SINGULARIDADES EN EL PROBLEMA DE LOS N CUERPOS

Juan Miguel Garrido Peláez

SINGULARIDADES EN EL PROBLEMA DE LOS N CUERPOS

Juan Miguel Garrido Peláez

Memoria del **Trabajo Fin de Máster**.
Máster en Física y Matemáticas (FisyMat)
Universidad de Granada.

Tutorizado por:

Prof./Dr. Rafael Ortega Ríos

Agradecimientos

Quisiera expresar mi gratitud a mi familia por todo el apoyo recibido durante el transcurso de mis estudios y también especialmente a mi tutor, Rafael Ortega, por su inmensa paciencia y disponibilidad a la hora de resolver las dificultades que han ido surgiendo en la elaboración de este trabajo.

DECLARACIÓN

En cumplimiento de la normativa aprobada en Consejo de Gobierno de 4 de marzo de 2013, sobre Directrices de la Universidad de Granada para el desarrollo de la asignatura "Trabajo Fin de Máster" de sus títulos de máster (Art 8,4)

D.Dª ……Juan……Miguel……Garrido……Peláez……………………

Asume la originalidad del trabajo fin de máster, entendida en el sentido de que no ha utilizado fuentes sin citarlas debidamente.

Granada, a …6… de …septiembre… de 2020

Fdo.: Migue

Índice general

Resumen 1

English Abstract 3

1. Introducción 5

1.1. Conceptos básicos 5

1.2. Singularidades 6

2. Teorema de Painlevé 9

2.1. Preliminares 9

2.2. Enunciado y Demostración 9

3. Un resultado sobre singularidades de colisión versus pseudocolisiones 13

3.1. Enunciado y consecuencias 13

3.2. Demostración 14

3.2.1. Algunas desigualdades previas 14

3.2.2. Esquema de la prueba 15

3.2.3. Enunciados y Demostraciones de los Lemas 16

3.2.4. Demostración del Teorema 19

3.2.5. Completación de la Demostración del Teorema 3.1 27

3.3. El problema de N cuerpos lineal 34

4. Las colisiones son de primera categoría **35**

4.1. Preliminares 35

4.2. Primera demostración 36

4.3. Segunda demostración 38

4.4. Un resultado adicional sobre la topología del conjunto de todas las singularidades 39

Conclusiones **41**

Resumen

El problema de los N cuerpos consiste en el estudio de un sistema de N partículas que interactúan a través de las leyes del movimiento de Newton y de la ley de gravitación universal de la inversa del cuadrado. A pesar de su antigüedad, aún hoy importantes cuestiones de carácter analítico acerca de las soluciones de este problema permanecen abiertas, en concreto las concernientes a sus singularidades.

En la presente memoria se expondrán algunos de los resultados que se han logrado obtener en esta área y que han permitido mejorar nuestro conocimiento sobre las singularidades del problema de N cuerpos.

Comenzaremos presentando los conceptos básicos que nos serán necesarios tanto para una formulación precisa del problema como para enunciar algunos de los resultados elementales sobre los que se fundamentará el resto del trabajo. Entre estos últimos destaca la caracterización de las singularidades precisamente como aquellos instante en los que el mínimo de las distancias mutuas entre parejas de cuerpos tiende a cero.

Este teorema nos permite distinguir dos tipos de singularidades: aquellos en las que todos los cuerpos tienden a un límite definido en el espacio ambiente euclídeo en el que se mueven (en cuyo caso se hablará de singularidad de colisión); y aquellas en las que, por el contrario, alguno de los cuerpos no converge a una posición concreta (que recibirán el nombre de pseudocolisiones).
También nos será de utilidad el hecho de que el momento de inercia (denotado por I), el cual puede interpretarse como una medida del distanciamiento máximo entre partículas del sistema, siempre tiende a un cierto límite en la singularidad (ya sea dicho límite o bien una constante no negativa o bien infinito).

Posteriormente se estudiará un teorema clásico de Painlevé de 1897 en virtud del cual se tiene que, para el caso de tres cuerpos, todas las singularidades son debidas a colisiones.

A continuación, nos concentraremos en la larga demostración (publicada por Donald G. Saari en 1973) del teorema que nos permitirá caracterizar los dos tipos de singularidades: las colisiones serán precisamente aquellas en las que el momento de inercia I tiende a un límite finito, mientras que las pseudocolisiones serán aquellas en las que el momento de inercia diverge a infinito. El estudio detallado de dicha prueba constituye la parte central del trabajo.
Es interesante notar además que se obtendrá de manera secundaria como corolario que en el problema de N cuerpos lineal todas las singularidades son debidas a colisiones.

Finalmente se probará, siguiendo de nuevo a Saari, que el conjunto de condiciones iniciales que dan lugar a colisiones es pequeño en un sentido topológico; en concreto que dicho conjunto es de primera categoría (en el sentido de la categoría de Baire). Para ello se usará, además de la caracterización de los dos tipos de singularidades de la que se ha hablado, el resultado análogo para medida; esto es, que las colisiones son de medida nula.

Palabras clave: problema de los N cuerpos, singularidades, colisiones, pseudocolisiones, categoría de Baire.

English Abstract

The N-body problem consists in the study of a system of N particles which interact according to Newton's laws of motion and the inverse square law of universal gravitation. Even though it is an old problem, there are still nowadays important questions of an analytic nature regarding the solutions to this problem which remain open, in particular those concerning its singularities.

In this work we shall show some of the results which have been achieved in this area and which have improved our knowledge about the singularities in the N-body problem.

We will start by introducing the basic concepts that we will need in order to give a precise formulation of the problem and also for articulating some of the elementary results which underlie the rest of the work. Among these, we highlight the characterisation of singularities precisely as those instants in which the minimum of the mutual distances between bodies approaches zero.

This theorem allows us to distinguish two types of singularities: those where the bodies approach a definite limit in the Euclidean ambient space in which they move (this situation will be called a collision singularity); and those where, on the contrary, some particle doesn't reach a concrete position (referred to as pseudocollisions).
It will also be useful to notice that the moment of inertia (denoted by I), which can be viewed as a measure of the maximum spacing between particles, always approaches a definite limit in the singularity (let this limit be either a non-negative constant or infinity).

Next, we will study a classic theorem due to Painlevé and published in 1897, which states that, in the three-body problem, all singularities are due to collisions.

After that, we will focus on the long proof (published by Donald G. Saari in 1973) of the theorem that will allow us to characterise the two types of singularities: collisions will be precisely those in which the moment of inertia I approaches a finite limit, whereas pseudocollisions will be those in which the moment of inertia diverges to infinity. The detailed study of this proof constitutes the central part of the present work.
It is interesting to notice that, as a side effect, we will obtain as a corollary that all singularities in the linear N-body problem are due to collisions.

Finally, we will show, following the proof by Saari, that the set of initial conditions leading to collisions is small in a topological sense; specifically, that this set is of first category (in the sense of Baire category). To that end we are going to need, besides the characterisation of the two types of singularities about which we have already talked, the analogous measure-theoretic result; that is, the fact that collisions have measure zero.

Keywords: N-body problem, singularities, collisions, pseudocollisions, Baire category.

1 Introducción

En este primer capítulo nos guiaremos por lo expuesto en [1].

