ECUACIONES EN DIFERENCIAS PARA COMBATIR EL VIRUS DEL ZIKA

Érika Diz Pita; Mª Victoria Otero Espinar; Óscar A. Otero Zarraquiños

email: erika.diz@rai.usc.es ; mvictoria.otero@usc.es; oscaralejandro.otero@usc.es

Universidad de Santiago de Compostela

RESUMEN

Las Matemáticas resultan imprescindibles para comprender el mundo que nos rodea. Gran parte de los fenómenos reales pueden describirse matemáticamente, siendo las ecuaciones diferenciales y en diferencias uno de los instrumentos más utilizados en la resolución de diversos problemas de la Física, Biología, Economía,... Diferentes algoritmos o procedimientos de base matemática son también de gran utilidad en nuestra vida cotidiana.

En esta comunicación pretendemos exponer una propuesta de enseñanza basada en nuestra experiencia en el proyecto MathematiCSI: Mathematical Scene Investigation, dentro del programa "Campus Científicos de Verano" organizado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, la Fundación Española para la ciencia y la Tecnología, FECYT.

Con este proyecto se pretende transmitir a los estudiantes la importancia de las matemáticas en la vida cotidiana, acercándonos a ellas de un modo distinto al habitual en las aulas. Nuestro objetivo principal es despertar en los participantes el interés y la curiosidad por las aplicaciones de las Matemáticas, y por tanto también de las matemáticas como Ciencia.

Se propone una aproximación a los conceptos de sucesión y ecuación en diferencias mediante una relación con situaciones reales vinculadas a distintos ámbitos como la Biología o las Ciencias de la Salud; así tratando problemas como el crecimiento de poblaciones de seres vivos y la propagación de enfermedades, se fomenta la interdisciplinariedad.

Para hacer todo ello más atractivo, incluiremos estos y otros conceptos matemáticos, como la criptografía, el sistema binario, la Ley de enfriamiento de Newton o el modelo de desintegración radioactiva, que se utilizarán para resolver una investigación policial ficticia, ideada por los propios alumnos, lo cual les permite alcanzar un aprendizaje significativo de los conceptos, a la par que se fomenta su creatividad y trabajo en equipo.

1. Justificación de la Propuesta de Enseñanza.

a. Introducción

En la vida cotidiana, las matemáticas aparecen para modelizar muchas situaciones de diversa naturaleza. Sin embargo, este aspecto, así como su relación con otras ciencias, como la biología o la medicina, no suele estar presente en las aulas de matemáticas de secundaria.

La modelización matemática es una herramienta que permite estudiar fenómenos de la naturaleza y, en muchas ocasiones, hace posible sustituir experimentos de laboratorio por simulaciones con ordenador.

Es por ello que nos parece de interés elaborar una propuesta de enseñanza que se apoye en la modelización matemática, descubriendo esta a los alumnos en un intento de motivar su gusto por las matemáticas.

Con este mismo objetivo de aumentar su interés por esta ciencia, se elegirá como hilo central una actividad que consiste en la resolución de una investigación policial ficticia ideada por los propios alumnos, donde se irán resolviendo diversos problemas con herramientas matemáticas. Con esto pretendemos potenciar la creatividad de los alumnos así como fomentar su capacidad de trabajo en equipo y el respeto a las opiniones e ideas de sus compañeros.

En este proyecto se pretenderá que el alumnado trabaje algunos conceptos matemáticos como sucesión, límite o ecuación en diferencias, que sirven para afianzar y completar aspectos curriculares, que en España se corresponden con los temarios de 4º de ESO y 1º de Bachillerato, ver en [5], y que también están incluidos en distintos cursos del currículum de matemáticas en Argentina, ver en [6].

