FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Máster

Dinámica de una clase de sistemas Lotka-Volterra de dimensión 3

Érika Diz Pita

2017/2018

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice general

Resumen

Las ecuaciones diferenciales, y en particular las ecuaciones de Lotka-Volterra, tienen importantes aplicaciones que abarcan desde la biología, ámbito en el cual se formularon, a la astronomía o la economía.

La dinámica cualitativa de los sistemas Lotka-Volterra en dimensión tres únicamente ha sido estudiada para algunos sistemas Lotka-Volterra muy particulares. El objetivo de este trabajo es extender el estudio de esta dinámica a dos nuevas familias de sistemas Lotka-Volterra en dimensión tres.

Y más concretamente, de cara a un estudio futuro de la dinámica global de estos sistemas, en este trabajo realizaremos el estudio de la dinámica local en las singularidades.

En primer lugar, la Teoría de la integrabilidad de Darboux permitirá obtener una caracterización del problema mediante dos sistemas Kolmogorov. Posteriormente, la compactificación de Poincaré permitirá realizar un estudio detallado del comportamiento de las órbitas que van o vienen del infinito.

En este trabajo se obtienen todas las singularidades del primer sistema Kolmogorov, finitas e infinitas, y se realiza una clasificación que nos permite conocer cuáles de esas singularidades están presentes en cada caso, en función de los parámetros. Se estudian los posibles retratos de fase de los puntos de equilibrio, empleando diversos resultados de clasificación existentes y técnicas más avanzadas como los blow up's.

Abstract

Differential equations, and particularly Lotka-Volterra equations, have important applications that include from biology, field in which they were proposed, to astronomy or economy.

Qualitative dynamics of Lotka-Volterra systems in dimension three has been studied only for some very particular Lotka- Volterra systems. The objective of this work is to

extend the study of this dynamic to two new families of Lotka-Volterra systems of dimension three.

At first, Darboux Theory of integrability allows us to obtain a characterisation of the problem. Afterwards, Poincaré compactification will allow us to carry out a detailed study of the behaviour of the orbits which tend or come from infinity.

In the present project, all the singularities of the system, finite and infinite, are obtained. We make a classification that allows us to know which of those singularities exist in each case, depending on the parameters. We study the possible phase portraits at the singularities, using several classification results and advanced techniques like blow up's.

Introducción

El presente trabajo se encuadra en el ámbito del estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales ordinarias, que juegan un papel fundamental no solo dentro de las matemáticas, sino también en sus aplicaciones a otras ciencias, puesto que son una importante herramienta para la modelización de muchos problemas que estas presentan.

En concreto, nos centraremos en el estudio de las ecuaciones de Lotka-Volterra, que han sido empleadas para modelizar fenómenos naturales, como la evolución temporal de especies en competición [21], reacciones químicas, física de plasma [19], o hidrodinámica, así como problemas de las ciencias sociales y la economía. Además, su estudio teórico es importante dentro de las ecuaciones diferenciales.

Los sistemas Lotka-Volterra, que son ecuaciones diferenciales polinomiales de grado dos, fueron propuestos inicialmente, y de forma independiente, por Alfred J. Lotka en 1925 y por Vito Volterra en 1926, empleándolas ambos para modelizar interacciones entre especies.

Los trabajos de Lotka comenzaron en 1910, estudiando modelos muy próximos a la ecuación logística, aplicados al estudio de las reacciones químicas autocatalíticas. Una década después, en 1920, extendió esos modelos a lo que llamó sistemas orgánicos, usando como ejemplo una planta y un animal herbívoro. La aplicación al estudio de la dinámica de un sistema depredador-presa, por el que es más conocido en la actualidad, fue propuesta en 1925, en una obra dedicada a lo que hoy denominaríamos biomatemática, [20].

Por su parte, Volterra planteó el mismo modelo de manera prácticamente simultánea, en su caso, para explicar una observación hecha por su yerno, el ecologista Umberto D'Ancona, que había descubierto que durante la Primera Guerra Mundial, el número de depredadores en el mar Adriático había aumentado, y el número de presas había disminuido, lo cual parecía ser un efecto de la reducción de la pesca como consecuencia de la guerra. Para justificar este comportamiento, Volterra basó sus argumentos en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Consideró $x(t)$ e $y(t)$ como las densidades de presas y depredadores, respectivamente, y razonó sobre las tasas de crecimiento del siguiente modo: la tasa de crecimiento de las presas, $\dot{x}/x$, debería ser una función decreciente en y, que fuese positiva en ausencia de depredadores; por otra parte, la tasa de crecimiento de depredadores, $\dot{y}/y$, debería ser una función creciente en x, negativa en ausencia de presas. Con la suposición de que las funciones eran lineales, y tomando constantes positivas a, b, c y d, el modelo planteado por Volterra fue el siguiente:

$$\dot{x} = x(a - by),$$
$$\dot{y} = y(-c + dx).$$

Para este primer modelo inicial, el retrato de fase en el cuadrante positivo, única región que interesa en el caso de poblaciones, consiste en órbitas periódicas alrededor del punto de equilibrio $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (c/d, a/b)$. La media de las densidades poblacionales sobre las órbitas periódicas, coincidía con los valores de este punto de equilibrio. La disminución del parámetro a, que representa la tasa de crecimiento de presas en ausencia de depredadores, y el incremento de c, la tasa de decrecimiento de depredadores en ausencia de presas, sin afectar a los valores de b y d, tiene un efecto sobre las medias de las densidades de ambas poblaciones, que se correspondía con lo observado por D'Ancona.

La elegancia de los razonamientos de Volterra, recogidos en [25], contrasta con la simplicidad de sus ecuaciones, que son de hecho poco realistas desde diferentes puntos de vista. Por ejemplo, en ausencia de depredadores, presentan un crecimiento exponencial ilimitado para las presas.

Más adelante los sistemas Lotka-Volterra fueron generalizados y considerados en dimensión arbitraria, esto es:

$$\dot{x_i} = x_i \left(a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, ..., n.$$

Además, se fueron generalizando y multiplicando las aplicaciones de estos sistemas. En la teoría de la economía, las ecuaciones de Lotka-Volterra se aplican a numerosos problemas, y aunque su aparición inicial en este campo solía atribuirse a Richard Goodwin en su publicación de 1967, [14] , como puede verse en [15], se han encontrado aplicaciones anteriores, del año 1939, por parte del economista italiano Guiseppe Palomba, como se justifica en [13]. Aplicaciones más recientes en este ámbito pueden consultarse en [12] y [26].

En el ámbito de la hidrodinámica, véase [6] , ya en la década de los 70, se hizo evidente que los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden bajo, entre ellos los sistemas Lotka-Volterra, eran capaces de simular, al menos cualitativamente, muchos fenómenos relacionados con la transición a la turbulencia en fluidos. Esto resultó sorprendente debido al gran número de grados de libertad en un fluido, y al hecho de que las ecuaciones básicas del movimiento son ecuaciones en derivadas parciales.

Pero además, en el ámbito original en el que aparecieron, la dinámica poblacional, sus aplicaciones siguieron desarrollándose y mejorándose, pueden consultarse por ejemplo [21] o [18].

Por otra parte, Kolmogorov extendió los sistemas Lotka-Volterra a otros de grado arbitrario en [17], los cuales tienen también interesantes aplicaciones a las ciencias, como por ejemplo al estudio de los agujeros negros en cosmología. En [1] se realiza el análisis cualitativo de un sistema Kolmogorov de dimensión 3, que aparece de forma natural en el estudio de agujeros negros con un campo de Higgs, cuestión que puede consultarse con detalle en [5].

No es de extrañar, por tanto, que a lo largo de la historia, los matemáticos hayan estado interesados en el estudio de todos estos sistemas. Uno de los objetivos ha sido estudiar su integrabilidad, la cual solo resulta posible para un conjunto de parámetros muy limitado. En [7] se obtuvieron algunos casos integrables empleando una generalización del método de Carleman, que puede consultarse en [8], y extendiendo el resultado a dimensión n. En [9] se continuó con el estudio de la integrabilidad de los sistemas Lotka-Volterra en dimensión dos.

Sin duda, ante la dificultad que supone la integrabilidad, tiene especial importancia el análisis cualitativo de estos sistemas. La teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, que fue iniciada por Poincaré en [23], estudia el comportamiento de las ecuaciones diferenciales por otros medios que no sean hallar sus soluciones, y permite, empleando herramientas del análisis y la topología, resolverlas en sentido cualitativo, obteniendo información sobre sus propiedades.

Para los sistemas Lotka-Volterra en dimensión dos, D. Schlomiuk y N. Vulpe han realizado un estudio completo de la dinámica cualitativa global, clasificando todos los posibles retratos de fase en el disco de Poincaré, como se recoge en [24]. Para ello se han empleado invariantes, que hasta el momento solo se tienen para el caso de sistemas cuadráticos.

