

EL PROBLEMA DEL CENTRE-FOCUS

J. Chavarriga, I.A. García i J. Giné
Universitat de Lleida.

1. INTRODUCCIÓ ALS SISTEMES D'EQUACIONS DIFERENCIALS PLANS.

1.1. Generalitats i conceptes preliminars.

Anomenem *sistema autònom pla* o també *camp vectorial pla* un sistema d'equacions diferencials de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) , \quad (1)$$

on $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ i el punt denota derivació respecte a la variable independent real t , és a dir $\dot{\cdot} = \frac{d}{dt}$, essent $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplicació de classe $\mathcal{C}^1$.

Anomenem *espai de les fases* al pla $x - y$. El *retrat de fase* del sistema (1) és el conjunt de les corbes solució (també anomenades *òrbites*) $(x(t), y(t))$ en l'espai de les fases $\mathbb{R}^2$.

Anomenem $\mathbf{x}_0$ *punt crític* del sistema (1) si verifica $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

El sistema (1) es diu *polinomial de grau n* si els components de $\mathbf{f}$ són polinomis de grau n en les variables reals x, y . Així, un sistema polinomial de grau n s'escriurà de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_n(x, y) , \\ \dot{y} &= Q_n(x, y) . \end{aligned}$$

Certs sistemes posseeixen característiques especials tals com simetries o lleis de conservació, les quals ens faciliten una investigació analítica del sistema.

Anomenem *integral primera* o *constant del moviment* del sistema (1) en un subconjunt $U \subset \mathbb{R}^2$ a una funció $H : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ no constant en U si la funció H és constant sobre qualsevol solució $(x(t), y(t))$ amb valor inicial $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, és a dir $H(x(t), y(t)) = H(x_0, y_0)$ per a tot t per al qual la solució estigui definida.

Si existeix la funció $H(x, y)$, diem que el sistema és *integrable* en U .