Generalizaciones de la teoría de integrabilidad de Darboux para campos de vectores polinomiales

Yudy Marcela Bolaños Rivera

Departamento de Matemáticas.
Universidad Autónoma de Barcelona.

Directores:
Dr. Jaume Llibre
Dra. Claudia Valls

Mayo de 2013.

Contenido

1	Introducción	1
1.1	Integrales primeras racionales para campos de vectores polinomiales sobre hipersuperficies regulares algebraicas de $\mathbb{R}^{n+1}$. . .	1
1.2	Sobre el número de esferas n -dimensionales invariantes en campos vectoriales polinomiales de $\mathbb{R}^{n+1}$	8
1.3	Sobre el número de cónicas invariantes de campos vectoriales polinomiales definidos en una cuádrica	11
1.4	Integrales primeras Liouvillianas para sistemas cuadráticos con una silla integrable	12
1.5	Retratos de fase de los sistemas cuadráticos Lotka–Volterra con un invariante Darboux en el disco de Poincaré	17
1.6	Referencias	21
2	Integrales primeras racionales de campos vectoriales polinomiales sobre hipersuperficies regulares algebraicas de $\mathbb{R}^{n+1}$	25
2.1	Conceptos básicos	27
2.2	Resultados preliminares	28
2.3	Extensión del resultado de Jouanolou	32
2.4	Cuando Ω es una cuádrica o un 2-toro	36
2.5	Algunas superficies algebraicas Ω	37
2.5.1	Cúbica de Fermat	37
2.5.2	Superficie de Clebsch	38
2.5.3	Superficie de Goursat	38
2.5.4	Superficie Racor	39
2.6	Referencias	41
3	Sobre el número de esferas n-dimensionales invariantes en campos vectoriales polinomiales de $\mathbb{R}^{n+1}$	43
3.1	Hipersuperficie algebraica extáctica	44
3.2	Hiperplanos invariantes	45
3.3	Esferas invariantes	46
3.3.1	Circunferencias invariantes	46
3.3.2	Esferas invariantes	51
3.4	Referencias	55

4	Sobre el número de cónicas invariantes de campos vectoriales polinomiales definidos en una cuádrlica	57
4.1	Conceptos preliminares	58
4.2	Cilindro Parabólico	60
4.2.1	Rectas invariantes	60
4.2.2	Parábolas invariantes	63
4.3	Cilindro Elíptico	65
4.3.1	Rectas invariantes	65
4.3.2	Elipses invariantes	68
4.4	Cilindro Hiperbólico	70
4.4.1	Rectas invariantes	70
4.4.2	Hipérbolas invariantes	73
4.5	Cono	75
4.5.1	Cónicas degeneradas invariantes	75
4.5.2	Cónicas no degeneradas invariantes	77
4.6	Hiperboloide de una hoja	80
4.6.1	Rectas invariantes	81
4.6.2	Cónicas no degeneradas invariantes	85
4.7	Paraboloide hiperbólico	86
4.7.1	Rectas invariantes	87
4.7.2	Cónicas no degeneradas invariantes	90
4.8	Paraboloide elíptico	93
4.8.1	Cónicas no degeneradas invariantes	94
4.8.2	Cónicas degeneradas invariantes	97
4.9	Elipsoide	98
4.9.1	Circunferencias invariantes	98
4.9.2	Cónicas degeneradas invariantes	101
4.10	Hiperboloide de dos hojas	102
4.10.1	Cónicas no degeneradas invariantes	103
4.10.2	Cónicas degeneradas invariantes	104
4.11	Referencias	107
5	Integrales primeras Liouvillianas para sistemas cuadráticos con una silla integrable	109
5.1	Sillas integrables	110
5.2	Factores integrantes inversos polinomiales	111
5.3	Integrales primeras Liouvillianas	113
5.4	Referencias	119
6	Retratos de fase de los sistemas cuadráticos Lotka–Volterra con un invariante Darboux en el disco de Poincaré	121
6.1	Sistemas Lotka–Volterra con un invariante Darboux	122
6.2	Caracterización de los sistemas Lotka–Volterra con un invariante Darboux	124
6.3	La compactificación de Poincaré	125

6.4	Separatrices y regiones canónicas	126
6.5	Sobre la clasificación de sistemas diferenciales cuadráticos homogéneos reales bi-dimensionales	127
6.6	Retratos de fase globales del sistema Lotka–Volterra (6.6) con un invariante Darboux	129
6.7	Retratos de fase globales de los sistemas Lotka–Volterra (6.7) con un invariante Darboux	136
6.8	Referencias	151