinâmico global

Nesta seção apresentamos uma análise do comportamento qualitativo global do modelo de Gause (2-1). Para isto, assumimos que o equilíbrio E^* de F_{S_2} existe, ou seja, admitimos $\beta > 0$.

Observe que, se $R_c = x^*$ então

$$y_s^* = \frac{rkR_c}{\delta} = \frac{rkx^*}{\delta} = \frac{rk}{b(k - \delta h)} = y^*.$$

Isto indica que o equilíbrio E^* e o pseudo equilíbrio E_p coincidem quando $R_c = x^*$. Portanto, se escolhermos R_c como um parâmetro de bifurcação e fixarmos os demais parâmetros do modelo de Gause (2-1) então, pelo Lema 2.5, ocorre uma bifurcação nó de fronteira ou foco de fronteira em $R_c = x^*$.

Para o modelo de Gause com refúgio (2-1) temos os resultados seguintes.

Teorema 2.6 *O modelo de Gause possui um ciclo de canard Γ , globalmente assintoticamente estável se, e somente se, $R_c < x^*$ e $p_2 \leq 1$. Ver Figura 2.4.*

Demonstração. Suponhamos que $R_c < x^*$ e $p_2 \leq 1$, vamos provar que isto implica na existência e estabilidade do ciclo de canard Γ .

Observe que, qualquer solução iniciando em (x_0, y_0) com $x_0 < R_c$ determinada pelo sistema F_{S_1} irá alcançar a linha $x = R_c$ em um tempo finito. Como $R_c < x^*$, temos que A é Σ -dobra visível e o equilíbrio positivo E^* é regular, então pelo Lema 2.5 o pseudo equilíbrio E_p não existe, isto significa que E_p não pertence a região de deslize Σ_s , ou seja $y_s^* < y_c$, o que implica $y_s^* < y_c \leq y$, para todo $y \in \Sigma_s$. Portanto, como $dy/dt = rkR_c - \delta y$ em Σ_s , temos que $dy/dt < 0$ para todo $(x, y) \in \Sigma_s$ e $t \geq 0$. Consequentemente, o campo deslizante é regular e o subsistema F_{S_2} , dado em (2-2), apresenta o comportamento dinâmico descrito no Teorema ?? da seção 2.1 quando $p_2 \leq 1$. Assim, E^* é um foco instável do sistema F_{S_2} , já que consideramos $p_2 \leq 1$, e o conjunto ω -limite de qualquer solução do sistema F_{S_2} , exceto E^* , é a órbita heteroclínica que conecta os pontos de equilíbrio O , O_1 e O_2 .

Para que o ciclo de canard exista é necessário mostrar que a solução partindo do ponto A irá atingir Σ_s , digamos em um ponto $B \in \Sigma_s$, ver Figura 2.4. Note que, $B \neq A$, caso contrário teríamos um ciclo limite e isto seria uma contradição, pois vimos na seção anterior que não existe ciclo limite no sistema F_{S_2} . Denote a trajetória partindo do ponto

$A = (R_c, y_c)$ por Γ_2 , então queremos mostrar que Γ_2 intercepta a linha $x = R_c$ no ponto B em tempo finito.

A solução de F_{S_2} partindo do ponto A , isto é Γ_2 , irá alcançar a isóclina L_4 para $x < x^*$ em um ponto que não pode estar à direita de A devido a instabilidade de E^* e ao fato de que não existe ciclo limite no sistema F_{S_2} . Logo, Γ_2 atinge L_4 em um ponto que se localiza à esquerda de A e isto indica que Γ_2 passa pela linha $x = R_c$ em um ponto $B \in \Sigma_s$. Além disso, Γ_2 é um arco do tipo focal pois E^* é um foco do sistema F_{S_2} e $(F_{S_1}f(z))(F_{S_2}f(z)) < 0$ em $(A, B]$ pois $(A, B] \subset \Sigma_s$. Finalmente, $R_c < x^*$ implica que $y_c > y_s^*$, ou seja, E_p não pertence ao conjunto $[A, B]$, conseqüentemente $\{F_{S_1}, F_{S_2}\}$ é um conjunto linearmente independente em $[A, B]$. De acordo com o Lema 1.24 e a Definição 1.23 vemos que o sistema de Filippov associado ao modelo de Gause (2-1) possui um ciclo de canard que denotamos por $\Gamma = \Gamma_2 \cup \overline{AB}$ como mostra a Figura 2.4. Qualquer solução iniciando no lado externo a Γ deve alcançar Σ_s e portanto tal solução tende a Γ e qualquer solução iniciando no lado interno de Γ atinge o segmento \overline{AB} , caso contrário teríamos uma contradição com o Teorema 1.6 pois o subsistema F_{S_2} não possui ciclo limite e E^* é instável. Concluimos que o modelo de Gause (2-1) possui um ciclo de canard Γ que é globalmente assintoticamente estável, ver Figura 2.4.

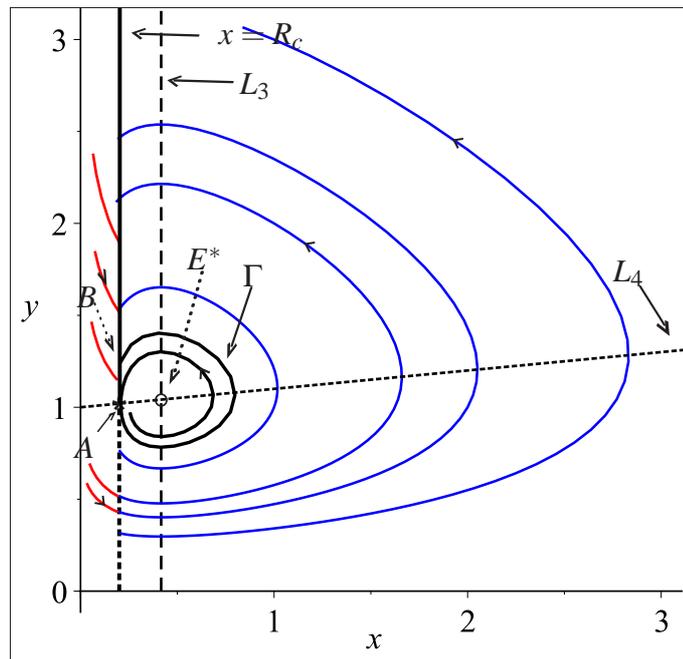


Figura 2.4: Retrato de fase para o modelo (2-1) com os parâmetros fixos $r = 1$, $b = 1$, $k = 0.5$, $h = 0.1$, $\delta = 0.2$ e $R_c = 0.2$.

Reciprocamente, se o modelo (2-1) possui um ciclo de canard assintoticamente estável então $R_c < x^*$ e $p_2 \leq 1$. De fato, se tivéssemos $R_c > x^*$ o ponto E^* seria um equilíbrio virtual, então o pseudo equilíbrio E_p existiria e seria um ponto estável em relação a Σ_s . Isto é uma contradição com estabilidade global de Γ . Além disso, se $p_2 > 1$

então, pelo item (b) do Lema 2.3, temos que qualquer solução partindo da região Θ_3 permanecerá nesta região. Novamente, isto contradiz a estabilidade global de Γ . Portanto, $p_2 \leq 1$. \square

Na demonstração do teorema acima vimos que o fato de que a trajetória Γ_2 partindo de A atinge a região de deslize Σ_s novamente ou não desempenha um papel fundamental para a existência do ciclo de canard. No que segue, fornecemos um método geral para mostrar que Γ_2 atinge Σ_s novamente em ponto $B = (R_c, y_B)$.

Considere a seguinte equação diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left(r - \frac{by}{1+bhx^*} \right) = P_3(x, y), \\ \dot{y} = \frac{kby}{1+bhx} - \delta y = Q_3(x, y), \end{cases} \quad (2-16)$$

onde x^* é a componente x do ponto de equilíbrio E^* . O sistema (2-16) possui um único equilíbrio no primeiro quadrante que é exatamente E^* e os autovalores neste equilíbrio são dados por $\lambda = \pm i \sqrt{r\delta(k-\delta h)/k}$. Isto implica que o ponto de equilíbrio E^* é um centro para o sistema (2-16). Além disso, pela definição 1.3, temos que para qualquer valor inicial (x_0, y_0) a função definida por

$$\frac{k}{h} \ln \frac{1+bhx}{1+bhx_0} - \delta \ln \frac{x}{x_0} = r \ln \frac{y}{y_0} - \frac{b(y-y_0)}{1+bhx^*} \quad (2-17)$$

é uma integral primeira para o sistema (2-16). De fato, defina a função

$$g(x, y) = \frac{k}{h} \ln \frac{1+bhx}{1+bhx_0} - \delta \ln \frac{x}{x_0} - r \ln \frac{y}{y_0} + \frac{b(y-y_0)}{1+bhx^*}, \quad (2-18)$$

assim a integral primeira é dada por $g(x, y) = 0$. Mostraremos que, para qualquer valor de x e y a função $g(x, y)$ é constante ao longo das trajetórias de (2-16). Temos que

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt}(x, y) &= \left(\frac{kb}{1+bhx} - \frac{\delta}{x} \right) \dot{x} + \left(\frac{b}{1+bhx^*} - \frac{r}{y} \right) \dot{y} \\ &= \left(\frac{kb}{1+bhx} - \frac{\delta}{x} \right) \left(r - \frac{by}{1+bhx^*} \right) x + \left(\frac{b}{1+bhx^*} - \frac{r}{y} \right) \left(\frac{kby}{1+bhx} - \delta y \right), \end{aligned}$$

simplicando a expressão obtida concluímos que $\frac{dg}{dt}(x, y) = 0$. Logo, pela Definição 1.3, temos que $g(x, y)$ é constante ao longo das trajetórias do sistema (2-16). Em particular, para x e y tais que $g(x, y) = 0$.

Como $R_c < x^*$, temos $y_c < y^*$ e existe uma trajetória fechada do sistema (2-16), denotada por γ_0 , que é tangente a linha $x = R_c$ em um ponto M como mostra a Figura

2.5. Portanto a trajetória γ_1 de (2-16) partindo de A pode alcançar Σ_s novamente no ponto $A' = (R_c, y_{A'})$. Note que, ambos pontos A e A' pertencem à mesma trajetória γ_1 , assim as coordenadas de A e A' satisfazem a equação (2-17). Logo, tomando $(x_0, y_0) = (R_c, y_c)$ e $(x, y) = (R_c, y_{A'})$, obtemos

$$y_{A'} = y_c \exp\left(\frac{by_{A'}}{r(1+bhx^*)}\right) \exp\left(-\frac{by_c}{r(1+bhx^*)}\right),$$

multiplicando ambos os lados da igualdade acima por $-\frac{b}{r(1+bhx^*)} \exp\left(-\frac{by_{A'}}{r(1+bhx^*)}\right)$ e simplificando a equação resultante obtemos

$$-\frac{by_{A'}}{r(1+bhx^*)} \exp\left(-\frac{by_{A'}}{r(1+bhx^*)}\right) = -\frac{by_c}{r(1+bhx^*)} \exp\left(-\frac{by_c}{r(1+bhx^*)}\right),$$

com

$$-\frac{by_c}{r(1+bhx^*)} \exp\left(-\frac{by_c}{r(1+bhx^*)}\right) \in [e^{-1}, 0)$$

Segue, de $y_{A'} > y_c$ que

$$y_{A'} = -\frac{r(1+bhx^*)}{b} W\left\{-1, -\frac{by_c}{r(1+bhx^*)} \exp\left(-\frac{by_c}{r(1+bhx^*)}\right)\right\},$$

onde W , conhecida como a função W de Lambert, é definida como a inversa, com vários valores, da função $z \mapsto ze^z$ que satisfaz a equação $W(z) \exp(W(z)) = z$. Para mais detalhes, ver [8].

Agora, vamos mostrar que o ciclo de canard Γ pertence ao lado externo de γ_1 e $y_{A'} < y_B$.

Por conveniência, denotamos

$$f(x, y) = \frac{Q_2(x, y)}{P_2(x, y)}, \quad F(x, y) = \frac{Q_3(x, y)}{P_3(x, y)}$$

e consideramos as seguintes regiões

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) | R_c \leq x \leq x^*, 0 < y \leq y^*\}, & D_2 &= \{(x, y) | x \geq x^*, 0 < y \leq y^*\}, \\ D_3 &= \{(x, y) | x \geq x^*, y^* \leq y \leq r(1+bhx)/b\}, & D_4 &= \{(x, y) | x > x^*, y > r(1+bhx)/b\}, \\ D_5 &= \{(x, y) | R_c < x < x^*, y > y^*\}. \end{aligned}$$

Na região D_1 temos que $P_2 < P_3$, $Q_2 < 0$ e $Q_3 < 0$, de onde obtemos que $f(x, y) < F(x, y)$. Pelo Teorema 1.10, concluímos que Γ_2 deve estar no lado externo a γ_1 em D_1 como mostra a Figura 2.5. Seja $M_1 = (x^*, y_{M_1})$ o primeiro ponto de interseção de Γ_2 com a linha $x = x^*$ e $N_1 = (x^*, y_{N_1})$ a primeira interseção entre γ_1 e a linha $x = x^*$,

então $y_{N_1} > y_{M_1}$. Além disso, seja γ_2 a trajetória do sistema (2-16) partindo do ponto M_1 então a curva fechada γ_1 pertence ao interior da curva γ_2 .

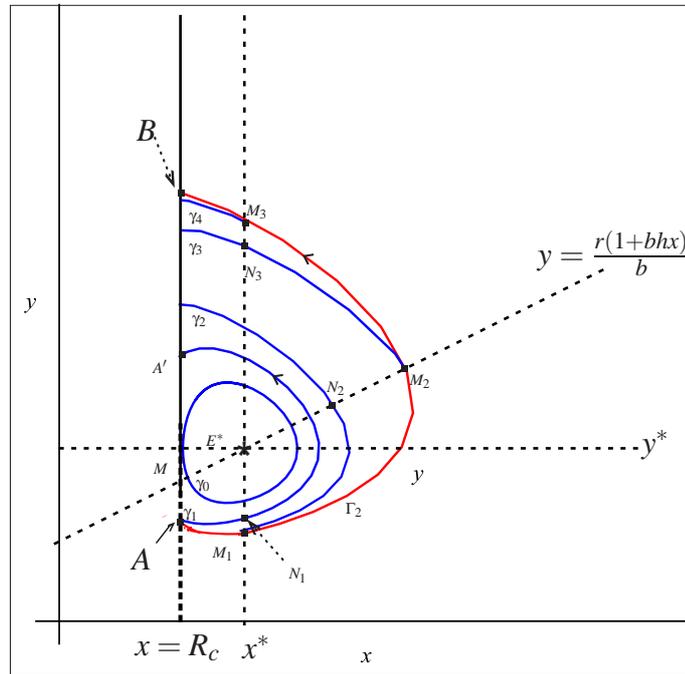


Figura 2.5: Retrato de fase para o sistema (2-16) e uma solução particular do modelo (2-1).

Na região D_2 temos que $P_2 > P_3$, $Q_2 > 0$ e $Q_3 > 0$, assim $f(x,y) < F(x,y)$. Novamente, pelo Teorema 1.10, temos que a curva Γ_2 pertence ao lado externo da curva γ_2 nesta região. Em D_3 temos $P_3 < 0 < P_2$, $Q_2 > 0$ e $Q_3 > 0$, assim $F(x,y) < 0 < f(x,y)$. Isto implica que também temos Γ_2 no lado externo de γ_2 na região D_3 . Seja $M_2 = (x_{M_2}, y_{M_2})$ o ponto de interseção de Γ_2 com a linha $L : y = r(1 + bhx)/b$ e $N_2 = (x_{N_2}, y_{N_2})$ a interseção entre γ_2 e a linha L , temos que $x_{M_2} > x_{N_2}$, $y_{M_2} > y_{N_2}$. Seja γ_3 a trajetória do sistema (2-16) partindo do ponto M_2 , então γ_2 pertence ao interior de γ_3 . Além disso, seja $M_3 = (x^*, y_{M_3})$ o segundo ponto de interseção de Γ_2 com a linha $x = x^*$ e $N_3 = (x^*, y_{N_3})$ a primeira interseção de γ_3 com a linha $x = x^*$ como mostra a Figura 2.5.

Considerando a região D_4 temos que $P_2 > P_3$, $Q_2 > 0$ e $Q_3 > 0$, de onde obtemos $f(x,y) < F(x,y)$. Isto indica que, nesta região, a curva Γ_2 esta no lado externo de γ_3 e $y_{M_3} > y_{N_3}$. Denotamos por γ_4 a trajetória do sistema (2-16) partindo do ponto M_3 , então γ_4 pertence ao lado externo de γ_3 .

Finalmente, na região D_5 temos que $P_2 < P_3$, $Q_2 < 0$ e $Q_3 < 0$, e isto implica que $f(x,y) < F(x,y)$. Logo, nesta região, a curva Γ_2 pertence ao lado externo de γ_4 .

Concluimos que a curva Γ_2 pertence ao lado externo da curva γ_1 na região

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5 = \{(x,y) | x > R_c, y > 0\}.$$

Portanto, a curva Γ_2 partindo do ponto A atinge a linha $x = R_c$ novamente no ponto B , além disso, temos que $y_{A'} < y_B$.

Teorema 2.7 *O pseudo equilíbrio E_p é globalmente assintoticamente estável se e somente se $R_c \geq x^*$ e $p_2 \leq 1$.*

Demonstração. Se $R_c \geq x^*$ então o pseudo equilíbrio E_p existe e além disso é assintoticamente estável com respeito a região de deslize Σ_s . Pelo Lema 2.5 temos que E^* é um equilíbrio virtual do sistema de Filippov e A é um ponto Σ -dobra invisível, assim qualquer solução partindo de um ponto (x_0, y_0) pertencente a linha $x = R_c$ com $y_0 < y_c$ deve alcançar esta linha novamente em um ponto (x, y) com $y > y_c$, ou seja em um ponto que pertence a Σ_s , e então tender ao pseudo equilíbrio E_p . Observe que, qualquer trajetória do modelo (2-1) partindo da região S_1 encontra a linha $x = R_c$ em um ponto (\bar{x}, \bar{y}) , além disso se $\bar{y} < y_c$ então essa trajetória entra na região S_2 , caso contrário, isto é $\bar{y} \geq y_c$, a trajetória atinge a região de deslize Σ_s . Em ambos os casos temos que a trajetória partindo de S_1 tende ao pseudo equilíbrio E_p . Portanto E_p é globalmente assintoticamente estável.