1.1 Conceptos básicos

El principal objeto de estudio será la dinámica de N cuerpos (partículas puntuales) de masas $m_1, m_2, \ldots, m_N$, que se mueven en el espacio euclídeo tridimensional $\mathbb{R}^3$ bajo la influencia de una fuerza de atracción mutua proporcional al inverso del cuadrado de la distancia entre ellas. Respecto a un sistema de coordenadas absoluto, la posición del cuerpo m_i está dada por el vector tridimensional $q_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. La *configuración* del sistema de partículas viene dada por el vector $3N$-dimensional $q = (q_1, q_2, \ldots, q_N)$. Cuando los puntos se mueven por el espacio, q es una función del tiempo t. El *momento* (lineal) del cuerpo m_i es $p_i = m_i \dot{q}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$ donde la derivada con respecto a t se ha denotado con un punto sobre la función. Se usará la notación $p = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$. Definimos la *función potencial* (que coincide con la *energía potencial* negativa) del sistema de partículas como

$$U : \mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta \to]0, +\infty[, \qquad U(q) = \sum_{1 \le i < j \le N} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|} ,$$

donde $| \cdot |$ es la norma euclídea y Δ representa el *conjunto de colisión*,

$$\Delta = \bigcup_{1 \le i < j \le N} \Delta_{ij}, \qquad \Delta_{ij} = \{ q \in \mathbb{R}^{3N} \mid q_i = q_j \} .$$

Si se eligen las unidades de manera que la constante de gravitación universal sea 1, las ecuaciones que describen el movimiento de los N cuerpos bajo su atracción gravitacional mutua vienen dadas por el sistema $6N$-dimensional

$$\begin{cases} \dot{q} = \mathfrak{M}^{-1} p , \\ \dot{p} = \nabla U(q) , \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $\mathfrak{M}$ es la matriz $(3N\times 3N)$ con los elementos $m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \ldots, m_N, m_N, m_N$ en la diagonal principal y 0 en el resto de posiciones, y $\mathfrak{M}^{-1}$ representa su inversa. El conjunto $6N$-dimensional de las coordenadas se denomina *espacio de configuración.*

Se define asimismo el *momento de inercia* por

$$I(q) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i |q_i|^2 .$$

Recordemos además que se define el *centro de masas* por

$$C(t) := \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} q_i(t) ,$$

donde $M = m_1 + \ldots + m_N$ es la masa total del sistema. Por otro lado, la cantidad $\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{q}_i(t) = M\dot{C}(t)$ recibe el nombre de *momento lineal* del sistema.

La conservación del momento lineal junto a la invariancia galileana nos permitirá, cuando se desee, cambiar el sistema de referencia al centro de masas y suponer que el centro de masas está fijo en el origen. De ahora en adelante se supondrá que estamos en estas condiciones si no se especifica lo contrario.

Asimismo, recordamos que la *energía total* de la solución $q = q(t)$ viene dada por

$$h = T(p(t)) - U(q(t)) ,$$

donde $T : \mathbb{R}^{3N} \to [0, +\infty[$, $T(p(t)) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i^{-1} |p_i(t)|^2 \equiv \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i |\dot{q}_i(t)|^2$ es la *energía cinética* de la solución $q = q(t)$. La energía total h es una cantidad conservada.

Finalmente, recordamos la importante fórmula

$$\ddot{I} = 2T - U = T + h = U + 2h \qquad \text{(Identidad de Lagrange-Jacobi)}$$

1.2 Singularidades

Supongamos una solución del problema de N cuerpos, $q = q(t)$, definida en un intervalo maximal a la derecha de la forma $[0, \omega[$. Entonces cuando $\omega < +\infty$ la solución se denomina *singular* y ω se dice que es una *singularidad* de la solución.

En relación a este concepto se tiene el siguiente resultado

Teorema 1.1. *Sea $q = q(t)$ una solución del problema de N cuerpos definida en $[0, \omega[$, con $\omega < +\infty$ (no siendo en principio su intervalo maximal de existencia necesariamente).*
Entonces ω es una singularidad (es decir, el intervalo maximal a la derecha es $[0, \omega[$) si y sólo si

$$\lim_{t \to \omega} \rho(q(t)) = 0\,,$$

donde se ha denotado $\rho(q) := \min\{|q_i - q_j| : 1 \leq i < j \leq N\}$.

Es claro además que $\lim\limits_{t \to \omega} \rho(q(t)) = 0$ es equivalente a que $q(t) \to \Delta$ cuando $t \to \omega$. En vista entonces del Teorema 1.1, se dirá que $\omega < +\infty$ es una singularidad de *colisión* si existe el límite de $q(t)$ cuando $t \to \omega$, esto es, si $q(t)$ tiende a Δ de manera que acaba alcanzando un elemento concreto de dicho conjunto. Una singularidad ω que no es de este tipo recibirá el nombre de *pseudocolisión* o singularidad de no colisión. Una pseudocolisión puede aparecer solamente cuando $q(t)$ tiende a Δ sin alcanzar ningún elemento particular de él, oscilando entre varios elementos pero sin llegar a alcanzar una posición concreta.
Dicho de otro modo, una solución tiene una singularidad de no colisión en ω si al menos un vector de posición $q_i = q_i(t)$ no tiende a un límite definido cuando $t \to \omega$.

Como consecuencia del Teorema 1.1 y de la identidad de Lagrange-Jacobi, se obtiene además el siguiente resultado:

Corolario 1.1. Sea $q = q(t)$ una solución del problema de N cuerpos definida en $[0, \omega[$, donde $\omega < +\infty$ es una singularidad de la solución. Entonces en tal caso siempre existe el límite del momento de inercia $I(t) := I(q(t))$ cuando $t \to \omega$ (pudiendo ser dicho límite una constante $L \geq 0$ o bien $+\infty$).

Demostración. Por ser ω una singularidad, el Teorema 1.1 nos da entonces que $\lim\limits_{t \to \omega} \rho(q(t)) = 0$, de manera que es inmediato de su definición que $\lim\limits_{t \to \omega} U(q(t)) = +\infty$. Entonces de la identidad de Lagrange-Jacobi, $\ddot{I} = U + 2h$, deducimos que $\lim\limits_{t \to \omega} \ddot{I}(t) = +\infty$. Por tanto, para cierto $\tau_1 < \omega$, se tiene que $\ddot{I}(t) > 0$, $\forall t \in [\tau_1, \omega[$. De aquí se concluye que puede tomarse cierto τ_2, con $\tau_1 < \tau_2 < \omega$, de manera que $\dot{I}$ no cambia de signo en $[\tau_2, \omega[$. Es decir, la función I es monótona en $[\tau_2, \omega[$, con lo cual $\exists \lim\limits_{t \to \omega} I(t)$, que será o bien una constante $L \geq 0$ si I está acotada o bien $+\infty$ si no lo está. ∎

2 Teorema de Painlevé

2.1 Preliminares

Vamos a trabajar en el caso $N = 3$, es decir, con tres cuerpos.
Se denotará por $r_{ij}(t) := |q_i(t) - q_j(t)|$ la longitud de cada uno de los lados del triángulo que, para cada t, forman los tres cuerpos. Es claro que $r_{ij}(t) > 0$ para todo t en el dominio de existencia de la solución.

Se tiene además el siguiente resultado:

Proposición 2.1. Una vez fijado el centro de masas del sistema de partículas en el origen del sistema de coordenadas, el momento de inercia $I(q)$ puede escribirse en términos de las distancias mutuas como

$$I(q) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)^{-1} \sum_{1 \le i < j \le 3} m_i m_j r_{ij}^2$$

2.2 Enunciado y Demostración

Teorema 2.1 (Painlevé, 1897). *En el problema de los tres cuerpos, todas las singularidades son debidas a colisiones.*

Demostración. Se seguirán las ideas que aparecen en Siegel-Moser [9], Capítulo Uno, Sección 6.
En virtud del Corolario 1.1, según el cual siempre existe el límite del momento de inercia cuando $t \to \omega$, distinguimos dos casos:

(I) Si $\lim_{t\to\omega} I(t) = 0$, entonces $\lim_{t\to\omega} q_i(t) = 0$, $\forall i = 1,\dots,n$; por tanto la singularidad es una colisión (total).