Se recurrirá al uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) para la resolución de ecuaciones en diferencias y diferenciales y la representación de gráficas que faciliten la comprensión e interpretación de los resultados. En esta propuesta se emplea el software de cálculo simbólico MAPLE y MATLAB, aunque se podrían adaptar los programas utilizados a cualquier otro software libre. Además se emplearán dichos recursos TIC para la búsqueda de información que dote de la mayor verisimilitud posible a nuestra historia.

Todo esto nos ayuda a conseguir una mayor autonomía en el trabajo por parte del alumnado, potenciando así un aprendizaje significativo de los conceptos trabajados y una aplicación de los mismos a problemas reales y actuales, sobre todo relativos al campo de la salud y biológicos.

Además, el proyecto termina con la exposición por parte de los alumnos del trabajo elaborado. Esto contribuye notablemente a la adquisición de las competencias básicas, fundamentalmente la comunicación lingüística.

b. Objetivos de la propuesta de enseñanza

El objetivo general de esta propuesta de enseñanza es que los estudiantes aprendan de forma significativa el concepto de ecuación en diferencias y sus aplicaciones en la modelización de situaciones de la vida real, en particular en el campo de la biología y ciencias de la salud.

Los objetivos específicos que deberán alcanzar los estudiantes durante el desarrollo de la propuesta son los que se citan a continuación:

- Fomentar la búsqueda de patrones o códigos matemáticos en diversos escenarios de la vida real, percibiendo así la importancia de las matemáticas en múltiples aspectos de la vida cotidiana.
- Formular y resolver modelos matemáticos simples, que se adecuen a un determinado fenómeno real.
- Conocer algunos tipos de modelos continuos y discretos: modelos de poblaciones, modelo de desintegración radiactiva, de enfriamiento...
- Desarrollar la habilidad e imaginación para construir modelos matemáticos que se ajusten a estudios de tipo biológico u otros contextos, fomentando así la interdisciplinariedad.
- Conocer códigos sencillos del campo de la criptografía y la genética.
- Impulsar el uso de la Tecnología de la Información y la Comunicación (TIC) como herramienta para la resolución de sistemas de ecuaciones en diferencias y la elaboración de gráficas para la comprensión de los resultados, mediante el uso de programas de cálculo simbólico adecuados.
- Potenciar el trabajo en equipo, el respeto a los demás y el sentido de la iniciativa.
- Aplicar las técnicas descritas a algunos casos prácticos de modo que se puedan realizar deducciones de interés en la investigación de un delito.
- Potenciar las sensibilidades sociales y cívicas, la comunicación lingüística y el resto de competencias básicas.

Como objetivo final se pretende que el alumnado consolide los conocimientos adquiridos sobre las ecuaciones en diferencias, mejorando la capacidad de trabajo en equipo y potenciando su capacidad creativa.

2. Desarrollo del proyecto

a. Contexto

La actividad que presentamos lleva diez años realizándose dentro de un proyecto organizado por la FECYT, denominado “Campus Científicos de Verano”, para el cual se presentan diversas propuestas de 16 Campus de Excelencia españoles que son evaluadas y seleccionadas cada año.

Durante el mes de julio, en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela, cada semana recibimos a ocho alumnos procedentes de diversos lugares de toda España, que son seleccionados mediante criterios académicos por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

El alumnado de las dos primeras semanas son estudiantes de 1º de Bachillerato, mientras que los de las dos semanas siguientes son de 4º de ESO. Partimos de un proyecto común, que será el que explicaremos a continuación, e iremos realizando las adaptaciones pertinentes, según el nivel del alumnado y sus conocimientos previos.

b. Metodología

El objetivo principal de la actividad es transmitir al alumnado el interés por las matemáticas, para ello pretendemos presentarlas como una herramienta que nos permite resolver múltiples problemas de la vida real.

El problema principal que se trata es la creación de un modelo matemático que estime la evolución de una población de mosquitos. Dicha población está compuesta por dos tipos de mosquitos, unos que transmiten el virus del Zika y otros mosquitos modificados genéticamente para que sean incapaces de transmitir tal enfermedad. Lo que se pretende conseguir con esto, es que al aparearse entre si los individuos de dichas poblaciones, se evolucione hacia una situación en la que se extingan los mosquitos transmisores de la enfermedad.