Suponhamos que o pseudo equilíbrio do sistema de Filippov seja globalmente assintoticamente estável, vamos provar que $R_c \geq x^*$ e $p_2 \leq 1$. Se $R_c < x^*$ então E^* é um equilíbrio regular, mas isto contraria a existência do pseudo equilíbrio segundo o Lema 2.5. Por outro lado se $p_2 > 1$, novamente pelo item (b) do Lema 2.3, temos que qualquer solução iniciando em Θ_3 permanecerá nesta região, contrariando a estabilidade global do pseudo equilíbrio. Portanto, $R_c \geq x^*$ e $p_2 \leq 1$ como queríamos demonstrar. \square

Teorema 2.8 *O modelo de Gause possui um único ciclo de canard Γ localmente assintoticamente estável se e somente se $x_1 < R_c < x^*$ e $1 < p_2 < p^*$.*

Demonstração. Suponhamos que $x_1 < R_c < x^*$ e $1 < p_2 < p^*$, então o ponto de equilíbrio E^* é um foco instável. Pelo Lema 2.4 temos que a solução partindo de A , Γ_2 irá atingir a linha L_4 e voltar a Σ_s em algum ponto B . É claro que $B \neq A$, caso contrário teríamos um ciclo limite em F_{S_2} , isto é uma contradição, portanto existe o ciclo de canard $\Gamma = \Gamma_2 \cup [A, B]$. Além disso, qualquer solução iniciando na região Θ_3 com $x_0 > R_c$ irá permanecer nesta região e toda solução iniciando no lado interno a Γ irá alcançar o segmento $[A, B]$, então tal solução tende a Γ . Segue que Γ é localmente assintoticamente estável.

Agora assumimos que o modelo (2-1) tem um único ciclo de canard localmente assintoticamente estável Γ e vamos provar que $x_1 < R_c < x^*$ e $1 < p_2 < p^*$. Observe que, a existência de Γ implica $R_c < x^*$, caso contrário existiria, segundo o Lema 2.5, o pseudo equilíbrio E_p que é estável em relação a Σ_s , fato este que contraria a existência de Γ . Pelo Teorema 2.6 devemos ter $p_2 > 1$. Se $R_c < x^*$ e $p_2 \geq p^*$, então ambas componentes

x e y do modelo tendem para infinito, pois neste caso temos que E^* é um nó instável e a solução partindo do ponto A tende a infinito. Portanto o resultado segue do Teorema 2.2. Novamente, isto é uma contradição com a existência do ciclo canard Γ . Finalmente, segue pelo Lema 2.4 que $x_1 < R_c$ e a prova esta completa. \square

Teorema 2.9 *O pseudo equilíbrio E_p é localmente assintoticamente estável se, e somente se, $R_c \geq x^*$ e $p_2 > 1$.*

Demonstração. Se $R_c \geq x^*$, então E^* é um equilíbrio virtual e o pseudo equilíbrio E_p existe. Por hipótese temos que $p_2 > 1$, assim qualquer solução acima da órbita Γ_1 , mostrada nas Figuras 2.3 e 2.1, irá atingir Σ_s e então tender ao pseudo equilíbrio E_p , enquanto qualquer solução partindo de Θ_3 , ver Figura 2.2-(b), com $x_0 > R_c$ irá permanecer nesta região. Portanto, obtemos estabilidade assintótica local de E_p . Reciprocamente, suponhamos que o pseudo equilíbrio E_p é localmente assintoticamente estável. Então, pelo Lema 2.5, devemos ter $R_c \geq x^*$. Se $p_2 \leq 1$ então pelo Teorema 2.7 temos que o pseudo equilíbrio E_p do modelo (2-1) é globalmente assintoticamente estável contrariando nossa hipótese, assim devemos ter $p_2 > 1$. \square

Baseado no Teorema 2.2 e nas provas dos Teoremas 2.8 e 2.9, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.10 *Se $R_c \leq x_1$ e $1 < p_2 < p^*$, então ambas componentes x e y tendem para infinito. Se $R_c < x^*$ e $p_2 \geq p^*$ também teremos que ambas componentes x e y tendem a infinito.*

Nos teoremas acima abordamos o comportamento qualitativo do modelo de Gause (2-1) quando $\beta = b(k - \delta h) > 0$. Entretanto, se $\beta \leq 0$ temos o seguinte resultado.

Teorema 2.11 *A singularidade O_1 no infinito é um ponto globalmente assintoticamente estável se, e somente se, $\beta = b(k - \delta h) \leq 0$.*

Demonstração. Suponhamos que a singularidade O_1 seja globalmente assintoticamente estável. Se $\beta > 0$, então segue dos Teoremas 2.6-2.9 e do Corolário 2.10 que deve existir uma trajetória no modelo (2-1) além de E^* que pode ser o ciclo de canard Γ , o pseudo equilíbrio E_p ou a trajetória Γ_1 . Isto é uma contradição com a estabilidade global de O_1 . Portanto devemos ter $\beta \leq 0$.

Reciprocamente, se $\beta \leq 0$ então o pseudo equilíbrio E_p não existe. Caso contrário, teríamos

$$y_{s^*} = \frac{rkR_c}{\delta} \geq y_c = \frac{r}{b}(1 + bhR_c),$$

e assim

$$\frac{R_c}{\delta}(k - \delta h) \geq \frac{1}{b},$$

mas isto é uma contradição, já que $\beta \leq 0$. Segue que, qualquer solução partindo do ponto A tende a O_1 . Além disso, pelo Lema 2.1, temos que a densidade de presas no subsistema (2-2) tende para infinito enquanto que a densidade de predadores tende a zero. Consequentemente, qualquer solução do modelo (2-1) partindo de $(x_0, y_0) \in S_2$ tende para infinito. Observe que, qualquer solução partindo da região S_1 entra em S_2 e deve tender para O_1 . Isto ocorre porque a origem é ponto de sela para o subsistema (2-13) com subespaço instável sendo o eixo $y = 0$. Portanto, O_1 é globalmente assintoticamente estável. \square

Modelo predador-presa de Gause considerando a capacidade de suporte

Neste capítulo vamos analisar o comportamento qualitativo global do modelo predador-presa de Gause com refúgio considerando a capacidade de suporte do ambiente para a população de presas. Neste caso, o modelo de Gause pode ser escrito como

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \left(rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\varepsilon bxy}{1 + bhx}, \frac{\varepsilon k bxy}{1 + bhx} - \delta y \right), \quad (3-1)$$

onde $\varepsilon = 1$ para $x > R_c$ e $\varepsilon = 0$ para $x < R_c$.

Considerando $f(z) = x - R_c$, onde $z = (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, podemos definir um sistema de Filippov para o modelo conforme as definições dadas na seção 1.2 do capítulo 1. Note que, se $f(z) < 0$ o comportamento qualitativo do sistema (3-1) é determinado pelo subsistema

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \left(rx \left(1 - \frac{x}{K} \right), -\delta y \right), \quad (3-2)$$

se $f(z) > 0$ o comportamento é determinado pelo subsistema

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \left(rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{bxy}{1 + bhx}, \frac{k bxy}{1 + bhx} - \delta y \right). \quad (3-3)$$

Então, podemos definir um sistema de Filippov para o modelo (3-1), dado na forma (1-11), onde F_{S_1} e F_{S_2} são os campos de vetores associados aos subsistemas (3-2) e (3-3), respectivamente. Além disso, o conjunto de descontinuidade é dado por $\Sigma = \{z \in \mathbb{R}_+^2; f(z) = 0\}$.

3.1 Comportamento qualitativo do modelo

Nesta seção vamos analisar o comportamento qualitativo do modelo (3-1).

O subsistema (3-2) não possui equilíbrio interior, no entanto ele possui o equilíbrio trivial $(0, 0)$ e o equilíbrio predador livre $(K, 0)$. Temos que, $(0, 0)$ é um ponto de sela cuja variedade estável é a reta $x = 0$ e a variedade instável é a reta $y = 0$ e pelo Te-

orema 1.11 temos que $(K, 0)$ é um nó estável. No subsistema (3-3) existem três pontos de equilíbrio, $(0, 0)$, $(K, 0)$ e o único equilíbrio interior que denotamos por $E_1^* = (x_1^*, y_1^*)$, onde

$$x_1^* = \frac{\delta}{b(k - \delta h)}, \quad y_1^* = \frac{rk(bK(k - \delta h) - \delta)}{b^2(k - \delta h)^2 K}.$$

Observe que o ponto de equilíbrio interior E_1^* pertence ao primeiro quadrante desde que $k - \delta h > 0$ e $bK(k - \delta h) - \delta > 0$. No que segue admitimos a existência de um único equilíbrio para subsistema (3-3), isto é, as desigualdades $k - \delta h > 0$ e $bK(k - \delta h) - \delta > 0$ são verdadeiras.

Determinando a matriz Jacobiana, DF_{S_2} , associada ao campo vetorial definido pelo subsistema (3-3) e aplicando esta matriz nos pontos de equilíbrio de F_{S_2} obtemos que $(K, 0)$ é um ponto de sela com $y = 0$ sendo a variedade estável e a reta

$$y = \frac{Kb\delta h - Kbk + \delta - Kbh r - r}{bK}(x - K)$$

sendo a variedade instável e $(0, 0)$ é um ponto de sela cuja variedade estável é a reta $x = 0$ e a variedade instável é a reta $y = 0$. Agora, calculando $DF_{S_2}(E_1^*)$ obtemos que o determinante e o traço são dados por

$$\det(DF_{S_2}(E_1^*)) = \frac{-\delta r(Kb\delta h - Kbk + \delta)}{kKb},$$

$$\text{tr}(DF_{S_2}(E_1^*)) = \frac{(Kb\delta h^2 - Kbhk + \delta h + k)\delta r}{kKb(\delta h - k)},$$

respectivamente. Como o polinômio característico do subsistema (3-3) em E_1^* é dado por $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \text{tr}(DF_{S_2}(E_1^*)) + \det(DF_{S_2}(E_1^*))$, obtemos

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \frac{(Kb\delta h^2 - Kbhk + \delta h + k)\delta r}{kKb(\delta h - k)} - \frac{\delta r(Kb\delta h - Kbk + \delta)}{kKb}.$$

Denotando $p = -\text{tr}(DF_{S_2}(E_1^*))$ e $q = \det(DF_{S_2}(E_1^*))$, vemos que $q > 0$ já que assumimos $bK(k - \delta h) - \delta > 0$. Além disso,

- (a) se $x_1^* < \frac{Kbh - 1}{2bh}$, então $p < 0$;
- (b) se $x_1^* > \frac{Kbh - 1}{2bh}$, então $p > 0$.

De fato,

$$x_1^* = \frac{\delta}{b(k - \delta h)} < \frac{Kbh - 1}{2bh} \Rightarrow b(k - \delta h)(Kbh - 1) - 2bh\delta > 0$$

$$\Rightarrow -b(k - hkKb + \delta h + \delta bh^2 K) > 0 \Rightarrow (k - hkKb + \delta h + \delta bh^2 K) < 0.$$

Como $(k - \delta h) > 0$ e os parâmetros r, δ, K, k e b são positivos concluímos que

$$p = \frac{r\delta}{(\delta h - k)Kkb}(k - hkKb + \delta h + \delta bh^2K) < 0.$$

Analogamente concluímos a afirmação (b).

Considere $\Delta = p^2 - 4q$ o discriminante do polinômio característico $P(\lambda)$, assim os autovalores λ , associados à matriz $DF_{S_2}(E_1^*)$, são determinados pela expressão

$$\lambda = \frac{-p \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (3-4)$$

segue que,

1. se $x_1^* < \frac{Kbh - 1}{2bh}$ e $\Delta < 0$, então E_1^* é um foco instável,
2. se $x_1^* < \frac{Kbh - 1}{2bh}$ e $\Delta \geq 0$, então E_1^* é um nó instável,
3. se $x_1^* > \frac{Kbh - 1}{2bh}$ e $\Delta < 0$, então E_1^* é um foco estável,
4. se $x_1^* > \frac{Kbh - 1}{2bh}$ e $\Delta \geq 0$, então E_1^* é um nó estável.

Neste trabalho vamos investigar o comportamento dinâmico do sistema (3-1), usando técnicas de análise qualitativa, quando E_1^* é um foco. No entanto, quando E_1^* é um nó, vamos apresentar o comportamento dinâmico do sistema (3-1) numericamente.

Lema 3.1 *Suponha que $x_1^* < \frac{Kbh - 1}{2bh}$ e $\Delta < 0$, então o subsistema (3-3) possui um único ciclo limite, globalmente assintoticamente estável, no primeiro quadrante.*

Demonstração.

Temos que $0 \leq x < K, y > 0$ e E_1^* é um foco instável. Com as notações da Proposição 1.25, sejam $g(x) = r\left(1 - \frac{x}{K}\right)$, $p(x) = \frac{bx}{1 + bhx}$ e $-\gamma + q(x) = \frac{kbx}{1 + bhx} - \delta$. Então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{xg'(x) + g(x) - xg(x)\frac{p'(x)}{p(x)}}{-\gamma + q(x)} \right) &= -\frac{d}{dx} \left(\frac{2rbhx^2 + rx - Krbhx}{Kb(k - \delta h)x - K\delta} \right) \\ &= -\frac{d}{dx} \left(\frac{2rbhx^2 + rx - Krbhx}{Kb(k - \delta h)(x - x_1^*)} \right), \end{aligned} \quad (3-5)$$

calculando a derivada em (3-5) obtemos a seguinte equação,

$$\frac{1}{b(k - \delta h)(x - x_1^*)^2} \left(-\frac{2rbhx^2}{K} + \frac{4rbhx_1^*x}{K} + \left(rbh + \frac{r}{K} \right) x_1^* \right). \quad (3-6)$$

Agora vamos analisar o sinal da equação (3-6). Para isso basta analisarmos o sinal da equação do segundo grau

$$f(x) = -\frac{2rbhx^2}{K} + \frac{4rbhx_1^*x}{K} + \left(rbh + \frac{r}{K} \right) x_1^*,$$

ja que $\frac{1}{b(k - \delta h)(x - x_1^*)^2} \geq 0$. Observe que o gráfico de $f(x)$ é uma parábola com concavidade para baixo e o discriminante é dado por

$$\Delta_1 = \frac{8r^2bhx_1^*}{K^2} (2bhx_1^* + 1 - bhK),$$

onde $\frac{8r^2bhx_1^*}{K^2} \geq 0$. Por hipótese temos que $x_1^* \leq \frac{bhK - 1}{2bh}$, conseqüentemente obtemos

$$(2bhx_1^* + 1 - bhK) \leq 0,$$

ou seja, $\Delta_1 \leq 0$ e $f(x)$ possui no máximo uma raiz real, o que implica que $f(x) \leq 0$. Segue que,

$$\frac{1}{b(k - \delta h)(x - x_1^*)^2} f(x) \leq 0.$$

Portanto, pela Proposição 1.25, o subsistema (3-3) possui um único ciclo limite globalmente assintoticamente estável. \square

3.1.1 Dinâmica na região de deslize e existência de equilíbrios

De acordo com as definições, fornecidas na seção 1.2 do capítulo 1, a região de deslize para um sistema de Filippov é definida por $\Sigma_s = \{z \in \Sigma; \sigma(z) < 0\}$, onde

$$\sigma(z) = \langle \nabla f(z), F_{S_1} \rangle \langle \nabla f(z), F_{S_2} \rangle.$$

Para determinarmos a região de deslize, denotada por Σ_s , do modelo (3-1), vamos considerar $f(z) = f(x, y) = x - R_c$. Observe que, $\nabla f(z) = (1, 0)$ e $z = (R_c, y)$ pois $z \in \Sigma_s$, assim

$$\sigma(z) = \left(rR_c \left(1 - \frac{R_c}{K} \right) \right) \left(rR_c \left(1 - \frac{R_c}{K} \right) - \frac{bR_c y}{1 + bhR_c} \right).$$

Resolvendo a inequação $\sigma(z) < 0$, em y , obtemos

$$y > y_{c1} = \frac{r}{b} \left(1 - \frac{R_c}{K} \right) (1 + bhR_c),$$

portanto $\Sigma_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2; x = R_c, y > y_{c1}\}$.

Podemos obter uma equação diferencial para o comportamento dinâmico em Σ_s usando um método de controle equivalente ao introduzido por Utkin em [23]. Como $f = 0$ e $x = R_c$ em Σ_s , temos que

$$\frac{df}{dt} = \frac{dx}{dt} = rR_c \left(1 - \frac{R_c}{K} \right) - \varepsilon \frac{bR_c y}{1 + bhR_c} = 0,$$

em Σ_s . Resolvendo a equação acima, com respeito a ε , obtemos

$$\varepsilon = \frac{r \left(1 - \frac{R_c}{K} \right) (1 + bhR_c)}{by}. \quad (3-7)$$

Segue que, o comportamento dinâmico na região de deslize do modelo (3-1), Σ_s , pode ser determinado pela seguinte equação

$$\frac{dy}{dt} = rkR_c \left(1 - \frac{R_c}{K} \right) - \delta y = \phi(y), \quad (3-8)$$

obtida ao substituirmos o valor de ε dado em (3-7) na expressão de $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ dada em (3-1).

No modelo (3-1) podem existir diferentes tipos de pontos de equilíbrio, vamos analisar a existência de tais pontos de acordo com as definições dadas no Capítulo 1.

Se $b < \frac{\delta}{R_c(k - \delta h)}$, ou equivalentemente $R_c < x_1^*$, o ponto de equilíbrio E_1^* é um equilíbrio regular para o modelo, o qual será denotado por E_R^1 . Se $b > \frac{\delta}{R_c(k - \delta h)}$, ou equivalentemente $R_c > x_1^*$, o ponto E_1^* é um equilíbrio virtual, o qual denotaremos por E_v^1 .

Resolvendo a equação $\phi(y) = 0$, em y , obtemos

$$y_1 = \frac{rkR_c}{\delta} \left(1 - \frac{R_c}{K} \right),$$

logo, o modelo (3-1) possui um pseudo equilíbrio dado por $E_p = (R_c, y_1)$, desde que $y_1 > y_{c1}$.

O ponto de tangência E_T^1 satisfaz $x = R_c$ e $Xf(E_T^1) = X\nabla f(E_T^1) = 0$, onde X é o campo de vetores associado ao modelo (3-1), ou seja, E_T^1 satisfaz

$$rR_c \left(1 - \frac{R_c}{K} \right) - \frac{\varepsilon b R_c y}{1 + bhR_c} = 0,$$

resolvendo a equação acima em y obtemos

$$y = \frac{r \left(1 - \frac{R_c}{K}\right) (1 + bhR_c)}{\varepsilon b}. \quad (3-9)$$

Note que, como $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = 1$, a expressão (3-9) apenas tem sentido para $\varepsilon = 1$. Segue que, existe um ponto de tangência $E_T^1 = (R_c, y_{c1})$ para o subsistema F_{S_2} , dado em (3-3). Observe que,

$$\begin{aligned} F_{S_2}^2 f(E_T^1) &= \left(0, \frac{kbR_c y_{c1}}{1 + bhR_c} - \delta y_{c1}\right) \left(r - \frac{rR_c}{K} - \frac{by_{c1}}{(1 + bhR_c)^2}, \frac{-bR_c}{1 + bhR_c}\right) \\ &= \frac{-bR_c y_{c1}}{1 + bhR_c} \left(\frac{kbR_c}{1 + bhR_c} - \delta\right), \end{aligned}$$

substituindo o valor de y_{c1} , determinado na seção 3.1.1, e manipulando o resultado encontrado, obtemos que

$$F_{S_2}^2 f(E_T^1) = \frac{R_c r \delta}{1 + bhR_c} \left(1 - \frac{R_c}{K}\right) \left(1 - \frac{R_c}{x_1^*}\right).$$

Assim, E_T^1 é um ponto de tangência visível se $R_c < x_1^*$ e invisível se $R_c > x_1^*$.