(II) Supongamos ahora que $\lim_{t\to\omega} I(t) \neq 0$, es decir, que o bien $\lim_{t\to\omega} I(t) > 0$ o bien $\lim_{t\to\omega} I(t) = +\infty$, con lo cual en cualquier caso existirá un $\eta > 0$ tal que $I(t) \geq \eta$, $\forall t \in [0,\omega[$. Denotando $r_{ij}(t) := |q_i(t) - q_j(t)|$, puede tomarse entonces un $\delta > 0$ tal que $\max\{r_{12}(t), r_{13}(t), r_{23}(t)\} \geq \delta$, $\forall t \in [0,\omega[$, puesto que en caso contrario necesariamente tendría que ocurrir que $\lim_{t\to\omega} r_{ij}(t) = 0$, para $1 \leq i < j \leq 3$, lo cual por la Proposición 2.1 implicaría que $\lim_{t\to\omega} I(q(t)) = 0$, en contradicción con lo supuesto en este caso (II).

Por otro lado, por el Teorema 1.1, que ω sea una singularidad implica que $\lim_{t\to\omega} \rho(q(t)) = 0$. Podemos entonces tomar $\tau < \omega$ lo suficientemente cerca de ω de manera que

$$\min\{r_{ij}(t) : 1 \leq i < j \leq 3\} = \rho(q(t)) < \frac{\delta}{2}, \ \forall t \in [\tau,\omega[$$

Vemos ahora que uno de los lados del triángulo que definen los tres cuerpos ha de permanecer como el más corto durante todo el intervalo de tiempo $[\tau,\omega[$, puesto que en caso contrario por continuidad se tendría que para un cierto $t^* \in [\tau,\omega[$ dos de los lados tendrían longitud menor que $\frac{\delta}{2}$, con lo cual por la desigualdad triangular el tercer lado tendrá longitud menor que δ, en contradicción con la elección de δ.

Por tanto, la longitud de un cierto lado, digamos $r_{13}(t)$, permanece por debajo de $\frac{\delta}{2}$ para todo $t \in [\tau,\omega[$. Se tiene entonces que

$$r_{13}(t) < \frac{\delta}{2}, \ r_{12}(t) > \frac{\delta}{2}, \ r_{23}(t) > \frac{\delta}{2}, \qquad \forall t \in [\tau,\omega[\,. \tag{2.1}$$

Por consiguiente, cuando $t \to \omega$, la distancia $r_{13}(t) = \rho(q(t))$ tiene a 0 y las masas q_1, q_3 colisionan, mientras que las demás distancias permanecen por encima de una cota inferior positiva, $\frac{\delta}{2}$.

Veamos a continuación que la colisión ocurre en un punto concreto del espacio. La ecuación del movimiento

$$\ddot{q}_2 = \frac{m_1}{r_{12}^3}(q_1 - q_2) + \frac{m_3}{r_{23}^3}(q_3 - q_2)$$

da lugar a la estimación

$$|\ddot{q}_2| \leq \frac{m_1}{r_{12}^2} + \frac{m_3}{r_{23}^2}\,,$$

de manera que por (2.1) la función $\ddot{q}_2$ está acotada en el intervalo $[\tau, \omega[$. De aquí es inmediato que existe el límite cuando $t \to \omega$ tanto de $\dot{q}_2$ como de q_2.
Como el centro de masas de los tres cuerpos está fijo en el origen, es decir $m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 \equiv 0$, y por otro lado $q_1 - q_3$ tiende a 0 cuando $t \to \omega$, entonces existe el límite cuando $t \to \omega$ de q_1 y de q_3.
En efecto, vemos que

$$m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 = 0 \Rightarrow m_1 q_1 + m_3 q_3 = -m_2 q_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_3} q_1 + q_3 = \frac{-m_2}{m_3} q_2$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_3} q_1 - \frac{m_1}{m_3} q_3 + \frac{m_1}{m_3} q_3 + q_3 = -\frac{m_2}{m_3} q_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_3}(q_1 - q_3) + \left(\frac{m_1}{m_3} + 1\right) q_3 = \frac{-m_2}{m_3} q_2$$

$$\Rightarrow q_3 = \left(\frac{m_1}{m_3} + 1\right)^{-1} \cdot \left(\frac{-m_2}{m_3} q_2 - \frac{m_1}{m_3}(q_1 - q_3)\right)$$

y como existen los límites cuando $t \to \omega$ de q_2 y de $q_1 - q_3$, vemos que también existirá el límite de q_3 cuando $t \to \omega$. Entonces es inmediato que existe $\lim_{t \to \omega} q_1(t) =: L$ y que $\lim_{t \to \omega} q_3(t) = \lim_{t \to \omega} q_1(t) = L$. Es decir, q_1 y q_3 colisionan en un punto concreto L del espacio.

$\blacksquare$

3 Un resultado sobre singularidades de colisión versus pseudocolisiones

3.1 Enunciado y consecuencias

Seguiremos lo expuesto en [7] por Donald Saari.

Gracias a que, dada una solución del problema de N cuerpos, si se revierte el tiempo y se traslada el instante inicial se obtiene otra solución, en vez de estudiar soluciones definidas en $[0, \omega[$ con $\omega < +\infty$ una singularidad, podemos estudiar equivalentemente soluciones definidas en intervalos de la forma $]0, \tau]$ y con singularidad en $t = 0$.

El objetivo principal consiste en demostrar que

Teorema 3.1 (Saari, 1973). *Si hay una singularidad en $t = 0$ y si I es de variación lenta cuando $t \to 0$, entonces la singularidad es debida a colisiones.*

Observación 3.1. Una función f se dice de variación lenta cuando $t \to 0$ si $\dfrac{f(\beta t)}{f(t)} \to 1$ para cualquier constante positiva β. Por ejemplo, $(\ln t)^3$ es una función de variación lenta.

Una consecuencia inmediata de este teorema es

Corolario 3.1 (von Zeipel, Sperling). Si $I = \mathcal{O}(1)$ cuando $t \to 0$, entonces la singularidad es debida a colisiones.

Demostración (Corolario 3.1). La demostración del corolario es inmediata. Si tenemos una singularidad en $t = 0$, entonces de acuerdo al Corolario 1.1 o bien I tiende a un límite no negativo o bien diverge a $+\infty$ cuando $t \to 0$. La posibilidad de tender a $+\infty$ está descartada por la hipótesis $I = \mathcal{O}(1)$. Si $I \to 0$, entonces por la definición de I, tenemos que $q_i \to 0$, y hay una colisión (total). Si I tiende a un límite positivo, entonces es una función de variación lenta y puede aplicarse el Teorema 3.1. ∎

Este resultado, publicado por von Zeipel en 1908, permaneció durante más de tres décadas sin que se le prestara apenas atención. En 1920, fue también anunciado por Jean Chazy, sin demostración y sin ninguna referencia a von Zeipel. El primero en mencionar la contribución de von Zeipel fue Aurel Wintner en 1941, el cual afirmó que algunos pasos de la demostración no estaban debidamente justificados, y que por consiguiente no podía ser validada. Un primer argumento detallado apareció en 1970, debido a Hans-Jürgen Sperling. Finalmente, en 1986 Richard McGehee completó los detalles de la prueba original de von Zeipel, mostrando que el argumento inicial había sido completamente correcto.
La demostración de Von Zeipel está basada en una descomposición en cúmulos de las partículas que da lugar a una notación técnica y engorrosa. Por consiguiente, nuestra intención a partir de ahora será estudiar la demostración del Teorema 3.1, que como se ha visto implica de manera inmediata el resultado de von Zeipel, y que además arroja algo más de luz sobre el comportamiento de las soluciones que dan lugar a pseudocolisiones.

3.2 Demostración

Se detallará la que aparece en el mismo artículo de Saari [7]. Se empleará la notación $r_{ij} := |q_i - q_j|$.