El citado modelo se sigue de nociones básicas de genética, probabilidad y sucesiones para lo cual realizaremos, en función al nivel previo del alumnado, una introducción más o menos profunda para que adquieran los conceptos necesarios.

Además, se tratan otros problemas como la Ley del enfriamiento de Newton o el modelo de desintegración radioactiva (ecuaciones diferenciales sencillas), los cifrados criptográficos de César y Vigenère, un problema matemático relacionado con el juego de las torres de Hanói y algunos problemas más, que pueden ir variando en función de la evolución del proyecto y de las posibles propuestas que realicen los alumnos.

Asimismo, los alumnos emplearán los ordenadores (para realizar esta actividad sería recomendable disponer de un aula dotada de equipos informáticos) dada su utilidad a la hora de resolver algunos de los citados modelos o problemas.

Finalmente, dado que los alumnos deberán defender en una presentación el trabajo realizado, se envolverán los anteriores problemas matemáticos dentro de una historia relativa a una investigación policial, que pretende resolver un delito, con el objetivo de que resulte atractivo al público y que los alumnos perciban el interés y la utilidad de las matemáticas en la vida real.

Para una explicación más detallada de nuestra propuesta de enseñanza, procederemos a continuación a exponer algunas de las actividades fundamentales que se llevarían a cabo.

1. Mosquito transmisor del virus del Dengue y del Zika

El mosquito Aedes aegypti es el transmisor del Dengue y el Zika, entre otras enfermedades. Como la transmisión de las mismas será uno de los ejes centrales del proyecto, parece necesario realizar una primera aproximación a ellas, en particular nos centraremos en el virus del Zika. Es probable que gran parte del alumnado haya oído hablar del virus del Zika últimamente, debido a que desde el 2016 cobró cierto protagonismo en los medios de comunicación con motivo de la aparición de los primeros casos en Europa, así como por el temor y la renuncia de muchos deportistas a participar en los Juegos Olímpicos de Río de Janeiro, por miedo a contraer la enfermedad.

A pesar de ello, para tener una visión más objetiva sobre la enfermedad, los estudiantes deberán buscar información en Internet, libros y revistas. Se espera que tras esta revisión bibliográfica los alumnos tengan un conocimiento sobre cuestiones relativas a la enfermedad como: contagio, síntomas, datos sobre la evolución de la enfermedad, distribución geográfica de los infectados, posibles métodos de prevención o erradicación de la enfermedad, etc.

2. Criptografía

Esta actividad se plantea como un complemento a la historia principal, que creemos que resulta atractiva para los alumnos, ya que debido a su edad, la elaboración de mensajes ocultos es algo que despierta su curiosidad.

En nuestro caso, la intercepción de un mensaje cifrado puede servir como punto de partida para la investigación policial que centra nuestra historia.

Antes de iniciar la tarea de codificación y descodificación de mensajes concretos, sería conveniente realizar una introducción histórica a la criptografía, así como presentar distintos tipos de cifrados y como han ido evolucionando, relacionándolos con importantes acontecimientos históricos, como fue por ejemplo la victoria del bando de los Aliados en la Segunda Guerra Mundial. Para ello se puede hacer uso del tráiler de la conocida película "Descifrando Enigma", que puede verse en [7].

Para trabajar con ejemplos concretos de métodos de cifrado, introduciremos primero el cifrado César y a continuación el cifrado Vigenère.