O equilíbrio de fronteira do modelo (3-1) deve satisfazer as seguintes equações

$$rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\varepsilon bxy}{1 + bhx} = 0, \quad \frac{\varepsilon k bxy}{1 + bhx} - \delta y = 0, \quad (3-10)$$

com $x = R_c$. Quando $\varepsilon = 1$, $R_c = x_1^* = \frac{\delta}{b(k - \delta h)}$ e $y > 0$, a partir da primeira igualdade em (3-10), obtemos

$$rR_c \left(1 - \frac{R_c}{K}\right) - \frac{bR_c y}{1 + bhR_c} = 0 \Rightarrow y = \frac{r}{b} \left(1 - \frac{R_c}{K}\right) (1 + bhR_c),$$

substituindo este valor de y na segunda igualdade de (3-10) obtemos

$$\left(\frac{kbR_c}{1 + bhR_c} - \delta\right) \left(\frac{r}{b} \left(1 - \frac{R_c}{K}\right) (1 + bhR_c)\right) = 0,$$

pois $R_c = \frac{\delta}{b(k - \delta h)}$ implica em $\delta = \frac{kbR_c}{1 + bhR_c}$. Portanto, o equilíbrio de fronteira do modelo pode ser escrito como $E_B^1 = \left(R_c, \frac{r}{b} \left(1 - \frac{R_c}{K}\right) (1 + bhR_c)\right)$.

Lema 3.2 *O equilíbrio regular E_R^1 e o pseudo equilíbrio E_p do modelo (3-1) não coexistem. Além disso, se E_p existe então ele é estável na região de deslize Σ_s .*

Demonstração. Suponhamos que E_1^* é equilíbrio regular do modelo, isto é, $R_c < x_1^*$, logo

$$y_{c_1} - y_1 = \frac{r}{b} \left(1 - \frac{R_c}{K}\right) \left(1 - \frac{(R_c b(k - \delta h))}{\delta}\right) = \frac{r}{b} \left(1 - \frac{R_c}{K}\right) \left(1 - \frac{R_c}{x_1^*}\right) > 0,$$

já que $R_c < K$. Isto indica que $E_p = (R_c, y_1)$ não pertence a Σ_s , ou seja, o pseudo equilíbrio E_p não existe.

Por outro lado, se E_p é um pseudo equilíbrio do modelo (3-1) então $y_1 > y_{c_1}$, isto é, $kbR_c > \delta(1 + bhR_c)$. Assim

$$R_c - x_1^* = R_c - \frac{\delta}{b(k - \delta h)} = \frac{bkR_c - (b\delta hR_c + \delta)}{b(k - \delta h)} > 0,$$

de onde concluímos que $R_c > x_1^*$ e E_1^* é um equilíbrio virtual.

Portanto, o equilíbrio regular e o pseudo equilíbrio não coexistem.

Para provar que o pseudo equilíbrio E_p é estável em Σ_s , basta mostrarmos que $\phi'(y_1) < 0$. Mas, $\phi'(y) = -\delta < 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$, em particular $\phi'(y_1) < 0$. Segue que, se E_p existe então ele é um ponto estável em Σ_s . \square

3.1.2 Análise qualitativa global

Nesta subseção, apresentamos os resultados referentes ao comportamento qualitativo global do modelo de Gause (3-1).

Considere $x_1^* \leq \frac{Kbh - 1}{2bh}$ e $\Delta < 0$, neste caso temos que E_1^* é um foco instável e, pelo Lema 3.1, existe um único ciclo limite estável no subsistema F_{S_2} . Denotaremos tal ciclo limite por γ_2 , a coordenada mais à direita de γ_2 por $R_2 = (x_{R_2}, y_{R_2})$ e a coordenada mais à esquerda por $L_2 = (x_{L_2}, y_{L_2})$. Neste trabalho dizemos que γ é ciclo limite do modelo (3-1) se ele está completamente na região S_2 . Então, temos os seguintes resultados.

Teorema 3.3 *O modelo possui um ciclo limite globalmente assintoticamente estável γ se e somente se $0 \leq R_c < x_{L_2}$.*

Demonstração. Suponhamos que $0 \leq R_c < x_{L_2}$, então E_1^* torna-se um equilíbrio regular do modelo e o ponto de tangência E_T^1 de F_{S_2} é visível, isto indica que neste caso o pseudo equilíbrio não existe, consequentemente, $\frac{dy}{dt} = rkR_c \left(1 - \frac{R_c}{K}\right) - \delta y < 0 \quad \forall y \in \Sigma_s$. Além disso, o ciclo limite γ_2 do subsistema F_{S_2} está completamente à direita da linha de descontinuidade $x = R_c$, isto é, na região S_2 . Portanto, $\gamma = \gamma_2$ é um ciclo limite para o modelo (3-1).

Qualquer solução partindo do ponto de tangência E_T^1 não encontra a linha limite $x = R_c$ novamente, tal solução deve tender a γ_2 já que γ_2 é globalmente assintoticamente estável no subsistema F_{S_2} . Dada uma trajetória partindo da região S_2 temos que, se ela não atinge a região de desliz Σ_s então ela tende a γ_2 devido à estabilidade de γ_2 , caso contrário, a trajetória irá mover até E_T^1 ao longo do segmento de desliz, já que $dy/dt < 0$ em Σ_s , e então tender a γ_2 . Assim, qualquer trajetória iniciando na região S_2 convergirá ao ciclo γ_2 .

Qualquer solução iniciando na região S_1 do modelo alcançará a linha $x = R_c$ em um tempo finito. As soluções que encontrarem Σ_s irão mover-se para E_T^1 e assim tenderão a γ_2 . Além disso, as soluções que alcançam a linha $x = R_c$ abaixo do ponto de tangência entrarão na região S_2 e conseqüentemente tenderão a γ_2 . Portanto, todas as soluções do modelo convergem para γ_2 , ou seja, $\gamma = \gamma_2$ é globalmente assintoticamente estável, ver Figura 3.1.

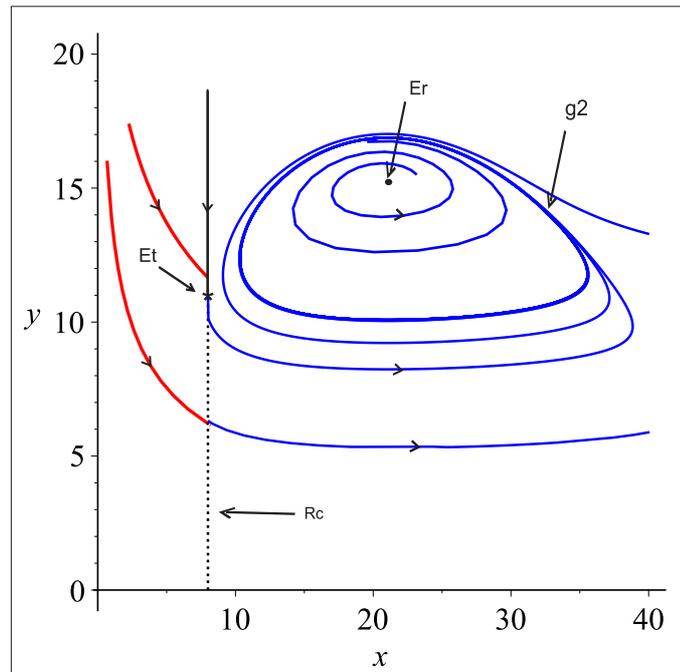


Figura 3.1: Retrato de fase do modelo (3-1), onde fixamos $b = 0.19$ e o parâmetro de bifurcação $R_c = 8$.

Reciprocamente, se γ é um ciclo limite para o modelo (3-1) então $0 \leq R_c < x_{L_2}$. De fato, se $R_c = x_{L_2}$, então γ é tangente a linha de descontinuidade $x = R_c$ e isto contradiz a definição de ciclo limite para o modelo. Se $R_c > x_{L_2}$, então somente uma parte do ciclo limite está na região S_2 e novamente isto contradiz a definição de γ . É claro que $R_c \geq 0$, pois R_c é a densidade crítica de presas. \square

Teorema 3.4 *O modelo de Gause possui*

- (1) um ciclo tangente globalmente assintoticamente estável se, e somente se, $x_{L_2} = R_c$,
- (2) um ciclo de canard globalmente assintoticamente estável se, e somente se, $x_{L_2} < R_c < x_1^*$.

Demonstração. (1) Se $x_{L_2} = R_c$, é claro que o ciclo limite γ_2 do subsistema F_{S_2} é tangente a Σ_s no ponto de tangência E_T^1 , assim γ_2 é um ciclo tangente para o modelo (3-1), ver Figura 3.2-(a). A prova da estabilidade de γ_2 é similar à prova no Teorema 3.3. Reciprocamente, é fácil ver que, se γ_2 é um ciclo tangente para o modelo então $x_{L_2} = R_c$.

(2) Se $x_{L_2} < R_c < x_1^*$, então E_1^* é um equilíbrio regular e o ponto de tangência E_T^1 do subsistema F_{S_2} é visível. Assim, o ciclo limite γ_2 não se encontra completamente na região S_2 e pelo Lema 3.2 o pseudo equilíbrio E_p não existe. Logo, para mostrar a existência do ciclo de canard, apenas precisamos provar que a solução do modelo (3-1) partindo do ponto de tangência E_T^1 chegará a um ponto $A_1 \in \Sigma_s$. Seja Γ_1 a trajetória partindo de E_T^1 , temos que Γ_1 chegará até a isóclina vertical que está à direita de E_T^1 devido à instabilidade de E_1^* . Isto indica que Γ_1 deve encontrar Σ_s em um ponto A_1 . Temos que $A_1 \neq E_T^1$, caso contrário teríamos uma inconsistência quanto a posição do ciclo limite de F_{S_2} . Além disso, $(F_{S_1}f(z))(F_{S_2}f(z)) < 0$ em $(E_T^1, A_1]$, já que $(E_T^1, A_1]$ é um segmento que pertence a Σ_s , e como E_1^* é um foco instável de F_{S_2} segue que Γ_1 é um arco do tipo focal. Como não existe pseudo equilíbrio em Σ_s , temos que $\{F_{S_1}, F_{S_2}\}$ é um conjunto linearmente independente em $[E_T^1, A_1]$. De acordo com a Definição 1.23 e o Lema 1.24, o modelo (3-1) tem um ciclo de canard $\Gamma = \Gamma_1 \cup \overline{E_T^1 A_1}$ ver Figura 3.2-(b).

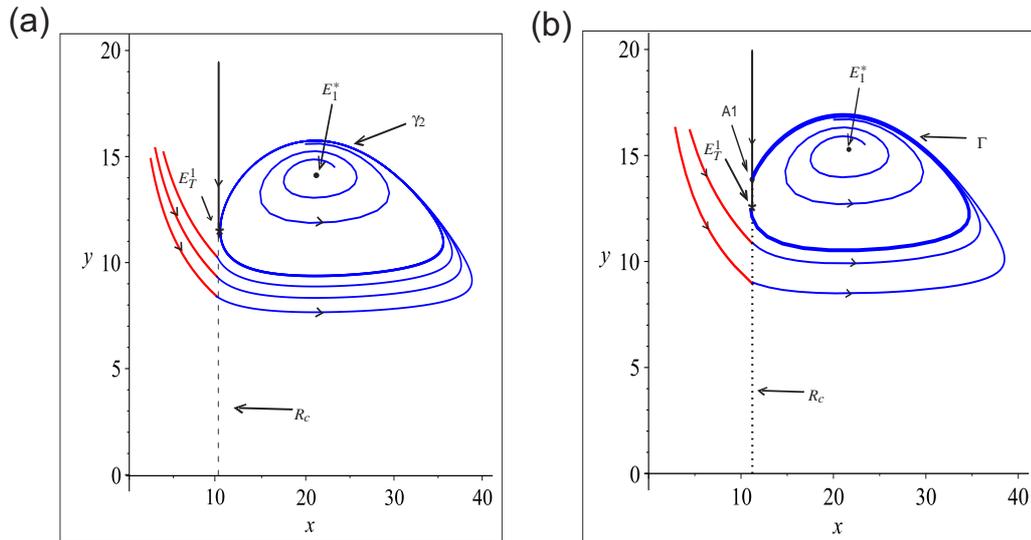


Figura 3.2: Retrato de fase para o modelo (3-1), onde fixamos $b = 0.19$ e escolhemos R_c como um parâmetro de bifurcação, em (a) $R_c = 10.3$ e em (b) $R_c = 11$.

Qualquer solução na região interior de Γ deve atingir o segmento $\overline{E_T^1 A_1}$, pois E_1^* é um foco instável de F_{S_2} . Além disso, qualquer solução exterior a Γ deve tender ao ciclo

de canard e a prova é similar àquela feita no Teorema 3.3. Consequentemente, existe um ciclo de canard globalmente assintoticamente estável no modelo (3-1).

Agora vamos mostrar que a existência de um ciclo de canard Γ , globalmente assintoticamente estável, no modelo implica que $x_{L_2} < R_c < x_1^*$. De fato, se tivéssemos $x_{L_2} \geq R_c$ poderíamos garantir a existência de um ciclo limite ou de um ciclo tangente no modelo, mas isto contraria o fato de que Γ é um ciclo de canard. Logo, temos que $x_{L_2} < R_c$. Por outro lado, se $R_c \geq x_1^*$, então E_1^* torna-se um equilíbrio virtual e segundo o Lema 3.2 o pseudo equilíbrio E_p existe e é estável com respeito Σ_s . Isto contradiz a estabilidade global do ciclo de canard, assim devemos ter $R_c < x_1^*$. \square

Teorema 3.5 *O pseudo equilíbrio E_p , do modelo (3-1), é globalmente assintoticamente estável se e somente se $x_1^* \leq R_c < K$.*

Demonstração. Temos que $R_c < K$, pois K é a capacidade de suporte para as presas, ou seja, K é a quantidade máxima de presas. Se o pseudo equilíbrio do modelo (3-1) é globalmente assintoticamente estável então E_p existe e, pelo Lema (3.2), $E_1^* = E_v^1$ é um ponto de equilíbrio virtual para o modelo e isto implica que $x_1^* \leq R_c$. De onde obtemos $x_1^* \leq R_c < K$.

Reciprocamente, se $x_1^* \leq R_c < K$, então E_1^* torna-se um equilíbrio virtual e o ponto de tangência E_T^1 de F_{S_2} é invisível. Pelo Lema 3.2, o pseudo equilíbrio E_p existe e é estável com respeito a Σ_s , ver Figura 3.3-(b). Portanto, precisamos apenas mostrar que qualquer solução iniciando na linha $x = R_c$ com $y < y_{c_1}$ atinge região de desliz Σ_s . Mas, qualquer solução partindo da linha $x = R_c$ com $y < y_{c_1}$ entra na região S_2 , então se olharmos essa solução como uma trajetória de F_{S_2} ela tende ao ciclo limite de F_{S_2} , ou seja a solução atinge a linha $x = R_c$ em Σ_s , consequentemente tal solução tende ao pseudo equilíbrio E_p . Portanto, o pseudo equilíbrio E_p do modelo é globalmente assintoticamente estável. \square

Considerando $x_1^* > \frac{Kbh-1}{2bh}$ e $\Delta < 0$ sabemos que E_1^* é um foco estável no subsistema F_{S_2} . Neste caso, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.6 *Se $0 \leq R_c < x_1^*$, então o ponto de equilíbrio regular E_1^* é globalmente assintoticamente estável. Além disso, temos que $x_1^* \leq R_c < K$ se, e somente se, o pseudo equilíbrio E_p é globalmente assintoticamente estável.*

Demonstração. A primeira afirmação do teorema pode ser demonstrada de forma similar à prova do Teorema 3.3 e a demonstração da segunda afirmação é similar à prova do Teorema 3.5. \square

3.2 Análise da bifurcação e simulações numéricas

Nesta seção fixamos os parâmetros conforme a Tabela 3.1 para analisar a bifurcação e apresentar uma investigação numérica para o modelo (3-1).

Tabela 3.1: Valores dos parâmetros para análise numérica.

Definições	Unidades	Valores
Taxa de crescimento intrínseco das presas r	por dia	1
Capacidade de suporte para presas K	por unidade de área	50
Taxa de busca do predador b	por dia	0 – 0.7
Tempo de manipulação h	por presa	1
Taxa de Conversão k	-	0.45
Taxa de morte do predador δ	por dia	0.36
Limite crítico de presas R_c	por unidade de área	0 – 50

Observamos que uma típica bifurcação tangente pode ocorrer uma vez que o ciclo limite γ_2 pode ser tangente a região de deslize Σ_s no ponto de tangência E_T^1 quando $R_c = x_{L_2}$. Por exemplo, quando R_c atinge o valor crítico $R_c = 10.3$ o ciclo limite γ_2 torna-se um ciclo tangente para o modelo (3-1), o qual é tangente à linha de descontinuidade $x = R_c$ no ponto de tangência visível E_T^1 , como mostra a Figura 3.2-(a). Neste caso, o ciclo limite tangente é atrator com uma órbita de entrada estável deslizante.

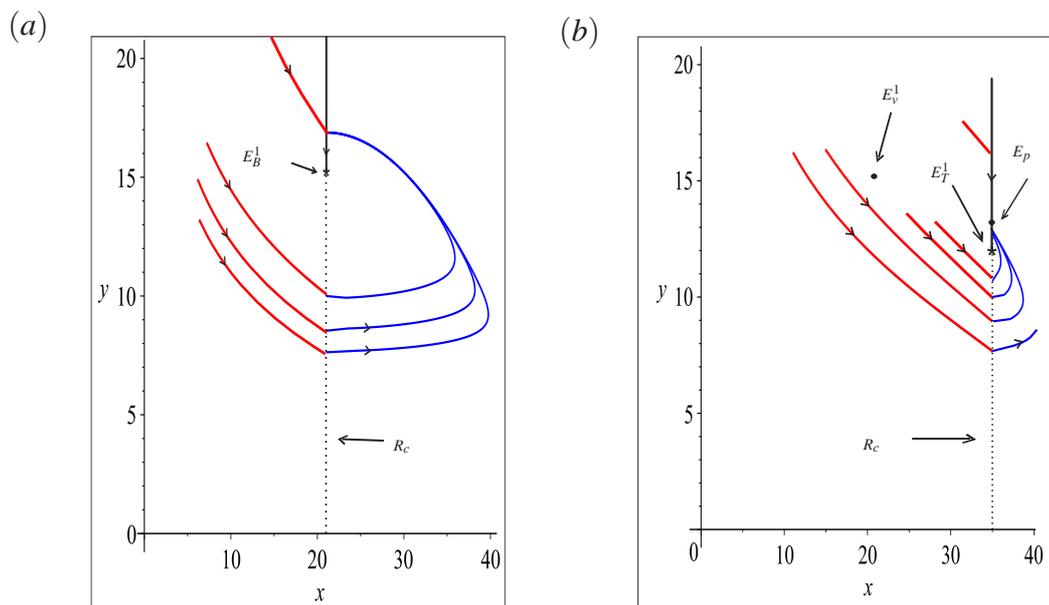


Figura 3.3: Retrato de fase para o modelo (3-1), com (a) $R_c = 21$;
(b) $R_c = 35$.

