TOPOLOGIE. — *Orbites périodiques minimales des applications continues du cercle dans lui-même ayant un point fixe.* Note de **Lluís Alsedà** et **Jaume Llibre,** présentée par René Thom.

Dans cette Note nous étendons la notion d'orbite périodique minimale, donnée pour les applications continues de l'intervalle, aux applications continues du cercle ayant un point fixe. Le résultat principal de cette Note est la caractérisation de la forme de ces orbites périodiques minimales. Comme conséquence nous améliorons les bornes inférieures connues de l'entropie topologique pour une classe spéciale d'applications du cercle de degré 0 ou −1. Les démonstrations sont données dans [2]j927TOPOLOGY. — Minimal periodic

orbits for continuous maps of the circle into itself with a fixed point.

In this Note we extend the notion of minimal periodic orbit, given for continuous maps of the interval, to continuous maps of the circle having a fixed point. The main result of this Note is the characterization of the shape of these minimal periodic orbits. As a consequence, we improve the known lower bound of the topological entropy for a special class of maps of the circle of degree 0 *or* −1. *Proofs are given in* [2].

1. Définitions préliminaires. — On désigne par I un intervalle fermé de la droite réelle et par S^1 le cercle. Soit $C(E)$, l'espace des applications continues de E dans lui-même. Si $f \in C(E)$ alors $P(f)$ désigne l'ensemble des entiers positifs n pour lesquels f a un point périodique de période n (dans cette Note, la période d'un point périodique x sera la plus petite période de x). Soit p un point périodique de période n. On définit *l'orbite de p* comme $\{ f^k(p) : k = 1, 2, 3, ..., n\}$.

Nous considérons dans $\mathbb{N}$ (l'ensemble des entiers positifs) *l'ordre de Sarkovskii :*

$$3 \ll 5 \ll 7 \ll \ldots \ll 2.3 \ll 2.5 \ll 2.7 \ll \ldots \ll 4.3 \ll 4.5 \ll 4.7 \ll \ldots \ll 8 \ll 4 \ll 2 \ll 1.$$

Maintenant, nous ajoutons le symbole 2^∞ avant toutes les puissances de deux et nous avons un ordre dans l'ensemble $\mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$. Soient $S_s = \{n \in \mathbb{N} : s \ll n\} \cup \{s\}$ pour tout $s \in \mathbb{N}$ et $S_{2^\infty} = \{1, 2, 4, 8, \ldots\}$. De même, pour chaque $b \in \mathbb{N}$ nous désignons par B_b l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : b \leqq n\}$ et $B_\infty = \varnothing$.

Le célèbre *théorème de Sarkovskii* assure pour $f \in C(I)$ l'existence de $s \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ tel que $P(f) = S_s$ (*cf.* [10], [11] ou [7]). On dit qu'une orbite périodique de f est *minimale*, ou OPM, si sa période est $s \neq 2$ (*cf.* [11], [4], [3] et [8]). Remarquons que connaître la période d'une OPM est équivalent à connaître $P(f)$.

Un théorème de Block (*cf.* [5]) assure pour $f \in C(S^1)$ et $1 \in P(f)$, l'existence de $s \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ et $b \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tels que $P(f) = S_s \cup B_b$. Nous notons que s et b ne sont pas déterminés de manière unique. Pour présenter la notion d'OPM pour les applications $f \in C(S^1)$ ayant un point fixe, nous considérons deux cas, en utilisant le degré de f [noté $\deg(f)$].

2. Degré de f différent de 1. — Dans ce cas, on a toujours $1 \in P(f)$. D'après [7] et [5] nous connaissons l'existence de $s \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ tel que $P(f) = S_s$, avec une exception. L'exception a lieu quand $\deg(f) = -2$ et $P(f) = \mathbb{N} \setminus \{2\} = S_1 \cup B_3$. De plus, si $|\deg(f)| > 1$ et si l'exception n'a pas lieu, alors $P(f) = \mathbb{N} = S_3$. Nous disons qu'une orbite périodique de $f \in C(S^1)$ avec $\deg(f) \neq 1$ est *minimale* (OPM) si sa période est s (resp. 3) quand l'exception n'a pas lieu (resp. a lieu).

Nous remarquons que chaque orbite périodique de période 3, d'une application f telle que $\deg(f) \neq 1$, est minimale. D'autre part, une orbite périodique de période 3 peut avoir uniquement deux formes (voir *fig.*). Donc nous avons caractérisé la forme des OPM de

0249-6291/85/03010601 $ 2.00