El cifrado César, que recibe este nombre en honor al famoso emperador romano Julio César (s. I a.C.), es el sistema de cifrado más sencillo. Es un tipo de cifrado en el que cada letra en el texto original es reemplazada por otra que se encuentra un número fijo de posiciones más adelante en el alfabeto, dicho número es lo que se conoce como clave. Tras explicar a los alumnos el funcionamiento del sistema, con intención de hacer más dinámica la actividad, y que los alumnos se sientan más partícipes de la misma, les proponemos que se envíen entre ellos mensajes cifrados y traten de descifrarlos, poniendo así de manifiesto las debilidades de este sistema y la necesidad de buscar un tipo de cifrado más seguro.

Después de debatir con ellos sobre posibles mejoras que se podrían aplicar a este sistema de cifrado, introduciremos el cifrado Vigenère (s. XIX) que se consideró durante mucho tiempo como un método irrompible, aunque hoy en día existen métodos de cifrado mucho más seguros.

Este sistema es una mejora natural del cifrado César. En este caso, en lugar de tener una clave fija para todas las letras del mensaje, se considera una clave vectorial de modo que para codificar la primera letra se usa la primera componente de la clave (dada por una cifra o letra) y así sucesivamente hasta terminar con la longitud de la clave, a continuación se vuelve a cifrar utilizando la primera componente de la misma hasta terminar el mensaje; esto aumenta su eficacia significativamente.

De nuevo se propone trabajar con los ejemplos anteriores, analizando las dificultades que surgen en este caso para descifrar los mensajes.

Tras esta breve introducción a la criptografía, planteamos la actividad en cuestión. Se les proporciona un texto cifrado con el sistema de Vigenère y el inicio del mensaje original, información a partir de la cual deben extraer la clave empleada en el cifrado.

A continuación, los alumnos dispondrán de programas elaborados por el profesorado de la actividad en el programa Maple, en los cuáles, una vez introducida la clave y el mensaje cifrado, pueden obtener de forma inmediata el mensaje original.

3. Sucesiones y modelos de población

Para ir acercándonos al modelo poblacional en el cual se centrará el proyecto, comenzamos modelizando matemáticamente la reproducción celular de bacterias, lo cual nos servirá para introducir y ahondar en algún concepto matemático como el de sucesión, ecuación en diferencias y solución de esta.

Se presentarán modelos poblacionales sencillos de dos tipos: discretos, en los cuales se emplean ecuaciones en diferencias, y continuos, basados en ecuaciones diferenciales; que sirven para estudiar la evolución de poblaciones de seres vivos.

En el caso de los alumnos que desconozcan la noción de derivada de una función (como es el caso los alumnos de 4º de ESO), se debe dedicar parte del tiempo a introducirla pues es necesaria para trabajar este último tipo de modelos.

En general debemos tratar de justificar cada uno de los modelos identificando los factores que intervienen en él como por ejemplo, las tasas de mortalidad, de reproducción, competitividad o las limitaciones que presenta el medio, remarcando las carencias de cada uno y los posibles factores que no se tienen en cuenta.

Algunos de los ejemplos particulares que se pueden tratar son el modelo exponencial o de Malthus, en el cual la población crece ilimitadamente debido a que no se tienen en cuenta las limitaciones del medio, y el modelo logístico o de Verhulst, en el que se restringe el crecimiento de la población al tener en cuenta la capacidad de carga. Por otra parte, el modelo de Lokta-Volterra, que viene dado por un sistema de ecuaciones diferenciales y representa la interacción entre dos poblaciones.

4. Ley de enfriamiento de Newton

Otro tipo de problema que creemos que puede ser de interés para el alumno y que puede tener fácil cabida en la trama de la investigación policial es la Ley de enfriamiento de Newton. Esta ley física nos dice que la rapidez con que se enfría un cuerpo es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio ambiente. Se utiliza, por ejemplo, para determinar la hora de fallecimiento de una persona, la hora de inicio de un incendio, o el momento en que se ha apagado una bombilla.

Una vez que los estudiantes eligen su historia, proceden a la búsqueda de los valores realistas que deberán utilizar en la resolución del problema, por ejemplo, el ritmo al que desciende la temperatura de un cuerpo a medida que pasa el tiempo desde su fallecimiento.