Quando $R_c < x_{L_2}$ temos que γ_2 é um ciclo limite estável para o modelo e coexiste com o ponto de tangência visível E_T^1 , como mostra a Figura 3.1 com $R_c = 8$. Para

$x_{L_2} < R_c < \frac{\delta}{b(k-\delta h)}$ o ciclo tangente estável torna-se um ciclo de canard, ver Figura 3.2-(b).

Uma bifurcação foco de fronteira pode ocorrer no modelo (3-1) quando os equilíbrios E_1^* , E_T^1 e E_B^1 colidem simultaneamente. Escolhendo o parâmetro de bifurcação $R_c = 21$ e $b = 0.19$ o ciclo de canard estável encolhe e neste caso o equilíbrio regular E_1^* , o equilíbrio de fronteira E_B^1 e o ponto de tangência E_T^1 coexistem, ver Figura 3.3-(a), onde R_c é obtido por $R_c = \frac{\delta}{b(k-\delta h)}$ e o equilíbrio de fronteira é um ponto atrator com uma órbita de entrada estável deslizante. Quando R_c satisfaz $x_{L_2} < R_c < \frac{\delta}{b(k-\delta h)}$, o ciclo de canard Γ passa pelo ponto de tangência visível e envolve o foco instável E_1^* como mostra a Figura 3.2-(a). Para $R_c > \frac{\delta}{b(k-\delta h)}$, o ponto de equilíbrio de fronteira E_B^1 é substituído por um pseudo equilíbrio estável E_p e um ponto de tangência invisível E_T^1 , ver Figura 3.3-(b).

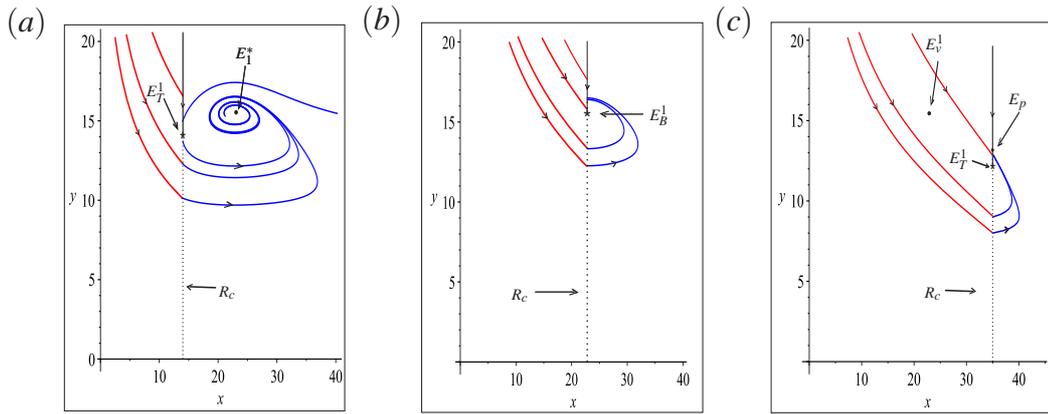


Figura 3.4: Retrato de fase para o modelo (3-1), onde $b = 0.175$ e
(a) $R_c = 14$; (b) $R_c = 22.8$; (c) $R_c = 35$.

Quando E_1^* é um foco estável e $R_c = 22.8$ pode ocorrer outra bifurcação foco de fronteira no modelo (3-1), onde R_c é obtido por $R_c = \frac{\delta}{b(k-\delta h)}$. Neste caso, temos que o equilíbrio de fronteira E_B^1 é estável com uma órbita de entrada estável deslizante como mostra a Figura 3.4-(b). O foco estável E_1^* e o ponto de tangência visível E_T^1 coexistem quando $0 < R_c < \frac{\delta}{b(k-\delta h)}$, ver Figura 3.4-(a), e para $R_c > \frac{\delta}{b(k-\delta h)}$ existe um único pseudo equilíbrio estável E_p , um ponto de tangência invisível E_T^1 e o ponto de equilíbrio E_1^* torna-se um equilíbrio virtual com mostra a Figura 3.4-(c).

No caso em que E_1^* é um nó estável empregamos um método numérico para investigar o comportamento qualitativo do modelo (3-1). Para isso, fixamos os valores dos parâmetros de acordo com a tabela 3.1 e tomamos R_c como um parâmetro de bifurcação, então o comportamento dinâmico do modelo (3-1) pode ser apresentado pela Figura 3.5.

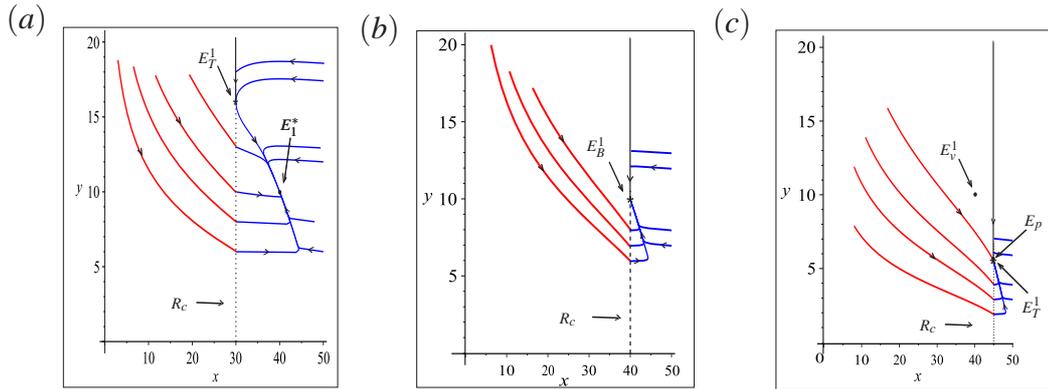


Figura 3.5: Retrato de fase para o modelo (3-1), onde $b = 0.1$ e o parâmetro de bifurcação em (a) $R_c = 30$; em (b) $R_c = 40$ e em (c) $R_c = 45$.

Quando $R_c = 30$ a trajetória que alcança a região de desliz Σ_s move até o ponto de tangência visível E_T^1 e então tende ao ponto de equilíbrio E_1^* ao longo das assíntotas, enquanto as trajetórias que não encontram Σ_s também tende ao nó estável, ver Figura 3.5-(a). Portanto, o ponto de equilíbrio E_1^* é um nó globalmente assintoticamente estável. Para $R_c = 40$ o modelo (3-1) possui um ponto de equilíbrio na fronteira, E_B^1 , globalmente assintoticamente estável como mostra a Figura 3.5-(b). Quando R_c cresce o nó estável E_1^* torna-se um equilíbrio virtual e existe um pseudo equilíbrio, globalmente assintoticamente estável, E_p próximo ao ponto de tangência invisível E_T^1 , ver Figura 3.5-(c) na qual $R_c = 45$.

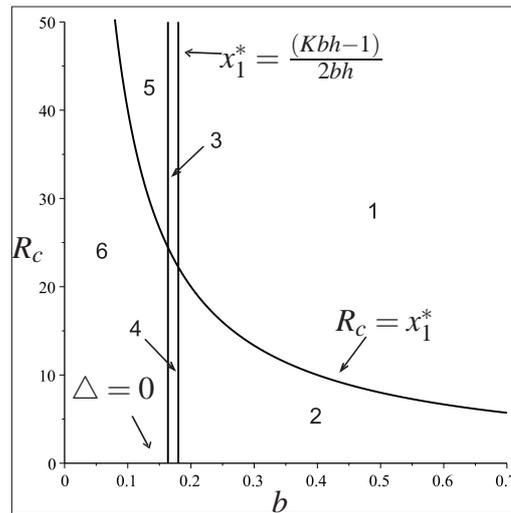


Figura 3.6: O diagrama de bifurcação para o modelo (3-1) com respeito a taxa de busca de presas b e o limite populacional crítico de presas R_c .

Na Figura 3.6 apresentamos um diagrama de bifurcação para o modelo (3-1), onde $x_1^* = \frac{Kbh-1}{2bh}$ quando $b = 0.18$ e $\Delta = 0$ quando $b \approx 0.1636$. Nas regiões 1, 3 e 6 existe um pseudo equilíbrio estável E_p , na região 2 existem um ciclo limite estável, um

ciclo tangente e um ciclo de canard, na região 4 existe um foco estável e na região 5 existe um nó estável. Assim o comportamento dinâmico do sistema é claramente mostrado nas diferentes regiões do diagrama, que corresponde com nossos principais resultados.

Observamos que o ponto de equilíbrio E_1^* é um nó instável quando $b < 0$, mas este caso não está incluso nas nossas análises, pois sendo b a taxa de busca das presas pelo predador temos que $b > 0$.

Note que, o limite populacional crítico de presas R_c desempenha um papel fundamental na determinação dos resultados analíticos. Entretanto, a taxa de busca de presas, denotado por b , que poderia determinar o tamanho da população de predadores é crítico para o predador. Por isso, com objetivo de explorar o comportamento dinâmico do sistema do modelo (3-1), escolhemos b e R_c como parâmetros de bifurcação e fixamos os outros parâmetros conforme a Tabela 3.1. Resultados similares poderiam ser obtidos se escolhêssemos outros pares de parâmetros como parâmetro de bifurcação.

Modelo predador-presa com estratégia de colheita com limiar contínuo

Neste capítulo consideramos um modelo predador-presa com estratégia de colheita de limiar contínuo, onde essas estratégias ocorrem quando a densidade de predadores está acima de um certo limite T . Um modelo com essa política é descrito por

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \left(rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\beta xy}{\alpha + x}, \frac{\beta_1 xy}{\alpha + x} - \delta y - H(y) \right), \quad (4-1)$$

onde $H(y) = 0$ se $y \leq T$ e $H(y) = \frac{h(y-T)}{c+y-T}$ se $y > T$.

No que segue, vamos analisar o comportamento qualitativo do modelo (4-1) empregando métodos teóricos e numéricos.

Quanto ao comportamento geral das soluções temos o seguinte resultado.

Teorema 4.1 *Todas as soluções do modelo (4-1) são uniformemente limitadas.*

Demonstração. Como $T > 0$, o eixo x e o eixo y são ambos invariantes.

Considere $M(t) = x + \beta y / \beta_1$. Calculando a derivada $dM(t)/dt$ com relação a (4-1), obtemos

$$\frac{dM(t)}{dt} = rx - \frac{rx^2}{K} - \frac{\beta \delta y}{\beta_1} - \frac{\beta H(y)}{\beta_1},$$

de onde segue que

$$\frac{dM(t)}{dt} + \delta M(t) = (r + \delta)x - \frac{rx^2}{K} - \frac{\beta H(y)}{\beta_1}.$$

Como $0 \leq H(y) \leq h$ para $y > 0$, temos que $\left(\frac{rx^2}{K} + \frac{\beta H(y)}{\beta_1} \right) > 0$ existe $L > 0$ tal que

$$\frac{dM}{dt} + \delta M = (r + \delta)x - \left(\frac{rx^2}{K} + \frac{\beta H(y)}{\beta_1} \right) \leq (r + \delta)x \leq (r + \delta)K = L.$$

Observe que, o lado direito da inequação acima é limitado para todo $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$. Usando a inequação diferencial $\dot{M} + \delta M \leq L$, obtemos

$$M(x, y) < \frac{L}{\delta} + \left(M(0) - \frac{L}{\delta} \right) e^{-\delta t} = \frac{L}{\delta} (1 - e^{-\delta t}) + M(x(0), y(0)) e^{-\delta t},$$

logo, quando $t \rightarrow \infty$, temos que $0 < M < \frac{L}{\delta}$. Ou seja, as soluções permanecem na região $B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2; 0 \leq x + \frac{\beta y}{\beta_1} \leq \frac{L}{\delta} \right\}$. Isto significa, pela definição de $M(t)$, que existe uma constante $M_1 > 0$ tal que $x(t) \leq M_1$ e $y(t) \leq M_1$ para t grande o suficiente.

Portanto todas as soluções do modelo são uniformemente limitadas como queríamos demonstrar. \square

4.1 Existência de pontos de equilíbrio

Nesta seção vamos investigar a existência de equilíbrios para o modelo (4-1) e analisar a estabilidade destes pontos. Observe que, na ausência de colheita, isto é $H = 0$ e $y \leq T$ o comportamento do modelo é descrito pelo subsistema

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \left(rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\beta xy}{\alpha + x}, \frac{\beta_1 xy}{\alpha + x} - \delta y \right) \quad (4-2)$$

e com colheita, ou seja $H \neq 0$ e $y > T$, o comportamento do modelo é descrito por

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \left(rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\beta xy}{\alpha + x}, \frac{\beta_1 xy}{\alpha + x} - \delta y - \frac{h(y - T)}{c + y - T} \right). \quad (4-3)$$

Como $T > 0$ temos que $\bar{y} = 0 < T$, assim o equilíbrio extinção $E_0 = (0, 0)$ e o ponto de equilíbrio $E^0 = (K, 0)$ existem para quaisquer valores dos parâmetros. Além disso, se o modelo (4-1) possui um ponto de equilíbrio interior $E^* = (x^*, y^*)$, então tal equilíbrio deve satisfazer as seguintes equações

$$y = \frac{r}{\beta} \left(1 - \frac{x}{K} \right) (\alpha + x), \quad x = \frac{\alpha(H(y) + \delta y)}{(\beta_1 - \delta)y - H(y)}. \quad (4-4)$$

Sabemos, pela primeira equação de (4-4), que $y > 0$ implica em $\left(1 - \frac{x}{K} \right) > 0$ e, conseqüentemente, obtemos $x < K$. Assim, o equilíbrio interior E^* existe somente quando $x^* < K$. Para $H(y) = 0$ e $y \leq T$ a segunda equação de (4-4) implica que $x^* = \frac{\delta \alpha}{\beta_1 - \delta}$,

substituindo esse valor de x^* na primeira equação de (4-4) obtemos

$$y^* = \frac{r\beta_1\alpha(K\beta_1 - \delta(K + \alpha))}{\beta K(\beta_1 - \delta)^2} = T_0. \quad (4-5)$$

Neste caso, o subsistema (4-2) possui um único equilíbrio interior que denotamos por $E_1 = (x_1, y_1) = \left(\frac{\delta\alpha}{\beta_1 - \delta}, T_0\right)$. Segue que, para $y \leq T$ o modelo (4-1) possui um único equilíbrio interior, denotado por E_1 . Observe que E_1 pode ser um equilíbrio real se $0 < T_0 \leq T$ ou virtual se $0 < T < T_0$.

Quando $H(y) \neq 0$, o equilíbrio interior E^* existe se suas coordenadas satisfazem as equações

$$y = \frac{r}{\beta} \left(1 - \frac{x}{K}\right) (\alpha + x), \quad \frac{\beta_1 x}{\alpha + x} - \delta = \frac{h(y - T)}{y(c + y - T)}. \quad (4-6)$$

Para o caso $y > T$, se o equilíbrio interior existe, devemos ter $y^* > T$ e assim pela segunda equação de (4-6) temos que $\frac{\beta_1 x^*}{\alpha + x^*} - \delta > 0$ de onde obtemos $x^* > \frac{\alpha\delta}{\beta_1 - \delta}$. Além disso, substituindo a primeira equação de (4-6) na segunda obtemos que x^* é raiz da equação

$$\begin{aligned} P(x) = & \frac{\beta_1 - \delta}{\beta^2 K^2} x^4 - \frac{2K(\beta_1 - \delta) - \alpha(\beta_1 - 2\delta)}{\beta^2 K^2} x^3 \\ & + \left(\frac{\beta_1 - \delta}{\beta^2} + \frac{2K\alpha(2\delta - \beta_1) - \alpha^2\delta}{\beta^2 K^2} + \frac{(c - T)(\beta_1 - \delta) - h}{r\beta K} \right) x^2 \\ & + \left(\frac{(\beta_1 - 2\delta)K\alpha + 2\alpha^2\delta}{\beta^2 K} + \frac{h(\alpha - K) + (c - T)[K(\beta_1 - \delta) + \delta\alpha]}{\beta r K} \right) x \\ & + \frac{hT}{r^2} - \frac{\alpha(h + \delta c - \delta T)}{r\beta} - \frac{\delta\alpha^2}{\beta^2} = 0, \end{aligned} \quad (4-7)$$

onde $\frac{\beta_1 - \delta}{\beta^2 K^2} > 0$, já que assumimos $\beta_1 > \delta$. Em resumo, se o subsistema (4-3) possui um ponto de equilíbrio interior $E^* = (x^*, y^*)$ então $y^* > T$, $\alpha\delta/(\beta_1 - \delta) < x^* < K$ e x^* é raiz do polinômio $P(x)$ de grau quatro definido acima. Portanto, para $y > T$ o modelo (4-1) possui no máximo quatro pontos de equilíbrio interior.

A fim de determinar condições para a existência dos equilíbrios E^* e precisar quantos podem existir, vamos analisar a existência das raízes de um polinômio qualquer $Q(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ com $a_4 \neq 0$. Sabemos que $Q(x)$ pode possuir

1. quatro raízes simples, se existirem p_1, p_2 tais que $Q(p_i) = 0$ e $Q'(p_i) < 0$, $i = 1, 2$, como mostra a Figura 4.1-(a).
2. uma raiz dupla e duas simples, se existirem p_1, p_2 tais que $Q(p_1) = Q(p_2) = 0$, $Q'(p_1) = 0$ e $Q'(p_2) < 0$, ver Figura 4.1-(b).

3. duas raízes duplas, se existirem p_1, p_2 tais que $Q(p_1) = Q(p_2) = 0$ e $Q'(p_1) = Q'(p_2) = 0$, ver Figura 4.1-(c).
4. uma raiz simples e uma tripla, se existir um único $p \in \mathbb{R}$ tal que $Q(p) = 0$, $Q'(p) < 0$ e $Q''(p) = 0$, ver Figura 4.1-(d).
5. uma raiz quarta, se existir um único $p \in \mathbb{R}$ tal que $Q(p) = Q'(p) = 0$, como mostra a Figura 4.1-(e).
6. nenhuma raiz, se $Q(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, como mostra a Figura 4.1-(f).