3.2.1 Algunas desigualdades previas

Puesto que el centro de masas está situado en el origen, puede verse que

$$2MI = \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j |q_i - q_j|^2$$

donde M es la masa total del sistema. De aquí vemos que $I^{1/2}$ puede interpretarse como una medida del distanciamiento máximo entre partículas. Para ver esto, sea

$$R(t) := \max_{i \neq j} r_{ij}(t)$$

y sea m_0 la menor de las masas. Entonces $2MI \geq m_i m_j |q_i - q_j|^2 \geq m_0^2 |q_i - q_j|^2$ para cualquier elección de i, j. Pero, para cada t, hay cierto par i, j tal que $r_{ij}(t) = R(t)$; por consiguiente $I^{1/2} \geq m_0 \frac{R}{(2M)^{1/2}}$. Una desigualdad en la otra dirección se obtiene de manera mucho más simple; esto es, obviamente tenemos que $2MI = \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j r_{ij}^2 \leq \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j R^2 = \frac{M^2 R^2}{2}$. Del mismo modo, si definimos $\rho(t) := \text{mín}\, r_{ij}(t)$, se sigue entonces que U^{-1} puede verse como una medida del distanciamiento mínimo entre partículas. Recogemos estos hechos bien conocidos en las desigualdades

$$\begin{gathered} \frac{m_0^2 R^2}{2M} \leq I \leq \frac{MR^2}{4} \\ m_0^2 \rho^{-1} \leq U \leq M^2 (2\rho)^{-1} \end{gathered} \tag{3.1}$$

3.2.2 Esquema de la prueba

Las ideas básicas de la demostración del teorema Teorema 3.1 son las siguientes:

1. Si hay singularidades que no son colisiones, entonces debe haber distancias r_{ij} tales que $\text{lím inf}\, \frac{r_{ij}}{I^{1/2}} > 0$ (Lema 3.1).
2. El efecto oscilatorio es de tal manera que puede encontrarse una sucesión de instantes $\{t_i\}$, $t_i \to 0$ en los que algunas partículas están próximas entre sí mientras que las otras distancias mutuas están acotadas inferiormente por el producto de $I^{1/2}$ por una constante (Lema 3.2).
3. En cada t_i (definido en 2.), pueden definirse cúmulos de partículas de una manera natural – en concreto, un cúmulo estará formado por todas las partículas "cercanas". La aceleración del centro de masas de estos cúmulos será entonces muy pequeña (de hecho, del orden de magnitud $\mathcal{O}(I^{-1})$).
4. De 1. se sigue que, en algún momento del futuro, en algún cúmulo, al menos una partícula debe separarse de las otras partículas. Esto ocasiona un cambio radical en la localización del centro de masas de dicho cúmulo. En vista de 3., esto solamente puede ser explicado considerando que el cúmulo tenga una gran velocidad.
5. Si I es de variación lenta entonces las velocidades de los cúmulos no pueden alcanzar las magnitudes que se requerirían.

3.2.3 Enunciados y Demostraciones de los Lemas

Como se probó en el Corolario 1.1, si hay una singularidad en $t = 0$, entonces cuando $t \to 0$ la función I tiende o bien a un límite no negativo o bien a infinito. **Para el resto de este apartado se supondrá que la singularidad no es una colisión.** Como se remarcó previamente, esto implica que I **no tiende a cero**, puesto que de hacerlo entonces tendríamos que $q_i \to 0$ y habría una colisión total.

Lema 3.1. Existen índices i, j tales que

$$\liminf \frac{r_{ij}}{I^{1/2}} = 0 \quad \text{y} \quad \limsup \frac{r_{ij}}{I^{1/2}} > 0 \quad \text{cuando } t \to 0^+ .$$

Nota: Obsérvese que, por la primera desigualdad de (3.1), se sabe que necesariamente $\limsup \frac{r_{ij}}{I^{1/2}} < +\infty$.

Demostración. Supongamos que el enunciado del lema fuera falso.
Puesto que el número de cuerpos N es finito, entonces existe una constante $A > 0$ tal que:

$$\text{para cualquier } r_{ij} \text{ o bien } \frac{r_{ij}}{I^{1/2}} \to 0\,, \text{ o bien después de un tiempo } \frac{r_{ij}}{I^{1/2}} > A\,. \tag{3.2}$$

Los índices pueden ser divididos ahora en clases disjuntas G_k, $k = 1, 2, \ldots, p < N$, mediante la condición de que $i, j \in G_k$ si y sólo si $\frac{r_{ij}}{I^{1/2}} \to 0$ cuando $t \to 0^+$. Efectivamente dicha condición da lugar a una relación de equivalencia (usándose para la transitividad la desigualdad triangular), con lo cual obtenemos una partición del conjunto de índices en clases de equivalencia G_k. El hecho de que el número de clases, p, es estrictamente menor que el número de cuerpos N es consecuencia de lo siguiente: si todas las parejas de cuerpos cumplieran la segunda opción de (3.2), entonces las distancias serían uniformemente positivas (teniendo en cuenta para esto que $\lim\limits_{t\to 0^+} I > 0$) y $t = 0$ no sería singularidad; por consiguiente alguna pareja ha de cumplir la primera opción de la disyunción en (3.2) y por tanto habrá al menos una clase con dos índices distintos y se tendrá que $p < N$.

Por otro lado, el centro de masas C_s de la s-ésima clase viene dado por $M_s C_s = \sum_{i\in G_s} m_i q_i$, donde $M_s = \sum_{i\in G_s} m_i$, y su aceleración viene dada por

$$M_s \ddot{C}_s = \sum m_i \ddot{q}_i = \sum_{\substack{i,j\in G_s \\ i\neq j}} \frac{m_i m_j (q_j - q_i)}{r_{ij}^3} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq s}}^{p} \sum_{\substack{j\in G_k \\ i\in G_s}} \frac{m_i m_j (q_j - q_i)}{r_{ij}^3}\,. \tag{3.3}$$

La primera suma doble es igual a cero por la simetría de los coeficientes y la antisimetría de los vectores con respecto a los índices. La magnitud de cada término en la segunda suma es $r_{ij}^{-2} \leq A^{-2}I^{-1}$, lo cual es una consecuencia de (3.2). De esta manera, $M_s\ddot{C}_s = \mathcal{O}(I^{-1}) = \mathcal{O}(1)$ (téngase en cuenta que $I \not\to 0$).

Por tanto, la aceleración $\ddot{C}_s$ está acotada. De aquí es inmediato que la velocidad $\dot{C}_s$ también está acotada, y esto a su vez implica que existe el límite $L_s := \lim_{t\to 0} C_s$, para $s = 1, 2, \ldots, p$.

Si $I = \mathcal{O}(1)$, lo cual se traduce en que I tiende a una constante positiva (y no a cero ni a infinito), entonces por definición de las clases G_s, la condición $i, j \in G_s$ implica que $r_{ij} \to 0$. Por la desigualdad triangular es entonces inmediato que $q_i, q_j \to L_s$. Puesto que cualquier índice pertenece a alguna clase, se sigue que la singularidad es una colisión (todos tienen límite definido), lo cual es una contradicción.
Si $I \neq \mathcal{O}(1)$ entonces $I \to +\infty$. Considérese la siguiente igualdad

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p}\sum_{i\in G_s} m_i|q_i - C_s|^2 = I - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p} M_s|C_s|^2 , \tag{3.4}$$

la cual se obtiene de manera inmediata teniendo en cuenta la definición de C_s y desarrollando el producto escalar del lado izquierdo.
Hemos probado que el segundo término en el lado derecho tiende a un límite. Por la construcción de los conjuntos G_s, la suma doble en el lado izquierdo es $o(I)$, para lo cual puede usarse la desigualdad de Cauchy-Schwarz junto al hecho de que $r_{ij}/I^{1/2} \to 0$ si $i, j \in G_s$. Por consiguiente obtenemos la contradicción $I = o(I)$, y el lema queda probado. ∎

Lema 3.2. Existe una constante positiva A tal que para un $\varepsilon \in]0, A[$ arbitrario puede encontrarse una sucesión $\{t_i\}$, $t_i \to 0$ con la propiedad de que para cualesquiera k, j o bien las dos partículas están ε-acumuladas (esto es, $r_{kj}(t_i) < \varepsilon(I(t_i))^{1/2}$) o bien están A-separadas (es decir, $A(I(t_i))^{1/2} < r_{kj}(t_i)$).