La realización de las cuentas necesarias para obtener la solución puede resultar difícil dependiendo de los conocimientos previos de los alumnos. Por ello, se puede recurrir nuevamente al programa informático Maple, que mediante el uso de comandos sencillos nos proporciona la solución buscada.

5. Modelo

Recordemos que el tema en el cual centramos el proyecto es la introducción de un modelo poblacional en el que intervienen dos tipos de mosquitos, los transmisores del Zika y los transgénicos, que han sido modificados genéticamente para evitar la transmisión del virus.

En nuestro modelo tendremos entonces dos poblaciones: los mosquitos autóctonos, que son los que transmiten el Zika y que denotaremos x_n en la generación n-ésima, y los mosquitos transgénicos, que denotaremos y_n.

La evolución de cada una de las poblaciones la marcará la siguiente ecuación:

$$x_{n+1} = Fertilidad \cdot Supervivencia \cdot x_n$$

y la análoga para la población y_n.

La fertilidad es el número medio de hijos que produce un mosquito (hembra), y será siempre un valor mayor o igual que uno, debido a que es una especie muy invasora. Por otra parte, la supervivencia es el porcentaje de mosquitos que llegan a una edad madura, como es una función que representa una probabilidad, tomará siempre valores entre 0 y 1.

Ambas poblaciones interaccionan entre sí y, por tanto, una población influirá en las funciones de supervivencia y fertilidad de la otra. Esta es la mayor complicación de nuestro problema.

Para simplificar el modelo matemático, suponemos que los mosquitos transgénicos no tienen mejores características físicas, son idénticos a los autóctonos y, por tanto, la tasa de supervivencia es idéntica para ambas poblaciones.

Como función supervivencia tomamos la siguiente:

$$Supervivencia = e^{-d-k(x_n+y_n)}$$

donde d es la tasa de mortalidad y k la constante que representa las limitaciones del medio.

Elegimos esta función de supervivencia debido a que Bill Ricker (s. XX) probó experimentalmente que dicha función se ajustaba correctamente a la supervivencia de determinadas poblaciones.

Para explicar la función de fertilidad tenemos que tener en cuenta diferentes conceptos previos como la regla de Laplace, que sirve para calcular la probabilidad de elegir un mosquito de un tipo determinado entre el total.

Si suponemos que el número de encuentros por unidad de tiempo e individuo, $C(x_n + y_n)$, es constante, y tenemos en cuenta las leyes de Mendel, que son conocidas por los alumnos dado de que se estudian en Biología, ver [5], se obtienen unas constantes, relacionadas con el tipo de descendencia que generan los encuentros entre distintos tipos de mosquitos.
Aunque de los cruces entre dos mosquitos autóctonos, pueden nacer en principio mosquitos transgénicos, supondremos que estos no van a alcanzar la edad adulta debido a problemas genéticos. Lo mismo puede decirse de los cruces entre mosquitos transgénicos y descendientes autóctonos.

Consideraremos por tanto que del cruce entre mosquitos autóctonos se obtienen solo mosquitos autóctonos, en una proporción que denotamos por la constante r ; análogamente para el cruce de mosquitos transgénicos, en cuyo caso se obtienen solo mosquitos transgénicos en una proporción u. Sin embargo, del cruce entre mosquitos autóctonos y mosquitos transgénicos pueden nacer tanto mosquitos autóctonos, cuya tasa denotaremos s, como mosquitos transgénicos, en una proporción t.

Si esas constantes las multiplicamos por $C(x_n + y_n)$ obtenemos unas nuevas, que estarán presentes en el modelo final: $a_{1,} a_{2,} b_{1,} b_2$.

Por tanto el modelo final viene dado por el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias, cuya solución serán dos sucesiones.