En cuanto a los sistemas Lotka-Volterra de dimensión tres, existen algunos resultados parciales para casos concretos en los que el sistema se simplifica. Por ejemplo, se han estudiado los sistemas de May-Leonard, un caso particular que presenta únicamente dos parámetros, que fue propuesto en [22] y representa la competición entre tres especies. El hecho de que este sistema presente tan solo dos parámetros, frente a los 12 que presenta un Lotka-Volterra general de dimensión tres, facilita el estudio de su dinámica global, tarea que ha sido elaborada en [4].

A pesar de la complejidad que presenta su estudio, las ecuaciones Lotka-Volterra en dimensión 3 resultan muy interesantes y tienen múltiples aplicaciones, siendo por ejemplo equivalentes a las ecuaciones diferenciales del replicador, utilizadas en teoría de juegos, y con aplicaciones a la evolución y la economía, como puede verse en [16].

Sin embargo, no se conocen resultados sobre la dinámica global en dimensión tres. Nuestro objetivo a largo plazo será estudiar la dinámica global de los sistemas Lotka-Volterra de dimensión tres que tienen una integral primera racional de grado dos de la forma $x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}z^{\lambda_3}$. Los resultados obtenidos en este trabajo constituyen una parte relevante de una futura tesis en la que se abordará el objetivo planteado.

En primer lugar, se introduce la teoría de integrabilidad de Darboux, que nos permite obtener una caracterización de los sistemas de este tipo, que se pueden clasificar en tres familias.

La primera de estas familias se reducirá, empleando su integral primera, a un sistema Lotka-Volterra de dimensión dos, y por lo tanto su estudio se remite a [24].

Las dos familias restantes se reducen a dos sistemas Kolmogorov de grado tres, con 8 parámetros cada uno de ellos, que son los siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(a_0 + a_1 x + a_2 z^2 + a_3 z), \\ \dot{z} &= z(c_0 + c_1 x + c_2 z^2 + c_3 z), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= y(b_0 + b_1 yz + b_2 y + b_3 z), \\ \dot{z} &= z(c_0 + c_1 yz + c_2 y + c_3 z). \end{aligned} \tag{2}$$

Por tanto, el objetivo antes planteado resulta equivalente al estudio de la dinámica global de estos dos sistemas Kolmogorov. Este trabajo se centrará en el primero de ellos.

Esta dinámica se describe en el disco de Poincaré, concepto que se introduce con detalle en el Capítulo 1, y que consiste en compactificar el plano añadiéndole su frontera (una circunferencia $\mathbb{S}^1$, donde cada punto nos da una dirección de ida o venida del infinito).

En el Capítulo 2 se estudia, en función de los ocho parámetros, la existencia de puntos de equilibrio finitos del sistema (1), y de puntos de equilibrio infinitos tras realizar la compactificación de Poincaré. El estudio simultáneo de la existencia de equilibrios finitos e infinitos concluye con la obtención de 82 casos posibles.

A continuación, se realiza un estudio de todos los posibles retratos de fase locales que pueden presentarse en cada singularidad, empleando diversos resultados de clasificación de singularidades. En los casos de singularidades con ambos autovalores nulos, la situación es más complicada, puesto que el comportamiento puede ser mucho más rico. Si la matriz de la parte lineal no es idénticamente nula, existe un resultado que permite la clasificación, en cambio, el estudio de los casos con matriz idénticamente nula, constituye un problema abierto, y la única posibilidad es estudiar cada caso de forma particular. La principal técnica empleada hoy en día para el estudio de los puntos de equilibrio linealmente cero es la técnica de los blow up's, que se empleará en este trabajo cuando sea necesaria.

En el Capítulo 3 se incluyen los resultados obtenidos hasta el momento en el estudio de casos, analizando los posibles retratos de fase de las singularidades presentes en cada uno de ellos, la posible coincidencia entre dos o más de las singularidades, y los casos que son reducibles a sistemas Lotka-Volterra en dimensión dos, que se descartarán de nuestro trabajo, remitiendo su estudio a [24].

Tanto la caracterización del problema realizada en el Capítulo 1, como todo el contenido de los Capítulos 2 y 3, son resultados nuevos de elaboración propia.

Para concluir, se exponen los problemas abiertos en esta investigación y se da una breve descripción de los pasos que se seguirán en el futuro en el estudio de la dinámica global, y de los resultados fundamentales en los que se basará el trabajo.