Demostración. Defínase el número de parejas d-separadas, al que denotamos por $\eta(\tau, d)$, como el número de distancias mutuas r_{kj} para las que en $t = \tau$ se cumple que $\dfrac{r_{kj}}{I^{1/2}} \geq d$. Nótese de (3.1) (en concreto de la segunda desigualdad en la primera línea) que $d^2 < \dfrac{4}{M}$ implica $1 \leq \eta(\tau, d)$. Como es inmediato que se verifica $\eta(\tau, d) \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$, en resumen si $d^2 < \dfrac{4}{M}$ se tiene que $1 \leq \eta(\tau, d) \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$. Para un t

positivo fijo y $d < \dfrac{2}{M^{1/2}}$, definimos el conjunto $D(t,d) := \{\eta(\tau,d) : \tau \in]0,t[\}$. Definimos asimismo el número real $E(t,d) = \text{ínf } D(t,d)$. $E(t,d)$ es un entero positivo puesto que todos los elementos del conjunto $D(t,d)$ son enteros positivos; además es claro que el ínfimo es de hecho un mínimo, con lo cual en algún instante anterior hubo tan sólo E parejas d-separadas. Nótese que si $t_1 \leq t$, entonces $E(t_1,d) \geq E(t,d)$ ya que $D(t_1,d)$ está contenido en $D(t,d)$. Del mismo modo, si $d_1 \leq d$ entonces $\eta(\tau,d_1) \geq \eta(\tau,d)$ con lo cual $E(t,d_1) \geq E(t,d)$. Combinando estas dos afirmaciones, tenemos que

$$\text{si} \quad t_1 \leq t, \quad d_1 \leq d\,, \quad \text{entonces} \quad E(t_1,d_1) \geq E(t,d)\,. \tag{3.5}$$

Sea $F := \sup\left\{E(t,d) : 0 < t \leq 1,\, 0 < d \leq \dfrac{2}{M^{1/2}}\right\}$. Como F es el supremo de un conjunto de enteros acotado, F es un entero (de ese conjunto). Esto implica que $E(t_0,d_0) = F$ para ciertos valores $t = t_0$ y $d = d_0$. Por (3.5), se tiene que

$$E(t,d) = F \quad \text{para cualesquiera} \quad 0 < t \leq t_0 \quad \text{y} \quad 0 < d \leq d_0\,. \tag{3.6}$$

Esto es:

$$\begin{aligned} &\text{En cada instante de tiempo en el intervalo }]0,t_0] \\ &\text{hay } \textbf{al menos} \text{ (ya que } E(t,d) \text{ es un ínfimo)} \\ &F \text{ distancias mutuas } r_{kj} \text{ tales que } r_{kj} > d_0(I)^{1/2} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Definimos

$$2A = \text{mín}\left(d_0, S\right)\,,$$

donde S es el mínimo de entre los $\limsup\limits_{t\to 0^+} \dfrac{r_{kj}}{I^{1/2}}$, $1 \leq k < j \leq N$ no nulos (es decir, de entre los estrictamente positivos); nótese que en virtud del Lema 3.1, existe al menos un par de índices k, j para los que el correspondiente límite es estrictamente mayor que cero.

Sea $\varepsilon < A$ un cierto número positivo. Entonces se tiene que para cada $t < t_0$, puede encontrarse un cierto valor positivo $t_i < t$ de manera que en dicho instante t_i hay exactamente $\dfrac{n(n-1)}{2} - F$ distancias r_{kj} que están acotadas superiormente por $\varepsilon I^{1/2}$ (véase (3.6)). Si esta afirmación fuera falsa, entonces tendríamos $\eta(\tau,\varepsilon) > F$ para $0 < \tau \leq t$. Esto implicaría que $E(t,\varepsilon) > F$, lo cual contradice la definición de F y (3.5). Esta afirmación queda por lo tanto probada.

Por la afirmación previa, en el instante t_i hay solamente F distancias mutuas que no están acotadas superiormente por $\varepsilon I^{1/2}$. Puesto que se ha visto que para todo $t < t_0$

hay al menos F distancias mutuas mayores que $2AI^{1/2}$ (concretamente en (3.7)), estas distancias mutuas están también acotadas inferiormente por $A(I)^{1/2}$, y el lema queda probado.

Observación 3.2. Recopilamos a continuación dos propiedades que se han visto en el último paso de la demostración del Lema 3.2 que acabamos de estudiar y que nos serán de utilidad posteriormente:

- En el instante t_i hay solamente F distancias mutuas que no están acotadas superiormente por $\varepsilon I^{1/2}$.
- Existen al menos F parejas (k, j) tales que $r_{kj}(t) \geq 2AI^{1/2}(t)$ para todo $t \in]0, t_0[$.

3.2.4 Demostración del Teorema

Existencia de sucesión $\{t_i\}$

Sea δ un número positivo menor que $\text{mín}\left(\frac{m_0 A^2}{8}, \frac{A}{2}\right)$. Podemos entonces encontrar una sucesión $\{t_i\}$ tal que (i) $t_i \to 0$ y (ii) en $t = t_i$, para cualesquiera $k \neq j$, $k, j = 1, 2, \ldots, N$, o bien $r_{kj} < \delta_1 I^{1/2}$ o bien $r_{kj} > AI^{1/2}$, donde $\delta_1 := \left(\frac{2\delta}{M}\right)^{1/2}$. Conviene hacer notar aquí que, de la definición de δ, y en concreto de que $\delta < \frac{m_0 A^2}{8}$, se deduce que $\delta_1 < A$.
La existencia de una sucesión $\{t_i\}$ con esas dos propiedades está garantizada por el Lema 3.2, tomando en este caso $\varepsilon = \delta_1$ en dicho lema.

El conjunto $\mathfrak{C}_i^1$ es no vacío

Para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos ahora

$$\mathfrak{C}_i^1 := \left\{t \in]0, t_i[\,:\, \exists\, k \neq j,\, r_{kj}(t_i) < \delta_1 I^{1/2}(t_i)\,,\, r_{kj}(t) \geq AI^{1/2}(t)\right\} .$$

Vamos a probar a continuación que este conjunto es no vacío, $\mathfrak{C}_i^1 \neq \emptyset$.

Por reducción al absurdo, supongamos que fuese $\mathfrak{C}_i^1 = \emptyset$.
Se cumple entonces la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} &\text{Si } r_{kj}(t_i) < \delta_1 I^{1/2}(t_i)\,, \text{ entonces para todo } t \in]0, t_i] \\ &\text{se verifica que } r_{kj}(t) < AI^{1/2}(t)\,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Nótese que para $t = t_i$ se obtiene usando que $\delta_1 < A$.

Ahora bien, si se cumple esta propiedad (3.8), entonces las dos propiedades en la Observación 3.2 implican que existen **exactamente** F parejas (k, j) tales que $r_{kj}(t) \geq 2AI^{1/2}(t)$ para todo $t \in]0, t_0[$. Además, el resto de parejas (que son un total de $\dfrac{n(n-1)}{2} - F$) cumplen, directamente por (3.8), que $r_{kj}(t) < AI^{1/2}(t)$ para todo $t \in]0, t_i]$.

En resumen, cada una de las distancias mutuas sería, durante **todo** el intervalo de tiempo $]0, t_i[$, o bien menor que $AI^{1/2}$ o bien mayor que $2AI^{1/2}$.

Finalmente, por el Lema 3.1 existen índices k_0, j_0 tales que $\liminf\limits_{t\to 0^+} \dfrac{r_{k_0j_0}}{I^{1/2}} = 0$ y $\limsup_{t\to 0^+} \frac{r_{k_0j_0}}{I^{1/2}} > 0$. Por la definición de A (en concreto, por ser $2A$ menor o igual que cualquier $\limsup\limits_{t\to 0^+} \dfrac{r_{kj}}{I^{1/2}}$ no nulo), se tendrá entonces que $2A \leq \limsup\limits_{t\to 0^+} \dfrac{r_{k_0j_0}}{I^{1/2}}$. Luego la distancia $r_{k_0j_0}$ está entre las que cumplen ser mayores o iguales que $2AI^{1/2}$ durante **todo** el intervalo de tiempo $]0, t_i[$. Pero esto contradice que $\liminf\limits_{t\to 0^+} \dfrac{r_{k_0j_0}}{I^{1/2}} = 0$.