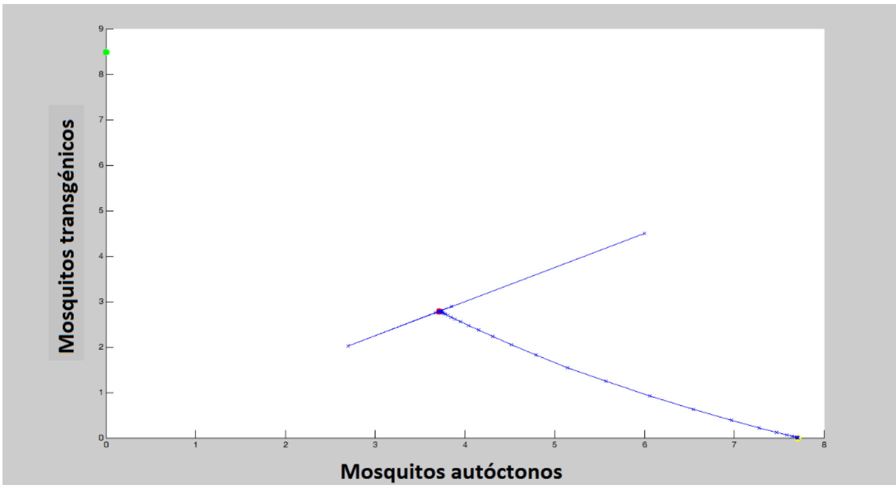
$$x_{n+1} = \frac{a_1 x_n + b_1 y_n}{x_n + y_n} \, x_n \, e^{-d-k(x_n+y_n)}$$

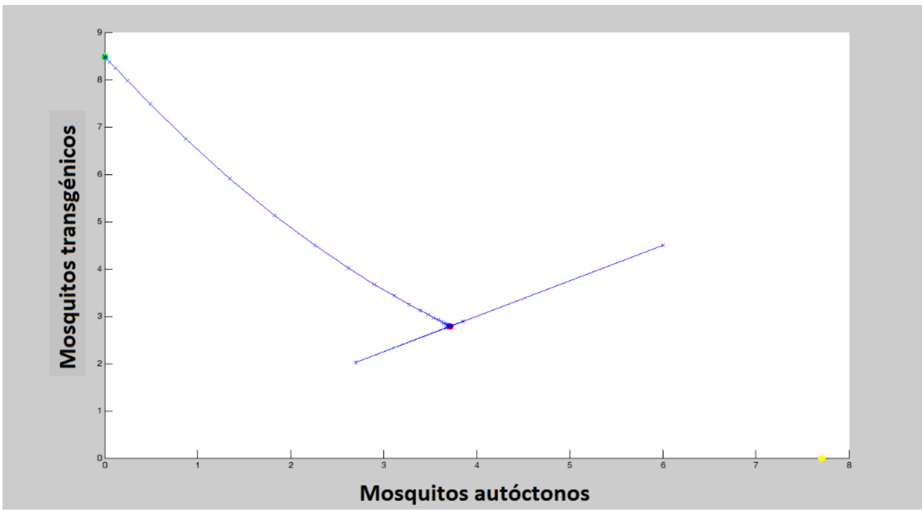
$$y_{n+1} = \frac{a_2 x_n + b_2 y_n}{x_n + y_n} \, y_n \, e^{-d-k(x_n+y_n)}$$

Uno de los elementos clave en este punto es el uso del software matemático MATLAB. Empleamos esta herramienta para realizar los cálculos necesarios en el modelo y para estimar el estado de la población después de que hayan pasado un número determinado de generaciones. La representación gráfica de este estado de la población permite que los alumnos comprendan más intuitivamente los diferentes tipos de comportamiento que puede mostrar el sistema. Pueden observar que, en función de la cantidad inicial de mosquitos transgénicos que se liberen, el resultado final puede ser la extinción de los mosquitos transmisores del Zika o la extinción de los mosquitos transgénicos. Todas las constantes que aparecen en el modelo han sido fijadas en base a criterios experimentales, así como el número de mosquitos autóctonos. De este modo, lo único que tienen que modificar los alumnos es el número de mosquitos transgénicos que se liberan.

