Sobre las curvas algebraicas invariantes de los campos de vectores polinomiales: Integrabilidad y ciclos límites algebraicos.

Yudy Marcela Bolaños Rivera

Trabajo dirigido por:
Dr. Jaume Llibre.

Departamento de Matemáticas.
Universidad Autónoma de Barcelona.

Bellaterra, Julio de 2009.

Contenido

Introducción

Esta memoria se basa en el estudio de las curvas algebraicas invariantes de los campos de vectores polinomiales en el plano.

Está dividida en dos capítulos. En el primero se utilizan las curvas algebraicas invariantes para estudiar la integrabilidad de Darboux de un campo de vectores polinomial. En el segundo las curvas algebraicas invariantes son utilizadas para controlar el número de ciclos límites algebraicas que un campo polinomial de grado n con hipótesis genéricas pueda tener.

Recordemos que para campos vectoriales bidimensionales la existencia de una integral primera determina completamente su retrato de fase. Los campos vectoriales planos más simples que tienen una integral primera son los Hamiltonianos. Los campos vectoriales planos integrables que no son Hamiltonianos son, en general, muy difíciles de detectar. Así, en el Capítulo 1 estudiamos la existencia de integrales primeras para campos vectoriales polinomiales planos a través de la Teoría Darbouxiana de integrabilidad. Este tipo de integrabilidad de sistemas polinomiales proporciona una relación con el número de curvas algebraicas invariantes que ellos tienen. Para esto presentamos en este capítulo algunos elementos que nos permiten abordar el tema de integrabilidad como son el concepto de integral primera, factor integrante, curva invariante y el método de Darboux que nos permite determinar integrales primeras de sistemas polinomiales no Hamiltonianos.

Definamos un *sistema diferencial polinomial plano de grado n* de la forma

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y)$$

con x, $y \in \mathbb{C}$ y $P, Q \in \mathbb{C}[x, y]$. Para estos sistemas queremos estudiar la integrabilidad de Darboux, esto es, el sistema se dice que es *Darboux integrable* si tiene una integral primera o un factor integrante dado por una función de Darboux. Al finalizar el capítulo ilustramos este método con algunos ejemplos y presentamos una aplicación de esta teoría para la demostración del teorema de clasificación de centros de sistemas cuadráticos.

En el capítulo 2 introducimos el concepto de ciclo límite de un campo vectorial plano como una órbita periódica que está aislada en el conjunto de todas las órbitas periódicas del campo. Más precisamente nos interesan los ciclos límites algebraicos, esto es ciclos límites que están contenidos en una curva algebraica irreducible. De este modo llegamos a tratar una versión más simple de la segunda parte del Problema 16 de Hilbert, la cual está dada por: *¿Existe una cota superior sobre el número de ciclos límites algebraicos de cualquier campo vectorial polinomial real de grado n?* El problema 16 de Hilbert para ciclos límites arbitrarios ha sido uno de los principales problemas en la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales planas durante el siglo XX. Aquí presentamos una solución a esta cuestión restringida a los ciclos límites algebraicos para los campos vectoriales polinomiales de grado n que tienen todas sus curvas algebraicas invariantes reales genéricas. Así, probamos que el número máximo de ciclos límites algebraicos de estos campos es a lo más $1+(n-1)(n-2)/2$ si n es par, y $(n-1)(n-2)/2$ si n es impar. Además, presentamos algunas conjeturas sobre el número de ciclos límites algebraicos que un campo vectorial polinomial cuadrático, cúbico, y en general, de grado n pueden tener.