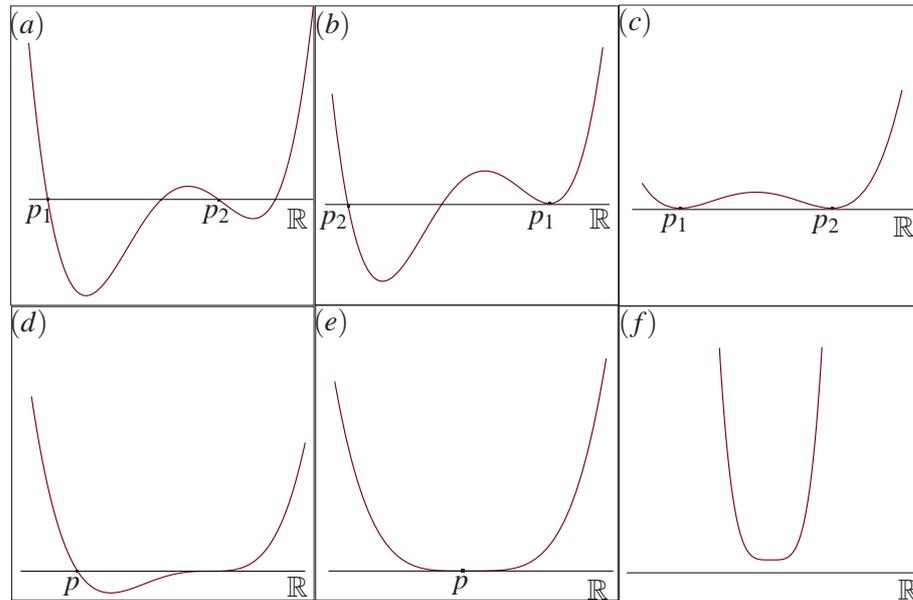


Figura 4.1: Raízes de um polinômio de grau quatro.

Voltando aos pontos de equilíbrio interior E^* do modelo (4-1), observe que, de acordo com a Definição (1.4), esses pontos são pontos de interseção das isóclinas particulares do modelo e pela discussão anterior isso ocorre segundo as raízes do polinômio $P(x)$. Segue que, podemos fazer uma análise similar àquela feita para $Q(x)$, agora usando as inclinações das isóclinas particulares nos pontos E^* . Sejam

$$f_1(x, y) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\beta xy}{\alpha + x} \quad \text{e} \quad f_2(x, y) = \frac{\beta_1 xy}{\alpha + x} - \delta y - H(y), \quad (4-8)$$

pela fórmula de derivação implícita temos que as inclinações das isóclinas particulares $f_1(x, y) = 0$ e $f_2(x, y) = 0$ são dadas por $-\frac{f_{1x}}{f_{1y}}$ e $-\frac{f_{2x}}{f_{2y}}$, respectivamente.

Considerando o caso em que $0 < T < T_0$, temos que o modelo não possui ponto de equilíbrio para $y^* \leq T$. Quando $y^* > T$, note que

$$P \left(\frac{\delta \alpha}{\beta_1 - \delta} \right) = \frac{-h(y^* - T)}{y^*(c + y^* - T)} < 0,$$

assim, a equação $P(x) = 0$ possui no máximo três raízes reais para $x \in \left(\frac{\delta\alpha}{\beta_1 - \delta}, K\right)$. Isto significa que o modelo (4-1) possui no máximo três equilíbrios interior. Denotamos os três equilíbrios por $E_1^* = (x_1^*, y_1^*)$, $E_2^* = (x_2^*, y_2^*)$ e $E_3^* = (x_3^*, y_3^*)$ e supomos $x_1^* > x_2^* > x_3^*$. Assim, se existe um equilíbrio E^* tal que

$$-\frac{f_{1x}}{f_{1y}}\Big|_{E^*} = -\frac{f_{2x}}{f_{2y}}\Big|_{E^*}, \quad (4-9)$$

então E^* é uma raiz de multiplicidade dois para $P(x)$, logo só podem existir dois equilíbrios, E_1^* e E_2^* ou E_3^* e E_2^* . Se existe um equilíbrio tal que

$$-\frac{f_{1x}}{f_{1y}}\Big|_{E^*} < -\frac{f_{2x}}{f_{2y}}\Big|_{E^*}, \quad (4-10)$$

então E^* é uma raiz simples de $P(x)$, e deve existir mais dois equilíbrios além de E^* , logo existem três equilíbrios, E_1^* , E_2^* e E_3^* . Sobre outras condições, existe somente um equilíbrio.

Pelas discussões anteriores temos que se $0 < T_0 \leq T$, o modelo possui um ponto de equilíbrio interior que denotamos por $E_1 = (x_1, y_1)$ para $y \leq T$, o que implica $H(y_1) = 0$. Para $y > T$, observe que

$$P(x_1) = P\left(\frac{\delta\alpha}{\beta_1 - \delta}\right) = \frac{-h(y^* - T)}{y_1(c + y_1 - T)} = \frac{H(y_1)}{y_1} = 0,$$

assim não temos nenhuma informação para limitar a quantidade de raízes de $P(x)$ no intervalo $(\delta\alpha/(\beta_1 - \delta), K)$. Analisando as inclinações das isóclinas particulares temos os seguintes casos.

1. Se a equação (4-9) for válida para todo equilíbrio interior E^* com $y^* > T$, então E^* será único e denotaremos por E_1^* .
2. Se existe um único ponto de equilíbrio E_1^* tal que a equação (4-10) é verdadeira e a equação (4-9) não é válida para ponto algum, então o modelo possui apenas dois equilíbrios interior denotados por E_1^* e E_2^* .
3. Se existem dois pontos E_1^* e E_2^* tais que (4-9) e (4-10), respectivamente, então o modelo possui três equilíbrios interior denotados por E_1^* , E_2^* e E_3^* .
4. Se existem dois pontos E_1^* e E_2^* tais que a equação (4-10) é válida, então o modelo possui quatro pontos de equilíbrios denotados por E_i^* com $i = 1, 2, 3$ e 4 .
5. Sobre outras condições, o modelo não possui equilíbrio interior.

No que segue, vamos analisar o comportamento qualitativo do modelo considerando os casos $0 < T < T_0$ e $0 < T_0 \leq T$, conforme descrevemos acima.

4.1.1 Análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio

Para analisarmos a estabilidade dos pontos de equilíbrio primeiro consideramos o caso em que $0 < T < T_0$. Assim, para $y \leq T$, o modelo (4-1) não possui equilíbrios interior, e para $y > T$ o modelo possui no máximo três equilíbrios interior.

A estabilidade dos equilíbrios é determinada pela matriz Jacobiana

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ f_{2x} & f_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx}{K} - \frac{\beta\alpha y}{(\alpha+x)^2} & -\frac{\beta x}{\alpha+x} \\ \frac{\beta_1\alpha y}{(\alpha+x)^2} & \frac{\beta_1 x}{\alpha+x} - \frac{dH(y)}{dy} - \delta \end{pmatrix}.$$

Calculando a matriz Jacobiana no ponto de equilíbrio $E_0 = (0, 0)$ e determinando os autovalores de $J(0, 0)$, obtemos $\lambda_1 = r$ e $\lambda_2 = -\delta$. Conseqüentemente, E_0 é um ponto de sela com variedade instável na direção x e variedade estável na direção y . Para o equilíbrio $E^0 = (K, 0)$ temos que

$$J(K, 0) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rK}{K} & -\frac{\beta K}{\alpha+K} \\ 0 & \frac{\beta_1 K}{\alpha+K} - \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & -\frac{\beta K}{\alpha+K} \\ 0 & \frac{\beta_1 K}{\alpha+K} - \delta \end{pmatrix},$$

e determinando os autovalores de $J(K, 0)$ obtemos $\lambda_1 = -r$ e $\lambda_2 = \frac{\beta_1 K}{\alpha+K} - \delta$. Observe que $\lambda_1 < 0$ e

$$\lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{\beta_1 K}{\alpha+K} < \delta \Leftrightarrow K < \frac{\alpha\delta}{\beta_1 - \delta}.$$

Segue que E^0 é nó estável se $K < \frac{\alpha\delta}{\beta_1 - \delta}$ e um ponto de sela se $K > \frac{\alpha\delta}{\beta_1 - \delta}$. Quando E^0 é um ponto de sela temos que o eixo x é a variedade estável e a reta

$y = -\frac{\beta_1 K + (r - \delta)(\alpha + K)}{\beta K}(x - K)$ é a variedade instável. Conseqüentemente, se E^0 for um ponto estável globalmente, então o ponto de equilíbrio interior E^* não existe pois tal

ponto existe se $K > \frac{\alpha\delta}{\beta_1 - \delta}$. Neste caso, é impossível existir um ciclo limite no modelo (4-1). Se o equilíbrio interno existe então o ponto E^0 é sempre um ponto de sela.

Para um ponto de equilíbrio interior $E^* = (x^*, y^*)$ com $y^* > T$, a matriz Jacobiana torna-se

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} a_{11} & -\frac{\beta x^*}{\alpha+x^*} \\ \frac{\beta_1\alpha y^*}{(\alpha+x^*)^2} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (4-11)$$

onde

$$a_{11} = r - \frac{2rx^*}{K} - \frac{\beta\alpha y^*}{\alpha + x^*}, \quad a_{22} = \frac{\beta_1 x^*}{\alpha + x^*} - \frac{hc}{(c + y^* - T)^2} - \delta.$$

O determinante e o traço de $J(E^*) = J(x^*, y^*)$ são, respectivamente,

$$D = a_{11}a_{22} + \frac{\beta\beta_1\alpha x^* y^*}{(\alpha + x^*)^3}, \quad Tr = a_{11} + a_{22}.$$

Segue que,

- se $D < 0$, então um dos autovalores de $J(E^*)$ têm parte real positiva e o outro tem parte real negativa. Assim, E^* é um ponto de sela.
- se $D > 0$ e $Tr > 0$, então todos os autovalores de $J(E^*)$ tem parte real positiva. De modo que E^* é um nó instável.
- se $D > 0$ e $Tr < 0$, então todos os autovalores de $J(E^*)$ tem parte real negativa, assim E^* é um estável. Além disso, se $Tr^2 - 4D \geq 0$ então o ponto de equilíbrio E^* é um nó estável e se $Tr^2 - 4D < 0$ então E^* é um foco estável.
- se $D = 0$ e $Tr = 0$, então o ponto de equilíbrio E^* é degenerado.

Para o caso $0 < T_0 < T$, a estabilidade dos equilíbrios quando $y > T$ é a mesma discutida acima. A análise da estabilidade dos pontos E_0 e E^0 também é completamente a mesma e omitiremos os detalhes. Para este caso sabemos que existe um ponto de equilíbrio quando $y \leq T$, a saber $E_1 = (x_1, T_0) = (\delta\alpha/(\beta_1 - \delta), T_0)$. De acordo com a teoria de um clássico modelo predador-presa

$$(\dot{x}, \dot{y}) = \left(rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\beta xy}{\alpha + x}, \frac{\beta_1 xy}{\alpha + x} - \delta y \right), \quad (4-12)$$

temos os seguintes resultados para a estabilidade de E_1 .

1. Se $K < 2x_1 + \alpha$, então E_1 é um ponto de equilíbrio estável.
2. Se $K < 2x_1 + \alpha$, então E_1 é instável e o modelo possui pelo menos um ciclo limite.
3. Se $K = 2x_1 + \alpha$, o modelo sofre uma bifurcação de Hopf.

Uma análise detalhada pode ser encontrada em [6].

4.2 Análise da bifurcação

Na Seção 4.1 vimos que quando $\text{Det}(J(E^*)) = D = 0$ e $\text{Tr}(J(E^*)) = Tr = 0$ o ponto E^* é degenerado, onde $E^* = (x^*, y^*)$, com $y^* > T$, é um ponto de equilíbrio interior para o modelo (4-1). Neste caso, pelos resultados apresentados na seção 1.1 do Capítulo

1, o comportamento dinâmico do modelo pode apresentar alguns tipos de bifurcações, por exemplo a bifurcação de Hopf, bifurcação sela-nó e bifurcação de Bogdanov-Takens. Nesta seção vamos analisar que tipo de bifurcação pode ocorrer quando os parâmetros originais do modelo variam.

Baseado na discussão feita na Subseção 4.1.1, temos os seguintes resultados para o modelo (4-1) quando $0 < T < T_0$.

Teorema 4.2 *Se o determinante da matriz Jacobiana em E^* é negativo ou se o determinante e o traço são positivos, então o modelo possui um ciclo limite.*

Demonstração. Se o determinante da matriz Jacobiana é negativo, isto é, $D < 0$ então qualquer equilíbrio interior E^* é um ponto de sela, além disso, temos que os pontos de equilíbrio E^0 e E_0 são pontos de sela e pelo Teorema 4.1 as soluções do modelo são limitadas. Segue, pelo Teorema 1.6, que o modelo deve possuir um ciclo limite.

Suponhamos que o determinante e o traço da matriz Jacobiana são positivos, ou seja $D > 0$ e $Tr > 0$. Neste caso, qualquer equilíbrio interior E^* é um nó instável e os pontos de equilíbrio E^0 e E_0 são pontos de sela. Além disso, pelo Teorema 4.1 sabemos que toda solução do modelo (4-1) é limitada. Portanto o Teorema 1.6 garante a existência de um ciclo limite para o modelo. □

Teorema 4.3 *Se $K = \frac{\delta\alpha}{\beta_1 - \delta}$, então o modelo apresenta uma bifurcação transcritical.*

Demonstração. Considere K como o parâmetro de bifurcação. Para $K > \frac{\delta\alpha}{\beta_1 - \delta}$ vemos que o ponto E^0 é um ponto de sela. Além disso, se $D > 0$, $Tr < 0$ e $Tr^2 - 4D \geq 0$ então o ponto de equilíbrio E^* é um nó estável. Observe que, quando $K = \frac{\delta\alpha}{\beta_1 - \delta}$ temos que $y^* = T_0 = 0$ e $x^* = K$, assim o ponto E^* colide com E^0 . Finalmente, se $K < \frac{\delta\alpha}{\beta_1 - \delta}$ então o ponto de equilíbrio E^0 é um nó estável e o ponto E^* não existe. Consequentemente, E^0 é um ponto sela-nó e o modelo apresenta uma bifurcação transcritical. □

Existem valores dos parâmetros de modo que o ponto de equilíbrio interior E^* do modelo (4-1) satisfaz $Tr(J(E^*)) = 0$, com $J(E^*)$ dada em (4-11). Os autovalores da matriz Jacobiana $J(E^*)$ são dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{Tr \pm \sqrt{Tr^2 - 4D}}{2},$$

assim, se $Tr = 0$ e $D > 0$ então a matriz Jacobiana $J(E^*)$ tem um par de autovalores imaginários puros e E^* é um equilíbrio do tipo centro. Em resumo, existem valores dos parâmetros tais que $E^* = (x^*, y^*)$ é um centro.

Vamos determinar condições sobre as quais o equilíbrio interior E^* é um centro e o modelo (4-1) sofre uma bifurcação de Hopf. Primeiro mudamos o ponto de equilíbrio E^* para a origem a partir de uma mudança de coordenadas, $u = x - x^*$ e $v = y - y^*$, obtendo o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = r(u+x^*) \left(1 - \frac{u+x^*}{K}\right) - \frac{\beta(u+x^*)(v+y^*)}{\alpha+u+x^*} = f(u,v), \\ \dot{v} = \frac{\beta_1(u+x^*)(v+y^*)}{\alpha+u+x^*} - \delta(v+y^*) - H(v+y^*) = g(u,v). \end{cases} \quad (4-13)$$

Agora, obtemos a expansão em série de potência das funções $f(u, v)$ e $g(u, v)$ em torno do ponto $(0, 0)$. Observe que, para uma função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a série de potência em torno do ponto $(0, 0)$ é dada por

$$\begin{aligned} f(u, v) = & f(0, 0) + df(0, 0)(u, v) + \frac{1}{2!}d^2f(0, 0)(u, v)^2 + \frac{1}{3!}d^3f(0, 0)(u, v)^3 + \dots \\ & + \frac{1}{p!}d^p f(0, 0)(u, v)^p + r(|(u, v)|^{p+1}). \end{aligned}$$

Como $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$, pois $(0, 0)$ é ponto de equilíbrio para o sistema (4-13), obtemos

$$\begin{aligned} f(u, v) = & a_{10}u + a_{01}v + a_{20}u^2 + a_{11}uv + a_{30}u^3 + a_{21}u^2v + O_1(|(u, v)|^3) \\ g(u, v) = & b_{10}u + b_{01}v + b_{20}u^2 + b_{11}uv + b_{02}v^2 + b_{30}u^3 + b_{21}u^2v + b_{03}v^3 + O_2(|(u, v)|^3) \end{aligned}$$

onde os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} a_{10} = r - \frac{2rx^*}{K} - \frac{\beta y^* \alpha}{(\alpha + x^*)^2}, \quad a_{01} = -\frac{\beta x^*}{\alpha + x^*}, \quad a_{20} = -\frac{r}{K} + \frac{\beta \alpha y^*}{(\alpha + x^*)^3}, \\ a_{11} = -\frac{\beta \alpha}{(\alpha + x^*)^2}, \quad a_{30} = \frac{-\beta \alpha y^*}{(\alpha + x^*)^4}, \quad a_{21} = \frac{\beta \alpha}{(\alpha + x^*)^3}, \\ b_{10} = \frac{\beta_1 \alpha y^*}{(\alpha + x^*)^2}, \quad b_{20} = -\frac{\beta_1 \alpha y^*}{(\alpha + x^*)^3}, \quad b_{01} = \frac{(\beta_1 - \delta)x^* - \delta \alpha}{\alpha + x^*} - \frac{hc}{(c + y^* - T)^2}, \\ b_{11} = \frac{\beta_1 \alpha}{(\alpha + x^*)^2}, \quad b_{02} = \frac{hc}{(c + y^* - T)^3}, \quad b_{30} = \frac{-\beta_1 \alpha y^*}{(\alpha + x^*)^4}, \\ b_{21} = \frac{-\beta_1 \alpha}{(\alpha + x^*)^3}, \quad b_{03} = \frac{-hc}{(c + y^* - T)^4}. \end{aligned}$$

Portanto o sistema (4-13) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dot{u} = a_{10}u + a_{01}v + a_{20}u^2 + a_{11}uv + a_{30}u^3 + a_{21}u^2v + O_1(|(u,v)|^4), \\ \dot{v} = b_{10}u + b_{01}v + b_{20}u^2 + b_{11}uv + b_{02}v^2 + b_{30}u^3 + b_{21}u^2v + b_{03}v^3 + O_2(|(u,v)|^4). \end{cases} \quad (4-14)$$

O determinante e o traço da matriz associada à parte linear do sistema (4-14) são dados, respectivamente, por $\text{Det}(E^*) = a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10}$ $\text{Tr}(E^*) = a_{10} + b_{01}$. Considerando os valores dos parâmetros tais que E^* é um centro, temos que $\text{Det}(E^*) = D > 0$ e $\text{Tr}(E^*) = Tr = 0$. Além disso, $a_{01} \neq 0$ implica que a matriz é não singular. Assim, usando a fórmula do primeiro número de Liapunov, definido em [21], obtemos

$$\sigma = \frac{-3\pi R}{2a_{01}D^{\frac{3}{2}}} = \frac{-3\pi(\alpha + x^*)R}{2\beta x^*D^{\frac{3}{2}}},$$

onde x^* satisfaz a equação (4-7) e

$$\begin{aligned} R = & a_{10}b_{10}(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} - 2b_{02}^2) + a_{10}a_{01}(b_{11}^2 + a_{20}b_{11} + a_{11}b_{02} - 2a_{20}^2) + 2b_{20}b_{02} \\ & - a_{01}^2(2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) + (a_{01}b_{10} - 2a_{01}^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20}) \\ & - (a_{01}^2 + a_{01}b_{10})(3b_{10}b_{03} - 3a_{01}a_{30} + 2a_{10}a_{21} - a_{01}b_{21}). \end{aligned}$$

Logo, o sinal de σ é determinado por R . Se $R \neq 0$, então a origem de (4-14) é um foco fraco de multiplicidade um, além disso, o foco é estável para $R < 0$ e instável para $R > 0$. Segue que, se $R < 0$ então $\sigma > 0$ e o modelo (4-1) apresenta um ciclo limite instável, assim temos uma bifurcação subcrítica de Hopf. Se $R > 0$ então $\sigma < 0$ e o modelo apresenta um ciclo limite estável, assim temos uma bifurcação supercrítica de Hopf.