Nuestro objetivo es lograr la extinción de los mosquitos transmisores del virus. Por tanto, la actividad que se propone a los alumnos es que obtengan, mediante la experimentación con los programas informáticos, el menor número posible de mosquitos transgénicos que hay que liberar para conseguir la extinción de los autóctonos, dejando un margen de error razonable puesto que el modelo no es exacto. Esto se justifica también debido a que la creación de estos mosquitos tendría un coste, y, en una posible aplicación real, se buscaría minimizar los gastos.

Se puede ver en las gráficas siguientes como si tenemos una población con 6000 mosquitos infectados con el virus del Zika o autóctonos, soltar 4500 mosquitos transgénicos no sería suficiente, ya que con esa cantidad prevalecería la población de mosquitos autóctonos; sin embargo, con un mosquito más, la situación se invierte y la población que se extingue sería la de mosquitos autóctonos.





6. Otros problemas

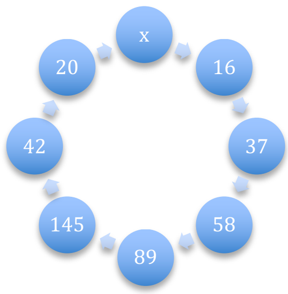
Con el objetivo de que la historia incluya más actividades matemáticas de diverso tipo, dispondremos de una serie de problemas que nos parecen útiles e interesantes para reforzar la asimilación de los conceptos tratados. Además, les daremos la oportunidad de aportar otros problemas que conozcan y que les hayan resultado interesantes, que puedan relacionarse, en cierta medida, con los contenidos trabajados en el proyecto o, en su defecto, con contenidos que se ajusten al currículum de sus respectivos niveles educativos.

Dentro de nuestra colección de problemas destacamos los siguientes:

El problema de las "Torres de Hanói", que consiste en: dados tres soportes verticales, pasar una serie de discos ordenados de mayor a menor radio, que se encuentran apilados en una de ellas, a otra, sin infringir las dos normas básicas del juego, que son: solo se puede mover un disco a la vez, y no se puede poner un disco sobre otro de radio menor.
Desde un punto de vista matemático, se puede plantear el problema como una ecuación en diferencias, cuya solución nos proporciona el número mínimo de movimientos para lograr el objetivo del juego, y viene dada por la expresión $2^n - 1$, siendo n el número de discos.

Otro posible problema sería el de "La cifra oculta en el factorial", que fue propuesto por un alumno, y que consiste en: dada la expresión decimal del factorial de un número cualquiera, en la cual se ha ocultado una cifra, ¿cómo podemos obtener dicha cifra, sin hacer el cálculo explícito del factorial? Para su resolución se emplean los criterios de divisibilidad, que se suponen conocidos desde 2º de ESO. [5]

También podemos plantear actividades que se basen en la obtención del término general de una sucesión, como por ejemplo el "Problema del círculo", que nuevamente surgió a raíz de la curiosidad que había despertado en un alumno su resolución, y que planteamos en el gráfico siguiente:



La resolución del problema sería $x = 4$, ya que el número de un círculo viene dado por la suma de los cuadrados de las cifras del círculo anterior.

Por último, puede resultar útil e interesante introducir el sistema de numeración binario. Para su explicación teórica nos apoyamos en el vídeo que puede verse en [8] y, como aplicación recreativa, se puede plantear el juego del Nim, el cual presenta una estrategia ganadora que se basa en dicho sistema. Para más información véase [9].

7. Elaboración de la historia y exposición

Como ya se había indicado, el objetivo es introducir todo el contenido trabajado a lo largo de las distintas sesiones en una única historia con tintes policíacos. Para ello dedicaremos al menos una sesión a la construcción de la historia por parte del alumnado, al mismo tiempo que se va elaborando una presentación en el formato que los alumnos prefieran (Prezi, Power Point, …) .