En conclusión se tiene que $\mathfrak{C}_i^1 \neq \emptyset$ y puede entonces definirse $t_i^1 := \sup\left(\mathfrak{C}_i^1\right)$.

El conjunto $\mathfrak{C}_i^2$ es no vacío

A continuación, suponemos sin pérdida de generalidad que $t_{i+1} < t_i^1$. Para $i > 1$ definimos ahora $\mathfrak{C}_i^2 := \left\{t \in]t_i, t_{i-1}[\,:\, \exists\, k \neq j,\ r_{kj}(t_i) < \delta_1 I^{1/2}(t_i)\,,\ r_{kj}(t) \geq AI^{1/2}(t)\right\}$.

De manera análoga a como se hizo para $\mathfrak{C}_i^1$, se prueba que $\mathfrak{C}_i^2 \neq \emptyset$.

Así, por reducción al absurdo, si fuese $\mathfrak{C}_i^2 = \emptyset$ entonces en el intervalo $[t_i, t_{i-1}]$ habría exactamente $\dfrac{n(n-1)}{2} - F$ distancias mutuas menores que $AI^{1/2}$ y el resto (un total de F) serían mayores que $2AI^{1/2}$. Pero, teniendo en cuenta que se había tomado $t_i < t_{i-1}^1$ y que por tanto $t_{i-1}^1 \in]t_i, t_{i-1}[$, lo anterior estaría en contradicción con la definición de

t_{i-1}^1 como supremo del conjunto **no vacío** $\mathfrak{C}_{i-1}^1$ (véase la definición de dicho conjunto).

En conclusión se tiene que $\mathfrak{C}_i^2 \neq \emptyset$ y puede entonces definirse $t_i^2 := \text{ínf}\left(\mathfrak{C}_i^2\right)$.

Una propiedad del intervalo $[t_i^1, t_i^2]$

Resumiendo, esta construcción da lugar a un intervalo $[t_i^1, t_i^2]$ con $t_i^1 < t_i < t_i^2 < t_{i-1}$ con la propiedad de que:

Proposición 3.1. Para cada pareja (j,k), $j \neq k$ se cumple (de manera excluyente) una de las siguientes desigualdades:

- $r_{kj}(t) \leq A\, I(t)^{1/2}\,,\ \forall t \in [t_i^1, t_i^2]$
- $r_{kj}(t) \geq 2A\, I(t)^{1/2}\,,\ \forall t \in [t_i^1, t_i^2]$

Nótese que a priori esta propiedad se tendría en el intervalo abierto no trivial $]t_i^1, t_i^2[$, pero por continuidad se tiene también para el cerrado.

Un lema auxiliar

Procedemos ahora a enunciar y demostrar un lema que nos será de utilidad más adelante.

Lema 3.3. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ de clase C^2, y cumpliendo $|\ddot{f}| \leq K_1$, $\text{mín}\,|\dot{f}(t)| \leq K_2$. Entonces

$$|f(b) - f(a)| \leq \left[K_2 + K_1\,(b-a)\right](b-a)$$

Demostración. Usando la Regla de Barrow para cada componente de la función f se obtiene que

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(s)\, \mathrm{d}s\,.$$

Análogamente se tiene que, fijado $t \in [a,b]$ arbitrario, se cumple que

$$\dot{f}(t) - \dot{f}(t_0) = \int_{t_0}^t \ddot{f}(s)\, \mathrm{d}s\,,$$

donde $t_0 \in [a,b]$ se tomará de manera que $|\dot{f}(t_0)| = \text{mín}\,|\dot{f}(t)|$ (como $|\dot{f}|$ es continua alcanza su mínimo en el compacto $[a,b]$).

De esta segunda expresión obtenemos la desigualdad

$$|\dot{f}(t)| \leq \text{mín}\,|\dot{f}(t)| + \left|\int_{t_0}^{t} |\ddot{f}(s)|\,\mathrm{d}s\right| \leq K_2 + K_1\,|t-t_0| \leq K_2 + K_1\,(b-a)\ ,\forall t \in [a,b]\,.$$

Teniendo en cuenta esta desigualdad junto a la primera expresión obtenida al principio, llegamos finalmente a que

$$|f(b) - f(a)| \leq \int_a^b |\dot{f}(s)|\,\mathrm{d}s \leq \big[K_2 + K_1\,(b-a)\big](b-a)\,.$$

■

Una cota superior para $|\ddot{C}_s|$

Como en la demostración del Lema 3.1, dividimos los índices en clases de equivalencia G_l, mediante la condición de que

$$k, j \in G_l \ \text{ si y sólo si } \ r_{kj} < AI^{1/2} \ \text{ para todo } \ t \in [t_i^1, t_i^2]\,. \tag{3.9}$$

El hecho de que para la relación dada por (3.9) se verifique la propiedad transitiva se deduce de la Proposición 3.1. Nótese que estas clases depende de la elección de t_i, son disjuntas dos a dos, y cada índice pertenece a alguna clase (algunas clases pueden tener un solo elemento). El centro de masas C_s de la clase s-ésima viene dado por $M_s C_s = \sum_{k\in G_s} m_k q_k$, y

$$M_s \ddot{C}_s = \sum_{k,j\in G_s} \frac{m_k m_j (q_k - q_j)}{r_{kj}^3} + \sum_{\substack{l=1\\ l\neq s}}^{p} \sum_{\substack{k\in G_l\\ j\in G_s}} \frac{m_k m_j (q_k - q_j)}{r_{kj}^3}\,.$$

La primera sumatoria doble en el lado derecho es cero por la simetría de los coeficientes y la antisimetría de los vectores con respecto a los índices. Cada término en el segundo sumatorio es de magnitud $\dfrac{m_k m_j}{r_{kj}^2}$. Como k, j no pertenecen a la misma clase G, tenemos $r_{kj} \geq 2AI^{1/2}$. Por tanto en el intervalo $[t_i^1, t_i^2]$ tenemos

$$|\ddot{C}_s| \leq \frac{M}{4A^2 I} = \frac{B}{I}\,, \tag{3.10}$$

donde se ha definido $B := \dfrac{M}{4A^2}$.

Algún $|C_s|$ experimenta un gran cambio

Vemos ahora que algún $|C_s|$ ha de experimentar un gran cambio en este intervalo de tiempo. Por la definición de los términos involucrados, se sigue inmediatamente que

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p}\sum_{i\in G_s} m_i|q_i - C_s|^2 = I - \frac{1}{2}\sum M_s|C_s|^2 = I - J\,, \tag{3.11}$$

donde se ha definido $J := \frac{1}{2}\sum M_s|C_s|^2$.

Debido al hecho de que C_s es el centro de masas de la clase G_s, se sigue que para cada $k \in G_s$, hay un $j \in G_s$ tal que $|q_k - C_s| \leq |q_k - q_j|$. Por consiguiente por la definición de δ y de δ_1 $\big($en concreto por (ii), según el cual $r_{kj} < \delta_1(I)^{1/2}$ $\big)$, en el instante t_i el lado izquierdo de (3.11) es menor que δI, lo cual puede verse teniendo en cuenta que, por la definición de δ_1 se tiene que $\frac{1}{2}(\delta_1)^2 I\, M = \delta I$. Esto es, en t_i,

$$J(t_i) > (1-\delta)\, I(t_i)\,. \tag{3.12}$$

En los instantes t_i^j, $j = 1, 2$, alguna distancia entre partículas es ahora $AI^{1/2}$ (por su propia definición como supremo, y respectivamente, ínfimo). Supongamos que estas partículas son q_1 y q_2. Usando en cada una de las tres coordenadas la relación $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a-b)^2$ para $a, b \in \mathbb{R}$, se sigue que el lado izquierdo de (3.11) está acotado inferiormente por

$$\frac{1}{2}m_0\left(|q_1 - C_s|^2 + |C_s - q_2|^2\right) \geq \frac{1}{4}m_0|q_1 - q_2|^2 \geq CI$$

donde

$$C = \frac{m_0 A^2}{4}\,; \tag{3.13}$$

para la segunda desigualdad téngase entonces en cuenta que q_1, q_2 se habían supuesto precisamente cumpliendo que $|q_1 - q_2| = AI^{1/2}$ (es decir, de hecho se tendría la igualdad).

