

SYMMETRIES OF HOMOGENEOUS COSMOLOGIES

S. Cotsakis¹, P.G.L. Leach² and H. Pantazi³

Laboratory for Geometry, Dynamical Systems and Cosmology (GEODYSYC)
Department of Mathematics, University of the Aegean, Karlovassi 83 200, Greece

Received 1 October 1998

Received in final form 17 December 1998

We reformulate the dynamics of homogeneous cosmologies with a scalar field matter source with an arbitrary self-interaction potential in the language of jet bundles and extensions of vector fields. In this framework, the Bianchi—scalar field equations become subsets of the second Bianchi jet bundle, J^2 , and every Bianchi cosmology is naturally extended to live on a variety of J^2 . We are interested in the existence and behaviour of extensions of arbitrary Bianchi-Lie and variational vector fields acting on the Bianchi variety and accordingly we classify all such vector fields corresponding to both Bianchi classes A and B . We give examples of functions defined on Bianchi jet bundles which are constant along some Bianchi models (first integrals) and use these to find particular solutions in the Bianchi total space. We discuss how our approach could be used to shed new light to questions like isotropization and the nature of singularities of homogeneous cosmologies by examining the behaviour of the variational vector fields and also give rise to interesting questions about the ‘evolution’ and nature of the cosmological symmetries themselves.

PACS: 98.80.Hw, 02.30.Hq

Симметрии однородных космологических моделей

С. Коцакис, П.Г.Л. Лич, Х. Пантази

Динамика однородных космологических моделей с источником в виде скалярного материального поля с произвольным потенциалом самодействия переформулируется на языке расслоений струй и продолжений векторных полей. В этом формализме система уравнений Бьянки — скалярного поля становятся подсистемой второго расслоения струй Бьянки, J^2 , а каждая модель Бьянки естественно продолжается на многообразии J^2 . Нас интересует существование и поведение продолжений произвольных векторных полей Бьянки—Ли и вариационных векторных полей, действующих на многообразии Бьянки; соответственно, проводится классификация всех таких векторных полей, соответствующих обоим классам Бьянки, A и B . Даны примеры функций, определенных на расслоениях струй Бьянки, которые являются постоянными на некоторых моделях (первыми интегралами); эти функции используются для получения конкретных решений в полном пространстве Бьянки. Обсуждается возможное использование данного подхода для выяснения таких вопросов как изотропизация и характер сингулярностей однородных космологических моделей. Для этого исследуется поведение вариационных векторных полей; кроме того, обсуждается “эволюция” и природа самих космологических симметрий.

1. Introduction

An Equivalence Problem asks whether two geometric objects (e.g., manifolds, metrics, differential equations, Lagrangians, cosmological models etc) are the same under a suitable change of variables. Symmetries of a geometric object are defined as *self-equivalences* of the object and the determination of the symmetry *group* of an object is a special case of the general equivalence problem. Two equivalent geometric objects have

isomorphic symmetry groups and, indeed, symmetry plays a central role in equivalence since if the symmetry groups of two objects are not isomorphic (e.g., of different dimensionality), the objects cannot be equivalent.

There are two main approaches to Symmetry Theory or Equivalence Problems, that of Sophus Lie and that of Élie Cartan. Lie’s approach originally attempted to classify all possible Lie groups of transformations on one- or two-dimensional manifolds and has recently attracted a lot of attention [1], especially the newly significant role it plays in problems of differential equations and variational calculus. On the other

¹e-mail: skot@aegean.gr

²e-mail: leach@math.aegean.gr

³e-mail: hpant@aegean.gr