ÍNDICE Y MULTIPLICIDAD

Anna Cima ⁽¹⁾, Armengol Gasull⁽²⁾ y Joan Torregrosa ⁽²⁾

- (1) Departament de Matemàtica Aplicada II, E. T. S. d'Enginyers Industrials de Terrassa, Universitat Politècnica de Catalunya, Colom, 11. 08222 Terrassa. Barcelona, Spain.
- (2) Departament de Matemàtiques, Edifici C, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra, Barcelona, Spain.

Abstract

Dado un cero de una aplicación analítica f de $\mathbb{R}^n$ en si mismo, Eisenbud y Levine dan una cota para el índice de f en este punto a partir de su multiplicidad. En este trabajo se demuestra que esta cota es óptima para el caso $n = 2$, y que se puede mejorar para dimensión superior.

1 Introducción

Sea $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ una aplicación suficientemente derivable, tal que $f(0) = 0$ y con el origen aislado en $f^{-1}(0)$. Entonces, el índice de f en este cero, se puede calcular como la suma de los signos del Jacobiano de f en todas las antiimágenes de un valor regular de f próximo al origen. La multiplicidad, $\mu_0[f]$, es el número de antiimágenes complejas de un valor regular próximo a 0.

En 1977, Eisenbud y Levine [EL], prueban las siguientes relaciones entre el índice y la multiplicidad de una aplicación f en el origen,

$$\begin{aligned} |\text{ind}_0[f]| &\leq (\mu_0[f])^{1-\frac{1}{n}}, \\ \text{ind}_0[f] &\equiv \mu_0[f] \pmod{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Conocidas estas dos relaciones, surge la siguiente pregunta: Fijada la dimensión, para cada valor $\mu = \mu_0[f]$, ¿que valores puede tomar el índice de f en el origen?

En el caso $n = 2$, el siguiente Teorema, responde a la pregunta formulada.

Teorema 1.1 *Para cada par de valores $\mu \in \mathbb{N}$ y $i \in \mathbb{Z}$ que satisfacen las condiciones $|i| \leq \sqrt{\mu}$ y $i \equiv \mu \pmod{2}$, existe una aplicación diferenciable $f : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que $\mu_0[f] = \mu$ y $\text{ind}_0[f] = i$.*