Nótese que $2\delta \leq C < 1$ (lo cual implica en concreto que $\delta < 1$). La desigualdad $C < 1$ se sigue del hecho de que $J > 0$.

En resumen, en t_i^j, $j = 1, 2$, tenemos que

$$J(t_i^j) \leq (1 - C)\, I(t_i^j)\,, \;\; j = 1, 2\,. \tag{3.14}$$

Por consiguiente,

$$J(t_i) - J(t_i^j) \geq (1 - \delta) I(t_i) - (1 - C) I(t_i^j)\,. \tag{3.15}$$

Encontramos ahora **dos** posibles casos:

- o bien $\lim_{t \to 0^+} I(t) = L$, con $L \in\,]0, +\infty[$,
- o bien $\lim_{t \to 0^+} I(t) = +\infty$.

La demostración podría completarse en ambos casos usando las técnicas del Apartado 3.2.5, pero para motivar esta maquinaria, nos encargamos primero del **caso acotado**:

Sea ε positivo y de manera que

$$\varepsilon < \frac{(C - \delta) L}{2(2 - (\delta + C))}\,.$$

Tómese un t_{i-1} lo suficientemente pequeño de manera que si $0 < t \leq t_{i-1}$, entonces $|I - L| < \varepsilon$. Por tanto, teniendo en cuenta que $t_i < t_{i-1}$, la desigualdad (3.15) queda

$$J(t_i) - J(t_i^j) \geq (1 - \delta)(L - \varepsilon) - (1 - C)(L + \varepsilon) > \frac{(C - \delta) L}{2}\,, \tag{3.16}$$

con $j = 1, 2$ y donde en la última desigualdad se ha usado que $(1-\delta)(L-\varepsilon)-(1-C)(L+\varepsilon) = CL - \delta L - \varepsilon\,(2-(\delta+C)) > CL - \delta L - \frac{(C-\delta)L}{2} = \frac{(C - \delta)L}{2}$.

Esto implica, por la definición de J en (3.11), que para algún s

$$|C_s(t_i)|^2 - |C_s(t_i^2)|^2 \geq 2\,\frac{(C - \delta)L}{2pM_s} \geq \frac{(C - \delta)L}{2pM_s} > \frac{(C - \delta)L}{2NM} = D\left(\frac{8L}{m_0}\right)^{1/2} \tag{3.17}$$

donde $D := \dfrac{(C-\delta)L}{2NM} \cdot \left(\dfrac{8L}{m_0}\right)^{-1/2} > 0.$

Puesto que $\frac{1}{2}m_0|C_s(t_i)|^2$ está acotado superiormente por una constante estrictamente menor que $I(t_i)$, tomando ε lo suficientemente pequeño se llega a que

$$m_0|C_s(t_i)|^2 < 2L\,. \tag{3.18}$$

Usando ahora (3.17) y (3.18) obtendremos que

$$|C_s(t_i) - C_s(t_i^2)| > D\,. \tag{3.19}$$

Para verlo, comenzamos observando que de (3.17) se deduce que $|C_s(t_i)|^2 - |C_s(t_i^2)|^2 > 0$, y por tanto que $|C_s(t_i)| > |C_s(t_i^2)|$.
De nuevo teniendo en cuenta (3.17) se llega a que

$$\begin{aligned} D\left(\frac{8L}{m_0}\right)^{1/2} &< |C_s(t_i)|^2 - |C_s(t_i^2)|^2 = \left(|C_s(t_i)| + |C_s(t_i^2)|\right)\left(|C_s(t_i)| - |C_s(t_i^2)|\right) < \\ &< 2\left(\frac{2L}{m_0}\right)^{1/2}\left(|C_s(t_i)| - |C_s(t_i^2)|\right)\,, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se ha usado que $|C_s(t_i^2)| < |C_s(t_i)|$ junto a (3.18).
En consecuencia obtenemos finalmente

$$D < |C_s(t_i)| - |C_s(t_i^2)| \le |C_s(t_i) - C_s(t_i^2)|\,.$$

Cotas superiores para $|\ddot{C}_s|$ y mín $|\dot{C}_s|$ en el caso acotado $I \to L$

Vemos a continuación que si $I \to L > 0$, entonces la desigualdad (3.19) no puede cumplirse.

Primero, usando el hecho de que $|I - L| < \varepsilon$ y por tanto $I > L - \varepsilon$, junto a la desigualdad (3.10), nos queda

$$|\ddot{C}_s| \le \frac{B}{L-\varepsilon}\,. \tag{3.20}$$

Probamos a continuación una cota superior para mín $|\dot{C}_s|$.

Por (3.16), J tiene un máximo en el interior del intervalo $[t_i^1, t_i^2]$ (recordemos que $t_i \in\,]t_i^1, t_i^2[$). En dicho punto $\ddot{J} \le 0$. De la definición de J, de la desigualdad (3.10), y del hecho de que $\frac{1}{2}M_s C_s^2 \leq I$ (lo cual se sigue de (3.11)), se deduce que en este punto máximo

$$\sum M_k |\dot{C}_k|^2 \leq -\sum M_k C_k \cdot \ddot{C}_k \leq \sum (2M_k I)^{1/2} \frac{B}{I} \leq \frac{BN(2M)^{1/2}}{I^{1/2}} \equiv \frac{B_1}{I^{1/2}},$$

donde en la primera desigualdad se ha usado que $\ddot{J} \leq 0$.

Por consiguiente en el punto máximo de J, se tendrá que

$$|\dot{C}_s| \leq \left(\frac{B_1}{M_s I^{1/2}} \right)^{1/2} \leq \left(\frac{BN(2M)^{1/2}}{m_0 (L-\varepsilon)^{1/2}} \right)^{1/2},$$

donde en la segunda desigualdad se ha usado que $|I - L| < \varepsilon$ y por tanto $I > L - \varepsilon$.

En concreto tendremos que

$$\text{mín}\, |\dot{C}_s| \leq \left(\frac{B_1}{M_s I^{1/2}} \right)^{1/2} \leq \left(\frac{BN(2M)^{1/2}}{m_0 (L-\varepsilon)^{1/2}} \right)^{1/2}. \tag{3.21}$$

Obtención de la contradicción (en el caso acotado $I \to L$)

Usamos ahora el Lema 3.3 teniendo en cuenta las cotas (3.20) y (3.21), llegando a que

$$|C_s(t_i) - C_s(t_i^2)| \leq \left\{ \left(\frac{BN(2M)^{1/2}}{m_0 (L-\varepsilon)^{1/2}} \right)^{1/2} + \frac{B}{L-\varepsilon} |t_i - t_i^2| \right\} |t_i - t_i^2| \leq$$
$$\leq t_{i-1} \left\{ \left(\frac{BN(2M)^{1/2}}{m_0 (L-\varepsilon)^{1/2}} \right)^{1/2} + \frac{Bt_{i-1}}{L-\varepsilon} \right\}.$$

Como por otro lado se tenía (3.19), según el cual $0 < D < |C_s(t_i) - C_s(t_i^2)|$, se concluye que

$$0 < D < |C_s(t_i) - C_s(t_i^2)| \leq t_{i-1} \left\{ \left(\frac{BN(2M)^{1/2}}{m_0 (L-\varepsilon)^{1/2}} \right)^{1/2} + \frac{Bt_{i-1}}{L-\varepsilon} \right\}.$$

Esta cadena de desigualdades debe cumplirse para cada t_i. (Nótese que las constantes D, B y L están definidas en términos de A, N, y M. Por consiguiente son independientes de t_i y G_s.) Para llegar a contradicción, simplemente tomamos t_{i-1} lo suficientemente pequeño de manera que el extremo derecho de la última expresión sea menor que D. Como $\{t_i\} \to 0$, esto puede hacerse.