Teorema 4.4 *Se $\text{Tr}(J(E^*)) = Tr = 0$ e $D = \text{Det}(J(E^*))$ então o modelo (4-1) exibe as bifurcações subcrítica e supercrítica de Hopf.*

Observe que $D = \text{Det}(J(E^*)) = f_{1x}f_{2y} - f_{1y}f_{2x}$, assim, de acordo com as expressões (4-9) e (4-10) temos que existem valores dos parâmetros tais que

1. $D = 0$ em E^* e assim o modelo (4-1) possui somente dois equilíbrios interiores.
2. $D > 0$ e o modelo possui três equilíbrios interiores.
3. o modelo possui somente um equilíbrio interior.

Então obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.5 *Se $h = h^* > 0$ então o modelo exibe uma bifurcação sela-nó.*

Demonstração. Suponhamos que existem dois pontos de equilíbrios interiores para o modelo (4-1), isto é, existe um ponto E_2^* tal que $D = 0$. Além disso, consideramos h como parâmetro de bifurcação, ou seja $D = 0$ quando $h = h^*$ e tomamos valores dos parâmetros tais que $Tr \neq 0$ em E_2^* .

A matriz Jacobiana de (4-1), dada na subseção 4.1.1 e calculada no ponto E_2^* , possui autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = Tr \neq 0$. Consideramos a mudança de variáveis $\xi = h - h^*$, $u = x - x_2^*$ e $v = y - y_2^*$, que leva o ponto de equilíbrio (h^*, x_2^*, y_2^*) para a origem, e reescrevemos o modelo (4-1) como

$$\begin{cases} \dot{u} = r(u + x_2^*) \left(1 - \frac{u + x_2^*}{K}\right) - \frac{\beta(v + y_2^*)(u + x_2^*)}{\alpha + u + x_2^*} = F_1(\xi, u, v), \\ \dot{v} = \frac{\beta_1(v + y_2^*)(u + x_2^*)}{\alpha + u + x_2^*} - \frac{(\xi + h^*)(v + y_2^* - T)}{c + v + y_2^* - T} - \delta(v + y_2^*) = F_2(\xi, u, v). \end{cases} \quad (4-15)$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial \xi} &= -\frac{v + y_2^* - T}{c + v + y_2^* - T}, & \frac{\partial F_2}{\partial \xi}(0, 0, 0) &= -\frac{y_2^* - T}{c + y_2^* - T}, \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial v^2} &= \frac{2(\xi + h^*)c}{(c + v + y_2^* - T)^3}, & \frac{\partial^2 F_2}{\partial v^2}(0, 0, 0) &= \frac{2h^*c}{(c + y_2^* - T)^3}. \end{aligned}$$

Pelas discussões anteriores temos que $y_2^* > T$ e por hipótese temos que $h = h^* > 0$, assim $\frac{\partial^2 F_2}{\partial v^2}(0, 0, 0) \neq 0$ e $\frac{\partial F_2}{\partial \xi}(0, 0, 0) \neq 0$. Concluimos que o modelo exibe uma bifurcação sela-nó para $h = h^* > 0$ e x_2^* suficientemente grande. \square

Pelo Teorema 4.5 o modelo (4-1) exibe uma bifurcação sela-nó para $D = 0$. Assumindo $D > 0$, existem três equilíbrios E_1^* , E_2^* e E_3^* . Quando o valor de D decresce o equilíbrio E_3^* tende ao equilíbrio E_2^* , quando $D = 0$ o ponto E_3^* colide com E_2^* . Em particular, x_2^* é uma raiz dupla da equação (4-7).

Para o caso $D = 0$ e $Tr = 0$ temos os seguintes resultados.

Teorema 4.6 *Se $D = 0$ e $Tr = 0$ em E_2^* , então o modelo (4-1) possui somente dois equilíbrios E_i^* , onde $i = 1, 2$, e existem valores para os parâmetros tais que E_2^* é uma cúspide de codimensão dois.*

Demonstração. Por hipótese temos que $D = 0$ em E_2^* , isto implica que a equação (4-9) é válida em E_2^* , segue pela discussões anteriores que o modelo possui somente dois equilíbrios no primeiro quadrante do \mathbb{R}^2 .

Vimos que no ponto de equilíbrio interior o modelo (4-1) pode ser reescrito, a partir de mudanças de variáveis, no sistema (4-14), onde

$$(\dot{u}, \dot{v}) = (f(u, v), g(u, v)) = F(u, v)$$

com f e g sendo funções analíticas, em uma vizinhança da origem, dadas em série de potência. Observe que $x_2^* > 0$ implica que a matriz Jacobiana, dada por (4-11), não é uma matriz nula, isto é $A = DF(0) \neq 0$, além disso os autovalores de A são nulos. Então, somente precisamos transformar o sistema (4-14) na forma canônica da cúspide.

Primeiro fazemos uma transformação afim, $u_1 = u$ e $v_1 = a_{10}u + a_{01}v$, então o sistema (4-14) torna-se

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = v_1 + \left(a_{20} - \frac{a_{10}a_{11}}{a_{01}}\right)u_1^2 + \frac{a_{11}}{a_{01}}u_1v_1 + O_3(|(u_1, v_1)|^3), \\ \dot{v}_1 = (a_{01}b_{10} - b_{01}a_{10})u_1 + (a_{10} + b_{01})v_1 + \left(a_{10}a_{20} + a_{01}b_{20} - b_{11}a_{10} - \frac{a_{11}a_{10}^2}{a_{01}}\right)u_1^2 \\ + \left(\frac{a_{10}a_{11}}{a_{01}} - \frac{2a_{10}b_{02}}{a_{01}} + b_{11}\right)u_1v_1 + \frac{b_{02}}{a_{01}}v_1^2 + O_4(|(u_1, v_1)|^3). \end{cases} \quad (4-16)$$

Agora, fazemos uma mudança C^∞ de variáveis em uma vizinhança da origem. Isto é, tomamos $u_2 = u_1 - \frac{a_{11}}{2a_{01}}u_1^2$ e $v_2 = v_1 + \left(a_{20} - \frac{a_{10}a_{11}}{a_{01}}\right)u_1^2$, então o sistema (4-16) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dot{u}_2 = v_2 + O_5(|(u_2, v_2)|^3), \\ \dot{v}_2 = (a_{01}b_{10} - b_{01}a_{10})u_2 + (a_{10} + b_{01})v_2 + \eta_1u_2^2 + \eta_2u_2v_2 + \frac{b_{02}}{a_{01}}v_2^2 + O_6(|(u_2, v_2)|^3), \end{cases} \quad (4-17)$$

onde

$$\begin{aligned} \eta_1 &= a_{01}b_{20} - b_{01}a_{20} - b_{11}a_{10} + \frac{b_{02}a_{10}^2}{a_{01}} + \frac{a_{10}a_{11}b_{01}}{2a_{01}} + \frac{a_{11}b_{10}}{2}, \\ \eta_2 &= 2a_{20} + b_{11} - \frac{a_{10}a_{11}}{a_{01}} - \frac{2a_{10}b_{02}}{a_{01}}. \end{aligned} \quad (4-18)$$

Tomando $u_3 = u_2$, $v_3 = v_2 + O_5(|(u_2, v_2)|^3)$ e considerando $D = a_{01}b_{10} - b_{01}a_{10} = 0$ e $Tr = a_{10} + b_{01} = 0$ no sistema (4-17), obtemos

$$\begin{cases} \dot{u}_3 = v_3, \\ \dot{v}_3 = \eta_1u_3^2 + \eta_2u_3v_3 + \frac{b_{02}}{a_{01}}v_3^2 + O_7(|(u_3, v_3)|^3), \end{cases} \quad (4-19)$$

com η_1 e η_2 dados nas equações (4-18).

Considerando $a_2 = \eta_1$, $b_1 = \eta_2$, temos que o sistema (4-19) satisfaz as hipótese do Teorema 1.17 com $k = 2$, $m = n = 1$, $f(u_3) = g(u_3) = 0$. Portanto o modelo (4-1) apresenta uma cúspide de codimensão dois quando $\eta_1\eta_2 \neq 0$. \square

Na demonstração do Teorema anterior vimos que quando $D = Tr = 0$ o modelo (4-1) pode ser reescrito como o sistema (4-19) a partir de mudanças de variáveis, tal sistema é dado na forma (1-9) com $b = c = 0$. No que segue, encontraremos um desdobramento versal de E_2^* dependendo dos parâmetros originais do modelo e mostraremos que δ e h podem ser tomados como parâmetros de bifurcação de forma que o modelo pode apresentar uma Bifurcação Bogdanov-Takens.

Sejam $\delta = \delta^* + k_1$ e $h = h^* + k_2$, onde $\delta = \delta^*$ e $h = h^*$ satisfazem $Tr = 0$ e $D = 0$, respectivamente, e k_1, k_2 são parâmetros pequenos. Podemos reescrever o modelo (4-1) como

$$\begin{cases} \dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\beta xy}{\alpha + x}, \\ \dot{y} = \frac{\beta_1 xy}{\alpha + x} - (\delta^* - k_1)y - \frac{(h^* - k_2)(y - T)}{c + y - T}. \end{cases} \quad (4-20)$$

Quando $k_1 = k_2 = 0$, o sistema (4-20) tem um único ponto de equilíbrio interior E_2^* que é uma cúspide de codimensão dois. De fato, neste caso a equação (4-9) é válida para todo ponto singular do modelo o que implica na existência de um único ponto de equilíbrio para o modelo e pelo Teorema 4.6 temos que este ponto é uma cúspide de codimensão dois. Para $k_1 \neq 0$ e $k_2 \neq 0$ temos o seguinte resultado.

Teorema 4.7 *Se $0 < |\delta - \delta^*| \ll 1$ e $0 < |h - h^*| \ll 1$ então o modelo (4-1) sofre uma Bifurcação Bogdanov-Takens. Assim, existem valores dos parâmetros para os quais o modelo possui um único ciclo limite estável ou apresenta um laço homoclínico.*

Demonstração. Para analisar o comportamento do modelo sobre as hipóteses do teorema vamos reduzir o sistema (4-20) à forma normal em sucessivos passos. Estes passos são similares àqueles feitos na demonstração do Teorema 4.6.

1. Vamos transladar o ponto de equilíbrio E_2^* para a origem. Tomando $u = x - x_2^*$ e $v = y - y_2^*$ obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = r(u + x_2^*) \left(1 - \frac{u + x_2^*}{K}\right) - \frac{\beta(u + x_2^*)(v + y_2^*)}{\alpha + u + x_2^*} = g_1(u, v), \\ \dot{v} = \frac{\beta_1(u + x_2^*)(v + y_2^*)}{\alpha + u + x_2^*} - (\delta^* - k_1)(v + y_2^*) - \frac{(h^* - k_2)(v + y_2^* - T)}{c + v + y_2^* - T} = g_2(u, v). \end{cases} \quad (4-21)$$

2. Determinando as séries de potência das funções g_1 e g_2 , em torno da origem,

podemos reescrever o sistema (4-21) por

$$\begin{cases} \dot{u} = a_{10}u + a_{01}v + a_{20}u^2 + a_{11}uv + O_1(|(u, v)|^3), \\ \dot{v} = k_1y_2^* + \frac{k_2(y_2^* - T)}{c + y_2^* - T} + b_{10}u + \left(b_{01} + k_1 + \frac{k_2c}{(c + y_2^* - T)^2}\right)v + b_{20}u^2 \\ \quad + \left(b_{02} - \frac{k_2c}{(c + y_2^* - T)^3}\right)v^2 + b_{11}uv + O_2(|(u, v)|^3). \end{cases} \quad (4-22)$$

3. Tomamos a transformação afim $u_1 = u$ e $v_1 = a_{10}u + a_{01}v$ e reescrevemos o sistema (4-22) como

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = v_1 + \left(a_{20} - \frac{a_{11}a_{10}}{a_{01}}\right)u_1^2 + \frac{a_{11}}{a_{01}}u_1v_1 + O_3(|(u_1, v_1)|^3), \\ \dot{v}_1 = a_{01}k_1y_2^* + a_{01}\frac{k_2(y_2^* - T)}{c + y_2^* - T} + (a_{01}b_{10} - b_{01}a_{10})u_1 - a_{10}k_1u_1 \\ \quad - \frac{a_{10}k_2c}{(c + y_2^* - T)^2}u_1 + (b_{01} + a_{10})v_1 + \left(k_1 + \frac{k_2c}{(c + y_2^* - T)^2}\right)v_1 \\ \quad + (a_{10}a_{20} + a_{01}b_{20} - b_{11}a_{10})u_1^2 + \left(\frac{b_{02}a_{10}^2}{a_{01}} - \frac{a_{10}^2a_{11}}{a_{01}}\right)u_1^2 \\ \quad - \left(\frac{a_{10}^2k_2c}{a_{01}(c + y_2^* - T)^2}\right)u_1^2 + \left(\frac{b_{02}}{a_{01}} - \frac{k_2c}{a_{01}(c + y_2^* - T)^2}\right)v_1^2 \\ \quad + \left(b_{11} + \frac{a_{10}a_{11}}{a_{01}} - \frac{2b_{02}a_{10}}{a_{01}} + \frac{2a_{10}k_2c}{a_{01}(c + y_2^* - T)^2}\right)u_1v_1 + O_4(|(u_1, v_1)|^3). \end{cases} \quad (4-23)$$

4. Agora, façamos a mudança de variáveis dada por

$$u_2 = u_1 - \frac{a_{11}}{2a_{01}}u_1^2, \quad v_2 = v_1 + \left(a_{20} - \frac{a_{10}a_{11}}{a_{01}}\right)u_1^2,$$

então o sistema (4-23) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dot{u}_2 = v_2 + O_5(|(u_2, v_2)|^3), \\ \dot{v}_2 = a_{01}k_1y_2^* + \frac{a_{01}k_2(y_2^* - T)}{c + y_2^* - T} + (a_{01}b_{10} - b_{01}a_{10})u_2 + (a_{10} + b_{01})v_2 \\ \quad + \left(k_1 + \frac{k_2c}{(c + y_2^* - T)^2}\right)(v_2 - a_{10}u_2) + \left(\frac{b_{02}}{a_{01}} - \frac{k_2c}{a_{01}(c + y_2^* - T)^2}\right)v_2^2 \\ \quad + \eta_3u_2^2 + \eta_4u_2v_2 + G_1(u_2) + v_2G_2(u_2), \end{cases} \quad (4-24)$$

onde $G_1(u_2)$ é uma série de potências u_2^i com $i \geq 3$, $G_2(u_2)$ é uma série de potências u_2^i satisfazendo $i \geq 2$ e os coeficientes η_3 e η_4 são dados por

$$\begin{aligned}\eta_3 &= \eta_1 + \frac{(a_{01}b_{10} - b_{01}a_{10})(k_1(c + y_2^* - T)^2 + k_2c) - 2a_{10}^2k_2c}{2a_{01}(c + y_2^* - T)^2}, \\ \eta_4 &= \eta_2 + \frac{2a_{10}k_2c}{a_{01}(c + y_2^* - T)^2},\end{aligned}\quad (4-25)$$

onde η_1 e η_2 foram definidos nas equações (4-18).

5. Considerando $u_3 = u_2$ e $v_3 = v_2 + O_5(|(u_2, v_2)|^3)$ no sistema (4-24) podemos reescreve-lo como

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{u}_3 &= v_3, \\ \dot{v}_3 &= a_{01}k_1y_2^* + \frac{a_{01}k_2(y_2^* - T)}{c + y_2^* - T} + (a_{01}b_{10} - b_{01}a_{10})u_3 + (a_{10} + b_{01})v_3 \\ &\quad + \left(k_1 + \frac{k_2c}{(c + y_2^* - T)^2} \right) (v_3 - a_{10}u_3) + \left(\frac{b_{02}}{a_{01}} - \frac{k_2c}{a_{01}(c + y_2^* - T)^2} \right) v_3^2 \\ &\quad + \eta_3u_3^2 + \eta_4u_3v_3 + G_3(u_3) + v_3G_4(u_3) + v_3^2G_5(u_3, v_3), \end{aligned} \right. \quad (4-26)$$

onde $G_3(u_3)$ é uma série de potências u_3^i com $i \geq 3$, $G_4(u_3)$ é uma série de potências u_3^i satisfazendo $i \geq 2$ e $G_5(u_3, v_3)$ é uma série de potências $u_3^i v_3^j$ satisfazendo $i + j \geq 1$, além disso, G_3 , G_4 e G_5 são funções que dependem de k_1 e k_2 .

6. Observe que, quando $D = (a_{01}b_{10} - b_{01}a_{10}) = 0$, $Tr = a_{10} + b_{01} = 0$, $0 < |k_1| \ll 1$, $0 < |k_2| \ll 1$ e $\eta_1\eta_2 \neq 0$ temos que $\eta_3\eta_4 \neq 0$. Aplicando o Teorema 1.9 e obter a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} &a_{01}k_1y_2^* + \frac{a_{01}k_2(y_2^* - T)}{c + y_2^* - T} - a_{10}u_3 \left(k_1 + \frac{k_2c}{(c + y_2^* - T)^2} \right) + \eta_3u_3^2 + G_1(u_3) \\ &= \left(\frac{a_{01}k_1y_2^*}{\eta_3} + \frac{a_{01}k_2(y_2^* - T)}{\eta_3(c + y_2^* - T)} - \frac{a_{10}k_1(c + y_2^* - T)^2 + a_{10}k_2c}{\eta_3(c + y_2^* - T)^2} u_3 + u_3^2 \right) Q(u_3, k_1, k_2), \end{aligned}$$

onde $Q(u_3, k_1, k_2)$ é uma série de potência em u_3 e $Q(0, k_1, k_2) = \eta_3$. Para simplificar os cálculos tomamos um reescalonamento do tempo e uma mudança de variáveis dados por $\tau = \int_0^t \sqrt{Q(u_3(s), k_1, k_2)} ds$, $z_1 = u_3$ e $z_2 = \frac{v_3}{\sqrt{Q(u_3, k_1, k_2)}}$. Assim o

sistema (4-26) torna-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = \frac{a_{01}k_1y_2^*}{\eta_3} + \frac{a_{01}k_2(y_2^* - T)}{\eta_3(c + y_2^* - T)} - z_1 \frac{a_{10}k_1(c + y_2^* - T)^2 + a_{10}k_2c}{\eta_3(c + y_2^* - T)^2} + z_1^2 \\ + z_2 \frac{k_1(c + y_2^* - T)^2 + k_2c}{(c + y_2^* - T)^2 \sqrt{Q(z_1, k_1, k_2)}} + z_2^2 \left(\frac{b_{02}}{a_{01}} - \frac{k_2c}{a_{01}(c + y_2^* - T)^2} \right) \\ + \frac{\eta_4 z_1 z_2}{\sqrt{Q(z_1, k_1, k_2)}} + R_1(z_1, z_2, k_1, k_2), \end{array} \right. \quad (4-27)$$

onde $R_1(z_1, z_2, k_1, k_2)$ é uma série de potência $z_1^i z_2^j$ com $i + j \geq 3$ e $j \geq 2$.

