

El conjunt de Mandelbrot i altres plans de bifurcació*

NÚRIA FAGELLA

1 Introducció

El conjunt de Mandelbrot va ser vist físicament per primera vegada en una pantalla cap al començament dels anys vuitanta. Aquest fet va obrir la possibilitat a l'experimentació numèrica i va renovar l'interès en les matemàtiques que hi ha al darrera d'aquesta intrigant i bella imatge, les quals havien estat en un punt mort des de feia gairebé vuitanta anys [1]. El ressorgir definitiu va tenir lloc molt poc després [15], amb la introducció d'una nova eina que ha demostrat ser fonamental: les funcions quasiconformes.

El conjunt de Mandelbrot apareix dins l'estudi de la iteració de funcions holomorfes d'una variable, i en particular, de la iteració dels polinomis quadràtics en el pla complex. Més concretament, donat un polinomi de segon grau, $P_c(z) = z^2 + c$, amb z i c complexos, es pretén estudiar el sistema dinàmic donat pels seus iterats

$$P_c^n = P_c \circ \overset{.n}{.} \circ P_c.$$

Com veurem a la secció 2, el conjunt de Mandelbrot viu en el *pla de paràmetres* o de *bifurcacions* (és a dir al pla de les cs), essent de fet un *catàleg* dels sistemes dinàmics que venen donats pels diferents valors del paràmetre c , i que es troben en els corresponents *plans de fase* o *plans dinàmics*, un per cada valor del paràmetre.

És molta la informació que es coneix avui sobre el conjunt de Mandelbrot. A la descripció detallada d'aquest conjunt hi han contribuït molts matemàtics entre els quals podem destacar A. Douady, J. Hubbard, M. Lyubich, C. McMullen, M. Shishikura i J. C. Yoccoz. Tot i això, a hores d'ara, encara queda oberta una pregunta, la resposta de la qual podria tenir àmplies repercussions dins d'aquest camp: el conjunt de Mandelbrot, és localment connex?

Dins d'aquest ressorgiment dels sistemes dinàmics complexos, l'estudi dels polinomis (i especialment els quadràtics) ha estat, amb diferència, la parcel·la més

* Conferència pronunciada a la Segona Trobada Matemàtica de la Societat Catalana de Matemàtiques, que va tenir lloc a la seu de l'Institut d'Estudis Catalans el març de 1999.