Systèmes dynamiques/*Dynamical Systems*

Sur la reconnaissance des itinéraires de rotations

Lluís ALSEDA, Jean-Marc GAMBAUDO et Pere MUMBRU

Résumé – Dans cette Note, nous caractérisons l'ensemble des itinéraires des rotations d'angle rationnel par rapport au codage associé à une partition du cercle en intervalles. Inversement, nous décrivons un algorithme qui : (i) décide si une suite est un itinéraire de rotation d'angle rationnel, (ii) donne l'angle et (iii) estime la taille de la partition.

On the recognition of itineraries of rotations

Abstract – *In this Note, we characterize the set of itineraries of rational rotations with respect to the coding associated to a partition of the circle in intervals. Conversely, we describe an algorithm which:* (i) *decides if a sequence is an itinerary of a rational rotation,* (ii) *gives the angle and* (iii) *estimates the size of the partition.*

I. INTRODUCTION. – Soit $\{J_i\}_{i\in\{0, 1, \ldots, n-1\}}$ une partition du cercle $\mathbb{T}^1$, en n intervalles, et soit f une application du cercle dans lui-même. A tout point x du cercle, on associe l'itinéraire $I(x)=a_0\,a_1\,a_2\ldots$ où $a_i=j$ si et seulement si $f^i(x)$ est dans J_j. Dans ce contexte, on peut se poser les questions naturelles suivantes :

(Q1) *Quel est l'ensemble des suites qui correspondent à des itinéraires de rotations?*

(Q2) *Quel est l'ensemble des itinéraires correspondant à une rotation donnée?*

(Q3) *Comment reconnaître si une suite symbolique est l'itinéraire d'une rotation et comment calculer l'angle et estimer la longueur des intervalles de la partition?*

Dans [1], on répond aux questions (Q1) et (Q2) pour des rotations d'angle rationnel, dans le cas très particulier d'une partition en deux intervalles où la longueur de l'un des deux intervalles est égale à l'angle de la rotation. Ce dernier point motive la notion suivante : on dit qu'une partition *respecte une rotation d'angle* γ s'il existe k intervalles consécutifs dont la longueur totale est précisément γ. On remarque que pour toute partition $\{J_i\}_{i\in\{0, 1, \ldots, n-1\}}$ en n intervalles et pour tout angle γ, il existe une nouvelle partition $\{K_i\}_{i\in\{0, 1, \ldots, n\}}$ en $n+1$ intervalles, obtenue à partir de la précédente en coupant un des intervalles en deux, et qui respecte la rotation d'angle γ.

Dans cette Note, on s'intéresse à la dynamique symbolique correspondant aux partitions en deux intervalles et à leur partition associée (en trois intervalles) qui respecte une rotation d'angle donnée. Dans ce cadre, on répond aux trois questions précédentes dans le cas des rotations d'angle rationnel. Les résultats obtenus peuvent se généraliser facilement au cas des partitions avec un nombre quelconque d'intervalles. Des travaux en relation avec ce sujet se trouvent dans [1] à [4].

Les démonstrations des résultats de cette Note seront données par ailleurs.

II. LA CARACTÉRISATION DES ITINÉRAIRES DE ROTATIONS. – On représente la rotation d'angle γ par l'application $x\mapsto x+\gamma$ (mod 1) de l'intervalle [0, 1) dans lui-même. Sans restriction, on peut supposer que l'intervalle définissant la partition, est de la forme $[0, 1-\alpha)$. On appelle $I_\gamma^\alpha(x)$ l'itinéraire du point x. On a : $I_\gamma^\alpha(x)=a_0\,a_1\,a_2\ldots$ avec $a_k=E(k\gamma+\alpha+x)-E(k\gamma+x)$, où $E(.)$ est la fonction partie entière.

Dans le cas $\alpha=\gamma$ tous les points ont le même itinéraire (à permutation cyclique près) et cet itinéraire est complétement déterminé [1].

Note présentée par Gérard IOOSS.

0764-4442/92/03140467 $ 2.00 © Académie des Sciences