7. Agora façamos a transformação afim dada por

$$z_3 = z_1 - \frac{a_{10}k_1(c + y_2^* - T)^2 + a_{10}k_2c}{2\eta_3(c + y_2^* - T)^2}, \quad z_4 = z_2.$$

Observe que $Q(z_1, k_1, k_2) = Q\left(z_3 + \frac{a_{10}k_1(c + y_2^* - T)^2 + a_{10}k_2c}{2\eta_3(c + y_2^* - T)^2}, k_1, k_2\right)$, então para uma análise local temos $z_3 \rightarrow 0$ e

$$Q(z_1, k_1, k_2) = Q(A, k_1, k_2) = Q\left(\frac{a_{10}k_1(c + y_2^* - T)^2 + a_{10}k_2c}{2\eta_3(c + y_2^* - T)^2}, k_1, k_2\right).$$

Segue que, o sistema (4-27) reduz-se a

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_3 = z_4, \\ \dot{z}_4 = \frac{a_{01}k_1y_2^*}{\eta_3} + \frac{a_{01}k_2(y_2^* - T)}{\eta_3(c + y_2^* - T)} - \frac{1}{4} \left(\frac{a_{10}k_1(c + y_2^* - T)^2 + a_{10}k_2c}{\eta_3(c + y_2^* - T)^2} \right)^2 + z_3^2 \\ + \frac{z_4}{\sqrt{Q(A, k_1, k_2)}} \left(k_1 + \frac{a_{10}k_1\eta_4}{2\eta_3} + \frac{k_2c}{(c + y_2^* - T)^2} + \frac{a_{10}k_2c\eta_4}{2\eta_3(c + y_2^* - T)^2} \right) \\ + \frac{z_4^2}{a_{01}} \left(b_{02} - \frac{k_2c}{(c + y_2^* - T)^2} \right) + \frac{\eta_4 z_3 z_4}{\sqrt{Q(A, k_1, k_2)}} + R_2(z_3, z_4, k_1, k_2), \end{array} \right. \quad (4-28)$$

onde $R_2(z_3, z_4, 0, 0)$ é uma série de potências $z_3^i z_4^j$ satisfazendo $i + j \geq 3$ e $j \geq 2$.

$$\mu_1(k_1, k_2) = \frac{a_{01}k_1y_2^*}{\eta_3} + \frac{a_{01}k_2(y_2^* - T)}{\eta_3(c + y_2^* - T)} - \frac{1}{4} \left(\frac{a_{10}k_1(c + y_2^* - T)^2 + a_{10}k_2c}{\eta_3(c + y_2^* - T)^2} \right)^2,$$

$$\mu_2(k_1, k_2) = \frac{1}{\sqrt{Q(A, k_1, k_2)}} \left(k_1 + \frac{a_{10}k_1\eta_4}{2\eta_3} + \frac{k_2c}{(c + y_2^* - T)^2} + \frac{a_{10}k_2c\eta_4}{2\eta_3(c + y_2^* - T)^2} \right).$$

Calculando a matriz Jacobiana da função $F(k_1, k_2) = (\mu_1(k_1, k_2), \mu_2(k_1, k_2))$ vemos que a mudança dos parâmetros (k_1, k_2) para (μ_1, μ_2) é não singular em uma vizinhança de $(k_1, k_2) = (0, 0)$. Então, o sistema (4-28) pode ser reescrito localmente como

$$\begin{cases} \dot{z}_3 = z_4, \\ \dot{z}_4 = \mu_1 + \mu_2 z_4 + z_3^2 + \frac{\eta_4 z_3 z_4}{\sqrt{Q(A, k_1, k_2)}} + \frac{z_4^2}{a_{01}} \left(b_{02} - \frac{k_2 c}{(c + y_2^* - T)^2} \right). \end{cases} \quad (4-29)$$

Segue que o modelo (4-1) pode ser escrito na forma normal (4-29) e pela Definição 1.18 temos que esta forma normal é um desdobramento universal para a Bifurcação Bogdanov-Takens. Portanto, o modelo (4-1) sofre uma bifurcação Bogdanov-TaKens. \square

Quando $0 < T_0 < T$ o modelo possui um único equilíbrio interior, denotado por $E_1 = (x_1, y_1) = (\delta\alpha/(\beta_1 - \delta), T_0)$, para $y \leq T$ e não possui equilíbrio interior ou possui no máximo quatro para $y > T$. Quando $y > T$ a análise da bifurcação é a mesma do caso anterior e para $y < T$ obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.8 *Se $K > 2x_1 + \alpha$, então o modelo possui pelo menos um ciclo limite. Se $K = 2x_1 + \alpha$ uma bifurcação de Hopf ocorre.*

Finalmente, vamos analisar o comportamento qualitativo do modelo (4-1) quando $T = T_0 = y^*$. Neste caso, temos que $x^* = \frac{\delta\alpha}{\beta_1 - \delta}$ e o ponto de equilíbrio $E^* = (x^*, T_0)$ é um ponto de fronteira. A fim de analisarmos a estabilidade de E^* , devemos considerar o comportamento das soluções do modelo (4-1) em E^* segundo as órbitas dos seguintes sistemas

$$(a): (\dot{x}, \dot{y}) = \left(rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\beta xy}{\alpha + x}, \frac{\beta_1 xy}{\alpha + x} - \delta y \right),$$

$$(b): (\dot{x}, \dot{y}) = \left(rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\beta xy}{\alpha + x}, \frac{\beta_1 xy}{\alpha + x} - \delta y - \frac{h(y - T)}{c + y - T} \right).$$

Sejam E_a^* e E_b^* os pontos de equilíbrio interior dos sistemas (a) e (b), respectivamente, temos que $E_a^* = E_b^*$ quando $T = T_0$. Assim, vamos denotá-los simplesmente por E^* .

Calculando o traço e o determinante das matrizes Jacobianas, associadas aos sistemas acima, em E^* obtemos

$$\text{Tr}_a(E^*) = r - \frac{2rx^*}{K} - \frac{\beta y^* \alpha}{(\alpha + x^*)^2} + \frac{\beta_1 x^*}{\alpha + x^*} - \delta,$$

$$\text{Det}_a(E^*) = \left(r - \frac{2rx^*}{K} \right) \left(\frac{\beta_1 x^*}{\alpha + x^*} - \delta \right) + \frac{\beta y^* \alpha \delta}{(\alpha + x^*)^2},$$

$$\text{Tr}_b(E^*) = r - \frac{2rx^*}{K} - \frac{\beta y^* \alpha}{(\alpha + x^*)^2} + \frac{\beta_1 x^*}{\alpha + x^*} - \delta - \frac{hc}{(c + y^* - T)^2} = \text{Tr}_a(E^*) - \frac{hc}{(c + y^* - T)^2},$$

$$\begin{aligned} \text{Det}_b(E^*) &= \left(r - \frac{2rx^*}{K} \right) \left(\frac{\beta_1 x^*}{\alpha + x^*} - \delta \right) + \frac{\beta y^* \alpha \delta}{(\alpha + x^*)^2} - \frac{hc}{(c + y^* - T)^2} \left(r - \frac{2rx^*}{K} - \frac{\beta y^* \alpha}{(\alpha + x^*)^2} \right) \\ &= \text{Det}_a(E^*) - \frac{\text{Tr}_a(E^*) hc}{(c + y^* - T)^2} + \frac{hc}{(c + y^* - T)^2} \left(\frac{\beta_1 x^*}{\alpha + x^*} - \delta \right). \end{aligned}$$

Observe que $\frac{\beta_1 x^*}{\alpha + x^*} - \delta = 0$ para $x^* = \delta \alpha / (\beta_1 - \delta)$, $hc / (c + y - T)^2 > 0$ e, pelas discussões anteriores, $\text{Det}_a(E^*) > 0$. Assim, obtemos as seguintes igualdades

$$\text{Tr}_a(E^*) - \text{Tr}_b(E^*) = \frac{hc}{(c + y - T)^2} > 0, \quad \text{Det}_a(E^*) = \text{Det}_b(E^*) + \frac{hc \text{Tr}_a(E^*)}{(c + y - T)^2} > 0. \quad (4-30)$$

Quando $y^* = T$ obtemos o resultado seguinte para o comportamento dinâmico do modelo (4-1) em E^* , analisando o comportamento dos campos (a) e (b) em E^* separadamente, isto é, $E^* = E_a^*$ e $E^* = E_b^*$. No que segue, vamos considerar $\text{Tr}_i = \text{Tr}_i(E_i^*)$ e $\text{Det}_i = \text{Det}_i(E_i^*)$, $i = a, b$, para simplificar a notação.

Teorema 4.9 *Se $\text{Det}_b < 0$, então E_b^* é um ponto de sela e E_a^* pode ser um foco ou um nó instável. Se $\text{Det}_b > 0$ então temos as seguintes dinâmicas.*

1. Quando $\text{Tr}_b > 0$ temos que,

- (i) se $\text{Tr}_a^2 - 4\text{Det}_a \geq 0$, então E_a^* e E_b^* são nós instáveis. Neste caso, E^* é um nó instável e o modelo apresenta um ciclo limite;
- (ii) se $\text{Tr}_a^2 - 4\text{Det}_a < 0$ e $\text{Tr}_b^2 - 4\text{Det}_b \geq 0$, então E_a^* é um foco instável e E_b^* é um nó instável. Neste caso, E^* é instável e o modelo apresenta um ciclo limite;
- (iii) se $\text{Tr}_b^2 - 4\text{Det}_b < 0$, então E_a^* e E_b^* são focos instáveis. Neste caso E^* pode ser estável, instável ou o modelo possui soluções periódicas.

2. Quando $\text{Tr}_a < 0$ e $\text{Tr}_b > 0$ temos que,

- (i) se $Tr_b^2 - 4Det_b \geq 0$, então E_a^* é um nó instável e E_b^* é um nó estável. Neste caso, o modelo possui um laço homoclínico;
- (ii) se $Tr_b^2 - 4Det_b < 0$ e $Tr_a^2 - 4Det_a \geq 0$, então E_a^* é um nó instável e E_b^* é um foco estável, o que implica que E^* é instável;
- (iii) se $Tr_b^2 - 4Det_b < 0$ e $Tr_a^2 - 4Det_a < 0$ então E_a^* é um foco instável e E_b^* é um foco estável. Isto implica que E^* pode ser um ponto estável, instável ou o modelo possui soluções periódicas.

3. Quando $Tr_a < 0$ temos que,

- (i) se $Tr_b^2 - 4Det_b \geq 0$ e $Tr_a^2 - 4Det_a \geq 0$ então E_a^* e E_b^* são nós estáveis. Neste caso, E^* é um nó estável;
- (ii) se $Tr_b^2 - 4Det_b < 0$ e $Tr_a^2 - 4Det_a \geq 0$ então E_a^* é um nó estável e E_b^* é um foco estável, de modo que, E^* é estável;
- (iii) se $Tr_b^2 - 4Det_b \geq 0$ e $Tr_a^2 - 4Det_a < 0$ então E_a^* é um foco estável e E_b^* é um nó estável, de modo que, E^* é estável;
- (iv) se $Tr_b^2 - 4Det_b < 0$ e $Tr_a^2 - 4Det_a < 0$ então E_a^* e E_b^* são focos estáveis. Neste caso, E^* pode ser um ponto estável ou instável ou o modelo possui soluções periódicas.

Demonstração. Vamos apenas demonstrar o item 1.(i), as demais afirmações seguem a partir de uma análise similar. Por hipótese temos que $Det_b > 0$, $Tr_b > 0$ e $Tr_a^2 - 4Det_a \geq 0$.

Sabemos que os autovalores das matrizes Jacobianas, associadas aos sistemas (a) e (b) definidos anteriormente, avaliadas nos pontos de equilíbrios E_a^* e E_b^* são dados por

$$\lambda_i = \frac{Tr_i \pm \sqrt{Tr_i^2 - 4Det_i}}{2},$$

onde $i = a, b$. Além disso, a primeira expressão de (4-30) juntamente com $Tr_b > 0$ implicam em $Tr_a > Tr_b > 0$. Consequentemente, $Tr_a > 0$ e a segunda expressão de (4-30) implicam em

$$Tr_b^2 - 4Det_b = \left(Tr_a - \frac{hc}{(c + y^* - T)^2} \right)^2 - 4 \left(Det_a - \frac{hcTr_a}{(c + y^* - T)^2} \right) \quad (4-31)$$

$$= Tr_a^2 - 4Det_a + 4 \frac{hcTr_a}{(c + y^* - T)^2} + \frac{h^2c^2}{(c + y^* - T)^2} > 0. \quad (4-32)$$

Segue que, os autovalores são reais e positivos, ou seja, $\lambda_a > 0$ e $\lambda_b > 0$. Portanto, E_a^* e E_b^* são nós instáveis, de modo que E^* é um nó instável.

Na Seção 4.1 vimos que os pontos de equilíbrios E_0 e E^0 existem para quaisquer valores dos parâmetros e na Seção 4.1.1 vimos que E_0 é um ponto de sela e E^0 é um ponto de sela quando o equilíbrio interior E^* existe. Logo, pelos Teoremas 1.6 e 4.1, o modelo possui um ciclo limite. \square

Observamos que o estudo da estabilidade do ponto de equilíbrio E^* quando $T = T_0$ não é simples, existem os casos 1.(iii), 2.(iii) e 3.(iv) do teorema 4.9 nos quais a estabilidade de E^* não está bem definida. Suponhamos que o caso 2.(iii) é verdadeiro. Sejam $J_-(E^*)$ e $J_+(E^*)$ as matrizes Jacobianas do modelo (4-1), à esquerda e à direita, avaliadas em E^* quando $T = T_0$. Essas matrizes são dadas respectivamente por

$$J_{\mp}(E^*) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx^*}{K} - \frac{\beta\alpha y^*}{(\alpha + x^*)^2} & \frac{-\beta x^*}{\alpha + x^*} \\ \frac{\beta_1\alpha y^*}{(\alpha + x^*)^2} & \frac{\beta_1 x^*}{\alpha + x^*} - \delta - H'_{\mp}(y^*) \end{pmatrix},$$

onde $H'_+(y)$ é a derivada à direita de $H(y)$ e $H'_-(y)$ é a derivada à esquerda de $H(y)$. Note que, $H'_+(y) = H'_-(y)$ quando $y^* \neq T$ e para $T = T_0 = y^*$ temos que $H'_-(y^*) = 0$ e $H'_+(y^*) = \frac{hc}{(c + y^* - T)^2}$. Como E_b^* é um foco instável temos que as partes reais dos autovalores de $J_+(E^*)$ são todas negativas e como E_a^* é um foco instável, sem perda de generalidade, existe pelo menos um autovalor λ de $J_-(E^*)$ tal que a parte real de λ é positiva.

A fim de investigar o tipo de bifurcação que ocorre no modelo (4-1), numa vizinhança do equilíbrio de fronteira E^* , quando os parâmetros satisfazem o item 2.(iii) do Teorema 4.9, vamos introduzir o Jacobiano generalizado de Clarke. Se $J_+(E^*)$ e $J_-(E^*)$ não possui autovalores no eixo imaginário, então, o Jacobiano de Clarke define, localmente, o campo de vetores em torno de E^* , ver [17]. Considere

$$J(E^*) = \bar{c}o\{J_-(E^*), J_+(E^*)\} = \{(1 - q)J_-(E^*) + qJ_+(E^*); q \in [0, 1]\}$$

e denote $J(q) = (1 - q)J_-(E^*) + qJ_+(E^*)$. Assim, o Jacobiano generalizado é dado por $J = \{J(q); q \in [0, 1]\}$, onde $J(q)$ é dado pela matriz

$$J(q) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx^*}{K} - \frac{\beta\alpha y^*}{(\alpha + x^*)^2} & \frac{-\beta x^*}{\alpha + x^*} \\ \frac{\beta_1\alpha y^*}{(\alpha + x^*)^2} & \frac{\beta_1 x^*}{\alpha + x^*} - \delta - \frac{qhc}{(c + y - T)^2} \end{pmatrix},$$

cuja equação característica é dada por

$$\lambda^2 + a_1(q)\lambda + a_0(q) = 0, \quad (4-33)$$

onde os coeficientes são dados por

$$a_1(q) = r - \frac{2rx^*}{K} - \frac{\beta\alpha y^*}{(\alpha + x^*)^2} + \frac{\beta_1 x^*}{\alpha + x^*} - \delta - \frac{qhc}{(c + y^* - T)^2},$$

$$a_0(q) = \left(r - \frac{2rx^*}{K} - \frac{\beta\alpha y^*}{(\alpha + x^*)^2} \right) \left(\frac{\beta_1 x^*}{\alpha + x^*} - \delta - \frac{qhc}{(c + y^* - T)^2} \right) + \frac{\beta_1 \beta \alpha y^* x^*}{(\alpha + x^*)^3}.$$

Note que, as raízes de (4-33) são definidas por

$$\lambda_{\pm} = \frac{-a_1(q) \pm \sqrt{a_1(q)^2 - 4a_0(q)}}{2}.$$

Quando $q = 1$ temos que $J(q) = J_+(E^*)$, o que implica que as partes reais das raízes de (4-33) são ambas negativas e quando $q = 0$ temos que $J(q) = J_-(E^*)$, assim a parte real de ambas raízes de (4-33) são positivas. Segue que, existe q^* , onde $0 < q^* < 1$, tal que $a_1(q^*) = 0$. Além disso, para $y^* = T = T_0$ temos que $x^* = \delta\alpha/(\beta_1 - \delta)$, o que implica $\frac{\beta_1 x^*}{\alpha + x^*} - \delta = 0$, logo

$$a_0(q) = \left(r - \frac{2rx^*}{K} - \frac{\beta\alpha y^*}{(\alpha + x^*)^2} + \frac{\beta_1 x^*}{\alpha + x^*} - \delta \right) \left(-\frac{qhc}{(c + y^* - T)^2} \right) + \frac{\beta_1 \beta \alpha y^* x^*}{(\alpha + x^*)^3}$$

$$= -\text{Tr}_a(E^*) \left(\frac{qhc}{(c + y^* - T)^2} \right) + \frac{\beta_1 \beta \alpha y^* x^*}{(\alpha + x^*)^3}.$$

Pela expressão acima temos que $a_0(q) > 0$, pois $x^*, y^* \in \mathbb{R}_+^2$, todos os parâmetros do modelo (4-1) são positivos e $\text{Tr}_a(E^*) < 0$ por 2.(iii). Consequentemente, $\lambda = 0$ não é raiz da equação (4-33). Assim, quando $q = q^*$ os autovalores da equação (4-33) são $\lambda_{\pm} = \pm i\sqrt{a_0(q^*)} = \pm i\omega$, onde $\omega > 0$. Segue que, existe um ciclo limite no modelo (4-1).

