

Els orígens de la dinàmica complexa

Núria Fagella Rabionet

1 Introducció

El camp de la dinàmica complexa ha experimentat molts avenços en els últims vint anys. Després d'un període letàrgic de gairebé 60 anys, aquesta àrea de les matemàtiques ha despertat gràcies a les innovadores aportacions de renombrats matemàtics com Denis Sullivan, Adrien Douady, John Hubbard, Mikhail Lyubich i Jean Christophe Yoccoz entre d'altres.

No ens cal oblidar però, que els fonaments d'aquesta teoria van ser establerts als començaments d'aquest segle, principalment per dos matemàtics francesos anomenats Pierre Fatou i Gaston Julia, les aportacions dels quals van ser crucials per al desenvolupament modern de la dinàmica complexa.

Dinàmica complexa (1-dimensional) és el nom (modern) que rep l'estudi de la iteració de funcions holomorfes (ò analítiques complexes) d'una variable. Això vol dir que, donada una funció ϕ holomorfa definida al pla complex (ò a l'esfera de Riemann), volem estudiar el sistema dinàmic que ve donat pels seus iterats $\phi^n = \phi \circ \dots \circ \phi$.

Però, per què van decidir Fatou i Julia estudiar iteració de funcions? En aquestes pàgines intentarem fer un breu relat de com van ser els començaments de la teoria de la iteració, qui foren els seus protagonistes i quines les seves motivacions. Sense fer cap intent d'aprofundir en la matèria, sí volem arribar fins alguns dels resultats continguts als treballs de Fatou i Julia, i que van resultar ser sorprenents a la seva època.

2 El mètode de Newton i la teoria local

El mètode de Newton és probablement el mètode iteratiu més conegut i antic que trobem a les matemàtiques. Aquest mètode serveix per aproximar solucions reals ò complexes de l'equació $f(z) = 0$. Escollint un valor arbitrari z_0 prou proper a l'arrel buscada α , el mètode de Newton ens proporciona una successió de punts $\{z_n\}$ amb

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

i tal que convergeix cap a α .

La primera menció sobre iteració de funcions holomorfes es troba en dos estudis detallats del mètode de Newton; un fet per l'alemany Ernst Schröder (1841-1902) al voltant de 1870 [S1, S2], i un altre, de manera independent, pel britànic Arthur Cayley (1821-1895) al 1879 [C1, C2].

Diferents versions del mètode de Newton existeixen des de segles abans de Schröder i Cayley, sempre però des d'un punt de vista d'algorisme real. La diferència marcada pels estudis d'aquests dos matemàtics, és la consideració del mètode com a iteració de la funció holomorfa

$$N(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)},$$