En dicha exposición todo los alumnos tendrán que intervenir explicando alguno de los conceptos o problemas que se incluyen en la historia, buscando con esto que todo el mundo se sienta partícipe de la misma, a la vez que se pierde el miedo escénico a hablar en público y se potencia la comunicación lingüística, una de las competencias básicas que aparecen recogidas en la actual Ley de Educación [5].

Se realizarán varios ensayos previos a la exposición final con el fin de pulir ciertos aspectos, tanto formales como académicos, y que los alumnos refuercen su autoconfianza.

3. Conclusiones

La propuesta expuesta anteriormente ha sido llevada a la práctica durante diez años dentro del proyecto "Campus Científicos de Verano". Nuestra intención es seguir realizando dicha propuesta, incorporando nuevos contenidos y vinculando los ya existentes a nuevos problemas que puedan surgir en nuestra sociedad, como se hizo previamente al incorporar el problema de propagación del virus del Zika, cuando este se convirtió en un tema de actualidad.

La parte práctica de esta propuesta no se ha desarrollado en un aula de matemáticas usual en secundaria, si no que el alumnado participante había pasado un proceso selectivo en función de su expediente académico y además, en cada clase había ocho alumnos, es decir, un número mucho más reducido que el de un aula habitual de secundaria.

Sin embargo, creemos que la propuesta podría adaptarse a otras situaciones. En este caso disponíamos de tan solo una semana con cada grupo de alumnos y las clases se desarrollaban de manera intensiva. Transmitir todos estos contenidos en una semana a una clase usual de secundaria no sería viable, pero podría prolongarse el proyecto a lo largo de todo el curso académico, presentando los contenidos de un modo más progresivo, permitiendo que todos los alumnos, y no solo los más aventajados, pudiesen asimilar y comprender los nuevos conceptos y disfrutar con esta experiencia.

Sin duda, creemos que esta propuesta resulta interesante por combinar muchos elementos y procedimientos propios de la actividad matemática a los que en muchas ocasiones no se da la suficiente importancia en las aulas. Con estas actividades conseguimos ayudar al alumnado a desarrollar sus capacidades de abstracción y creatividad, al mismo tiempo que se fomenta su interés por las matemáticas.

4. Referencias

[1] Fernández,C.; Vázquez, F.J.; Vegas, J.M. (2003): Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Ed. Thomson. Madrid (España).

[2] Larson, Ron, Hostetller, Robert P., Cálculo Vol.I, 8ª Edición, McGraw-Hill, 2005.

[3] R. Kent Nagle, Edward B. Saff, Fundamentos de ecuaciones diferenciales, 2ª ed, Argentina: Addison – Wesley Iberoamericana, 1992.

[4] Simmons, George F., Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas, 2ª ed, Madrid: McGraw-Hill, 1999.

[5] Ley orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE). BOE. Madrid. (España).

[6] www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/media/programa_matematica.pdf

Otras referencias

[7] Tráiler de la película Descifrando Enigma, Recuperable en el link https://www.youtube.com/watch?v=TNh-SR_l3-8 [consultado en septiembre de 2017]

[8] El código Binario - Explicación, Eduardo Sáenz de Cabezón, Recuperable en el link https://www.youtube.com/watch?v=f9b0wwhTmeU[consultado en septiembre de 2017]

[9] http://www.dma.fi.upm.es/recursos/aplicaciones/matematica_discreta/web/aritmetica_modular/nim.html [consultado en septiembre de 2017]

Agradecimientos

Este proyecto ha sido realizado con la colaboración de, entre otros, Beatriz Álvarez, Sebastián Buedo, Daniel Cao, Laura Davila, Jorge Losada, Lorena Saavedra y Ricard Trinchet.

Ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, la Fundación Española para la ciencia y la Tecnología, FECYT.