Em resumo, temos que E^* é um foco estável para $y \leq T$, um foco instável para $y > T$ e o modelo pode apresentar um ciclo limite estável. Ou seja, o modelo sofre uma bifurcação descontínua de Hopf.

4.3 Resultados numéricos

Nesta seção apresentamos numericamente o comportamento qualitativo do modelo (4-1) com colheita, ou seja com $H(y) \neq 0$, quando considerando h como parâmetro de bifurcação.

Considere os seguintes valores dos parâmetros $r = 2.7$, $K = 8.5$, $\beta = 1.2$, $\alpha = 1$, $\beta_1 = 1$, $\delta = 0.64$, $c = 1$ e $T = 1$. Neste caso, substituindo esses valores na equação (4-5) obtemos que $T_0 = 4.943$, logo, $T < T_0$ e o modelo possui no máximo três pontos de

equilíbrios interiores.

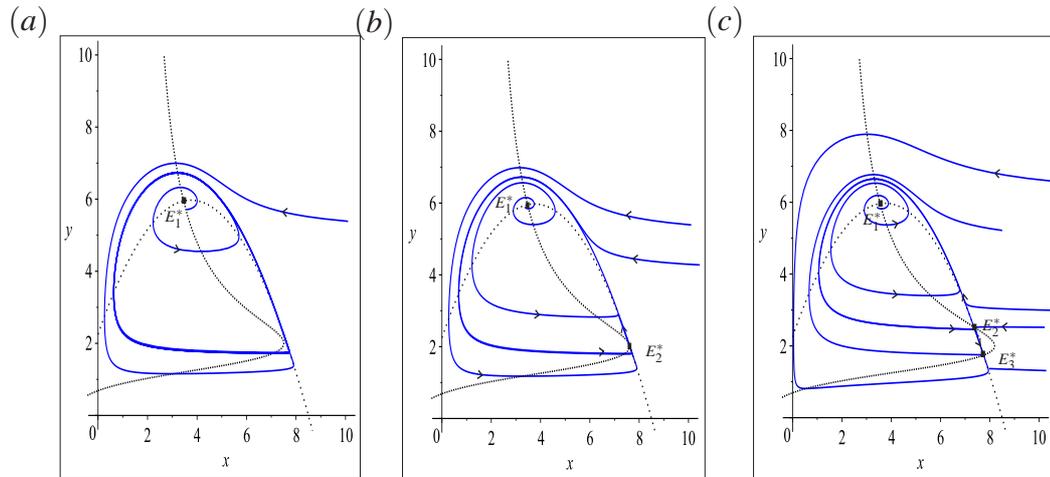


Figura 4.2: Retratos de fase para o modelo (4-1), onde o parâmetro de bifurcação h é dado por (a) $h = 0.97$, (b) $h = 0.9755$ e (c) $h = 1.005$.

Se $h = 0.97$ então o modelo possui apenas um equilíbrio interior E_1^* que é um foco instável, de modo que existe um único ciclo limite, globalmente assintoticamente estável, como mostra a Figura 4.2-(a). Se $h = 0.9755$ então o modelo possui dois equilíbrios internos E_1^* e E_2^* , o ponto E_1^* é um foco instável e E_2^* é um ponto sela-nó. Além disso, a interseção das variedades estável e instável de E_2^* é uma órbita homoclínica para o modelo, ver Figura 4.2-(b).

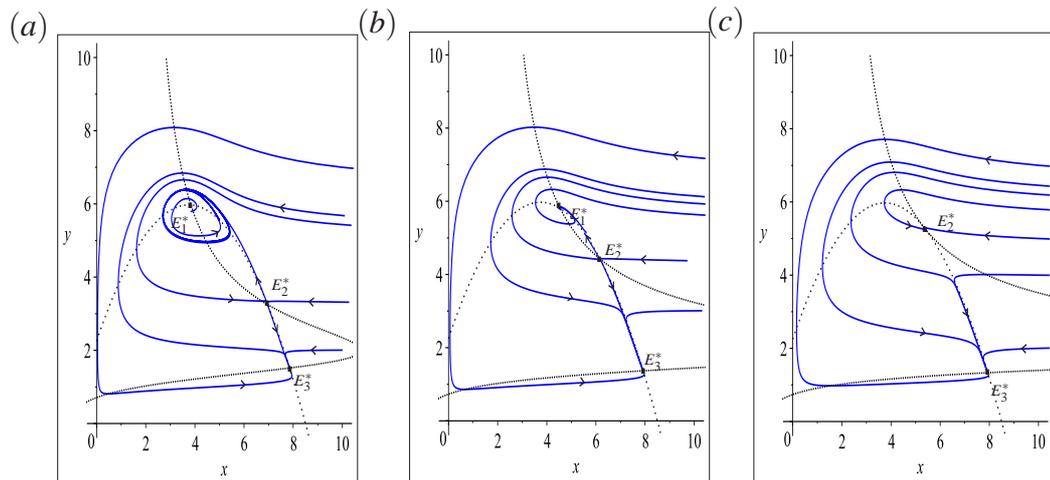


Figura 4.3: Retratos de fase para o modelo (4-1), onde (a) $h = 1.1$, (b) $h = 1.26$ e (c) $h = 1.32185$.

Quando $h = 1.005$ existem três equilíbrios E_i^* , com $i = 1, 2, 3$, sendo que E_1^* é instável, E_2^* é um ponto de sela e E_3^* é um nó estável, ver Figura 4.2-(c). Segue que, a Figura 4.2 mostra que o modelo apresenta uma bifurcação sela-nó. Quando a taxa de colheita torna-se maior, isto é, $h = 1.1$ a órbita homoclínica é quebrada e o modelo exibe

um ciclo limite em torno de E_1^* . Além disso, o equilíbrio E_2^* é uma sela e E_3^* é um nó estável, ver Figura 4.3-(a). Para $h = 1.26$, o ciclo limite é quebrado, E_2^* é um ponto de sela e E_3^* é um nó estável como mostra a Figura 4.3-(b). Agora, se $h = 1.32815$ então o equilíbrio interno E_1^* colide com E_2^* onde E_2^* é uma cúspide de codimensão dois e E_3^* é estável como mostra a Figura 4.3-(c).

Observe que de $h = 1.005$ para $h = 1.32815$ o equilíbrio instável E_1^* torna-se estável, o que implica que o modelo apresenta uma bifurcação de Hopf. Quando a taxa de colheita atinge $h = 1.4$ temos um único ponto de equilíbrio E_3^* que é globalmente assintoticamente estável, ver Figura 4.4. Portanto, pelos resultados obtidos nas simulações numéricas podemos concluir que o modelo (4-1) sofre uma bifurcação Bogdanov-Takens.

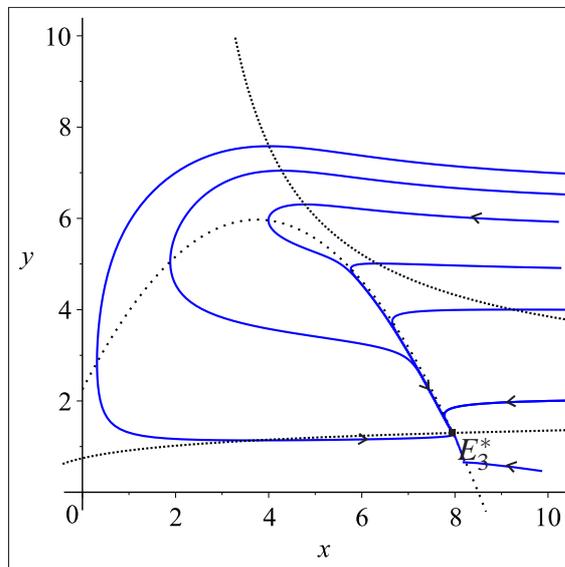


Figura 4.4: Retrato de fase do modelo (4-1) quando $h = 1.4$.

Conclusão

Antes de comentarmos os resultados obtidos, ressaltamos que o método, utilizado neste trabalho, para analisar a dinâmica de um sistema de Filippov na região de deslize Σ_s e o método de Filippov são equivalentes. O método de Filippov foi introduzido na seção 1.2 do capítulo 1. O método que utilizamos, equivalente ao de Utkin, é um método de controle que consiste em observar que $f(z) = 0$ na descontinuidade Σ e que, a partir dessa igualdade, é possível controlar um dos parâmetros do sistema obtendo a equação diferencial para a dinâmica em Σ_s . Portanto, podemos determinar o campo de vetores na região de deslize. Nos modelos (2-1) e (3-1) tínhamos $f(z) = x - R_c$ e, consequentemente, $f(z) = x - R_c = 0$ em Σ . Então, usando o método equivalente ao de Utkin, derivamos ambos os lados de $x - R_c = 0$, com respeito ao tempo t , e obtemos $\dot{x} = 0$ na região de deslize Σ_s . Em seguida, resolvemos a equação $\dot{x} = 0$ com respeito ao parâmetro ε e substituímos o valor encontrado, para ε , na expressão de \dot{y} . Assim, determinamos uma equação diferencial para a dinâmica dos modelos em Σ_s e, consequentemente, obtemos o campo de vetores em Σ_s . Observamos que, se determinássemos a equação diferencial, em Σ_s , usando o método de Filippov, encontraríamos o mesmo campo de vetores. No entanto, seria necessário um pouco mais de cálculos. Por exemplo, na seção 2.2, usamos o método de controle para determinar o campo de vetores do modelo (2-1) em Σ_s e obtemos $F_S(z) = (0, rkR_c - \delta y)$ para $z \in \Sigma_s$. Agora, pelo o método de Filippov, calculando o valor de λ , conforme a definição dada na seção 1.2, obtemos que

$$\lambda = -\frac{rbhR_c - by + r}{by}.$$

Substituindo este valor de λ na equação $F_S(z) = \lambda F_{S_1}(z) + (1 - \lambda)F_{S_2}(z)$, com F_{S_1} dado em (2-13) e F_{S_2} dado em (2-2), e simplificando o resultado obtemos $F_S(z) = (0, rkR_c - \delta y)$. Assim, os campos de vetores encontrados em ambos os casos são iguais.

Para o modelo (4-1) utilizamos o Jacobiano generalizado de Clarke para estudar a estabilidade local do ponto de equilíbrio E^* quando ele pertencia à fronteira $y = T = T_0$. O Jacobiano generalizado nos permitiu analisar o comportamento do modelo (4-1) em uma vizinhança do ponto de equilíbrio. Neste caso, não usamos o método de Filippov e

nem o método de controle equivalente ao de Utkin, pois estes dois métodos são restritos ao conjunto de descontinuidade $y = T$.

Nosso foco nos capítulos 2 e 3 foi analisar o comportamento global dos modelos predador-presa de Gause. Para o modelo de Gause com refúgio (0-1) determinamos condições, sobre os parâmetros, de forma que as espécies coexistem e suas densidades oscilam periodicamente em um ciclo de canard e sobre outras condições temos a estabilidade do modelo em pseudo equilíbrio. No entanto, notamos que existem valores dos parâmetros para os quais as soluções podem aproximar do infinito e isto é irrealístico pois no mundo natural não faz sentido falar em quantidade infinita de presas ou de predadores. Portanto a capacidade de suporte para a população de presas pode estar envolvida ou mesmo estratégias de controle biológico ou táticas de controle químico.

O modelo (0-3) foi obtido incorporando a capacidade de suporte no modelo de Gause com refúgio (0-1). Para este modelo determinamos condições suficiente e necessária para a estabilidade global do modelo em um pseudo equilíbrio, ciclo limite, ciclo tangente ou ciclo de canard. Além disso, empregamos técnicas numéricas e teóricas para mostrar que o modelo pode sofrer bifurcações com respeito à fronteira Σ . Quando a densidade de presas está abaixo do limite crítico R_c elas evitam os predadores movendo-se para o refúgio e então a densidade da população de presas cresce de acordo com a lei logística. Quando o refúgio é grande o suficiente as duas espécies coexistem em um equilíbrio regular ou um pseudo equilíbrio. Quando o tamanho do refúgio decresce as presas e predadores podem coexistir e oscilar periodicamente ao longo de um ciclo limite ou ciclo de canard ou ciclo tangente. Portanto é interessante notar que, se o modelo proposto retrata a interação entre pestes e um inimigo natural então as condições suficientes e necessárias para a estabilidade global dos atratores podem nos inspirar a escolher um limite R_c adequado de forma que a densidade de pestes seja estabilizada no nível limite.

No modelo (0-4) consideramos os efeitos de um controle biológico, no qual é aplicado uma estratégia de colheita com limiar contínuo quando a densidade de predadores está acima de um certo limite T . Para este modelo fornecemos uma análise global da estabilidade, mostramos que sobre algumas condições o modelo pode possuir um ciclo limite e sobre outras pode apresentar uma cúspide, uma bifurcação sela-nó ou Hopf ou Bogdanov-Takens. Nossos resultados implicam que estabilidade do sistema pode ser dirigido assintoticamente a um ponto de equilíbrio interno ou a um ciclo limite.

Comparando os resultados obtidos para o modelo de Gause (0-1) com os obtidos para o modelo (0-3) concluímos que as quatro dinâmicas seguintes são impossíveis para o segundo modelo,

- existem trajetórias que tendem a um ciclo de canard estável localmente e também existem trajetórias que tendem ao infinito,

- existem trajetórias tendendo a um pseudo equilíbrio estável localmente e existem trajetórias que tendem ao infinito,
- a densidade de presas tende ao infinito enquanto a densidade de predadores tende a zero,
- todas as trajetórias tendem ao infinito.

Estas observações confirmam que a capacidade de suporte pode estabilizar o modelo predador-presa de Gause e implicar na não existência do ponto singular no infinito. Isto indica que a capacidade de suporte tem uma influência fundamental no comportamento dinâmico do modelo.

Finalmente, a presença do controle biológico torna a dinâmica mais complexa. O modelo com estratégia de colheita com limiar contínuo (0-4) é um sistema não suave cuja dinâmica apresenta múltiplos equilíbrios internos, ciclo limite, órbitas homoclínicas e diferentes tipos de bifurcações. Além disso, a densidade da população predadores está sempre acima do valor limite T e isto não é biologicamente e economicamente desejável.

Referências Bibliográficas

- [1] AANES, S; ENGEN, S; SAETHER, B; WILLEBRAND, T; MARCSTROM, V. **Sustainable harvesting strategies of willow ptarmigan in a fluctuating environment.** Ecol. Appl., 12:281–290, 2012.
- [2] ANDRONOV, A. A; LEONTOVICH, E. A; GORDON, I. I; MAĬER, A. G. **Qualitative theory of second-order dynamic systems.** Halsted Press (A division of John Wiley & Sons), New York-Toronto, Ont.; Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem-London, 1973. Translated from the Russian by D. Louvish.
- [3] BOHN, J; REBAZA, J; SPEER, K. **Continuous threshold prey harvesting in predator - prey models.** Int. J. Comput. Math. Sci., 5(2):111–118, 2011.
- [4] BUDINČEVIĆ, M. **A comparison theorem of differential equations.** Novi Sad J. Math., 40(1):55–56, 2010.
- [5] BUZZI, C. A; DE CARVALHO, T; DA SILVA, P. R. **Closed poly-trajectories and Poincaré index of non-smooth vector fields on the plane.** J. Dyn. Control Syst., 19(2):173–193, 2013.
- [6] CHATTOPADHYAY, J; SARKAR, R; MANDAL, S. **Toxin producing plankton may act as a biological control for planktonic blooms: a field study and mathematical modelling.** J. Theoret. Biol., 215(3):333–344, 2002.
- [7] COLLIE, J; SPENCER, P. **Management strategies for fish populations subject to long term environmental variability and compensatory predation.** Technical report, Alaska Sea Grant College:629–650, 1993.
- [8] CORLESS, R. M; GONNET, G. H; HARE, D. E. G; JEFFREY, D. J; KNUTH, D. E. **On the Lambert W function.** Adv. Comput. Math., 5(4):329–359, 1996.
- [9] DUMORTIER, F; LLIBRE, J; ARTÉS, J. C. **Qualitative theory of planar differential systems.** Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [10] GAUSE, G. F; SMARAGDOVA, N. P; WITT, A. A. **Further studies of interaction between predators and prey.** J. Anim. Ecol., 5(1):1–18, 1936.

- [11] HALL, D; NORGAARD, R. **On the time and application of pesticides**. Am. J. Agric. Econ., 55(2):198–201, 1973.
- [12] JIANG, G; LU, Q. **Impulsive state feedback control of a predator - prey model**. J. Comput. Appl. Math., 200:193–207, 2007.
- [13] JORDAN, D. W; SMITH, P. **Nonlinear Ordinary Differential Equations an introduction for scientists and engineers**. Oxford Uni. Press Inc., New York, fourth edition, 2007.
- [14] KRIVAN, V. **On the Gause predator - prey model with a refuge: a fresh look at the history**. J. theoret. Biol., 274(1):67–73, 2011.
- [15] KUANG, Y; FREEDMAN, H. I. **Uniqueness of limit cycles in Gause-type models of predator-prey systems**. Math. Biosci., 88(1):67–84, 1988.
- [16] LANDE, R; ENGEN, S; SAETHER, B. **Optimal harvesting of fluctuating populations with a risk of extinction**. Am. Nat., 145:728–745, 1995.
- [17] LEINE, R. I. **Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems**. Phys. D, 223(1):121–137, 2006.
- [18] LIANG, J; TANG, S. **Optimal dosage and economic threshold of multiple pesticide applications for pest control**. Math. Comput. Modelling, 51(5-6):487–503, 2010.
- [19] LV, Y; YUAN, R; PEI, Y. **Two types of predator - prey models with harvesting: non-smooth and non-continuous**. J. Comput. Appl. Math., 250:122–142, 2013.
- [20] PEI, Y; CHEN, L; ZHANG, Q; LI, C. **Extinction and permanence of one - prey multi - predators of Holling type II function response system with impulsive biological control**. J. Theoret. Biol., 235(4):495–503, 2005.
- [21] PERKO, L. **Differential Equations and Dynamical Systems**. Springer-Verlag, New York, third edition, 1996.
- [22] TANG, S; LIANG, J. **Global qualitative analysis of a non-smooth Gause predator - prey model with a refuge**. Nonlinear Anal., 76:165–180, 2013.
- [23] UTKIN, V. I; GULDNER, J; SHI, J. X. **Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems**. Taylor & Francis Group, second edition, 2009.
- [24] YANG, J; TANG, S; CHEKE, R. A. **Global stability and sliding bifurcations of a non-smooth Gause predator - prey system**. Appl. Math. Comput., 224:9–20, 2013.