Observación 3.3. Con lo demostrado hasta este momento ya se puede obtener el Corolario 3.1, ya que, como se dijo en su demostración, la hipótesis $I = \mathcal{O}(1)$ nos permite descartar el caso $I \to +\infty$ cuando $t \to 0$, que es el que nos queda por probar.

3.2.5 Completación de la Demostración del Teorema 3.1

Para el resto de la demostración del teorema podemos, y así lo hacemos, suponer que $I \to +\infty$ cuando $t \to 0$.

Un lema sobre funciones de variación lenta

Lema 3.4. Si I es de variación lenta cuando $t \to 0$, entonces $\dfrac{t\,\dot{I}(t)}{I(t)} \to 0$ cuando $t \to 0$. Dados $\varepsilon > 0$, $0 < \beta < 1$ entonces, para tiempos próximos a 0, en cualquier intervalo del tipo $(\beta t, t)$ hay un ξ tal que

$$\ddot{I}(\xi) \leq \frac{\varepsilon I(t)}{t^2}\,.$$

Demostración. Teniendo en cuenta que una condición necesaria y suficiente para que una singularidad ocurra en $t = 0$ es que $\rho \to 0$ cuando $t \to 0$ (Teorema 1.1), junto a la identidad de Lagrange-Jacobi ($\ddot{I} = U + 2h$) y el hecho de que $I \to +\infty$, tenemos que $\ddot{I} \to +\infty$ y $\dot{I} \to -\infty$ monótonamente cuando $t \to 0$. Como I es de variación lenta, $\dfrac{I(\beta t)}{I(t)} \to 1$ para cualquier constante positiva $\beta < 1$. Por el teorema del valor medio se tendrá que $I(\beta t) - I(t) = (\beta t - t)\,\dot{I}(\xi)$ para cierto $\xi \in [\beta t, t]$ (recordemos que $\beta < 1$), de lo que se sigue que $\dfrac{I(\beta t)}{I(t)} = 1 + \dfrac{(\beta - 1)t\dot{I}(\xi)}{I(t)}$. Por consiguiente, $\dfrac{(\beta - 1)t\dot{I}(\xi)}{I(t)} \to 0$ cuando $t \to 0$. Usando que $\beta < 1$ y que $|\dot{I}(\xi)| > |\dot{I}(t)|$ (lo cual es consecuencia de que $|\dot{I}|$ es monótonamente decreciente cerca de 0), se obtiene que $\dfrac{t\,\dot{I}(t)}{I(t)} \to 0$.

Para probar la segunda afirmación, usamos la expansión en serie de Taylor de $I(t)$, en virtud de la cual:

$$\frac{I(\beta t)}{I(t)} - 1 = \left(\frac{(\beta-1)t\dot{I}(t)}{I(t)}\right) + \frac{(\beta-1)^2 t^2 \ddot{I}(\xi)}{I(t)}.$$

Por hipótesis el lado izquierdo tiende a cero. Se ha probado previamente que el primer término en el lado derecho también tiende a cero. Por consiguiente para t lo suficientemente pequeño el segundo término en el lado derecho puede hacerse menor que $(\beta-1)^2\varepsilon$. Esto era precisamente lo que se quería probar. ∎

$\ddot{J}$ es positivo en el intervalo $[t_i^1, t_i^2]$

Volvemos ahora a la demostración del teorema. Como I tiende a $+\infty$ y es convexa, I es monótonamente decreciente cerca de 0. Por tanto podemos encontrar una expresión análoga a (3.16) (para ello véase (3.15) y úsese la monotonía de I), que en este caso tomará la forma $J(t_i) - J(t_i^2) \geq (C-\delta)I(t_i)$. Del mismo modo que se dedujo (3.19), cambiando en esta ocasión $L/2$ por $I(t_i)$, puede verse que para cada valor t_i existe alguna clase G_s tal que

$$|C_s(t_i) - C_s(t_i^2)| \geq \frac{(C-\delta)\,(m_0 I(t_i))^{1/2}}{4NM} \geq \frac{(C-\delta)\,(m_0 I(t_i))^{1/2}}{8NM}. \tag{3.22}$$

Usando la desigualdad (3.10), según la cual recordemos que se cumplía que $|\ddot{C}_s(t)| \leq \frac{B}{I}$ para todo $t \in [t_i^1, t_i^2]$, junto a la monotonía de I, llegamos a que

$$|\ddot{C}_s(t)| \leq \frac{B}{I(t_i^2)}, \quad \forall t \in [t_i^1, t_i^2]. \tag{3.23}$$

Por otro lado, si $\ddot{J}$ fuera no positiva para algún punto en el intervalo $[t_i^1, t_i^2]$, entonces, repitiendo el argumento previo que condujo a (3.21) en el caso acotado, se seguiría ahora la desigualdad análoga

$$\text{mín}\,|\dot{C}_s| \leq \left(\frac{BN(2M)^{1/2}}{m_0(I(t_i^2))^{1/2}}\right)^{1/2}. \tag{3.24}$$

Usando ahora el Lema 3.3 teniendo en cuenta las cotas (3.23) y (3.24), llegamos a que

$$|C_s(t_i) - C_s(t_i^2)| \leq \left\{ \left(\frac{BN(2M)^{1/2}}{m_0(I(t_i^2))^{1/2}} \right)^{1/2} + \frac{B}{I(t_i^2)} |t_i - t_i^2| \right\} |t_i - t_i^2| \leq$$

$$\leq t_{i-1} \left\{ \left(\frac{BN(2M)^{1/2}}{m_0(I(t_i^2))^{1/2}} \right)^{1/2} + \frac{Bt_{i-1}}{I(t_i^2)} \right\}.$$

Como por otro lado se tenía (3.22), se concluye que

$$\frac{(C-\delta)\,(m_0 I(t_i))^{1/2}}{8NM} \leq |C_s(t_i) - C_s(t_i^2)| \leq t_{i-1} \left\{ \left(\frac{BN(2M)^{1/2}}{m_0(I(t_i^2))^{1/2}} \right)^{1/2} + \frac{Bt_{i-1}}{I(t_i^2)} \right\}.$$

Como $\lim_{t \to 0^+} I(t) = +\infty$ y $\{t_i\} \to 0$, es claro que tomando i lo suficientemente avanzado el término de la derecha puede hacerse arbitrariamente próximo a cero, mientras que el término de la izquierda tenderá a $+\infty$.

Esta contradicción implica entonces que, para i lo suficientemente avanzado, se cumple que $\ddot{J}$ es positivo en el intervalo $[t_i^1, t_i^2]$.

Construcción y propiedades del punto t_i^3

Nos concentramos a continuación en probar:

Proposición 3.2. Para i lo suficientemente avanzado, existe un pequeño intervalo cerrado de tiempo, llamémosle W, de manera que $t_i \in \operatorname{int}(W) \subset W \subset [t_i^1, t_i^2]$ y en el que se cumplen las siguientes dos propiedades:

(a) $I(t) - J(t) \leq \delta\, I(t)\,, \ \forall t \in W.$
(b) Existe algún punto en el interior de W en el cual la derivada de $I - J$ es negativa. Se llamará entonces t_i^3 a ese punto. (Nótese que este punto no está determinado de manera única.)

Demostración. Comenzamos teniendo en cuenta en primer lugar la fórmula (3.14), de acuerdo a la cual

$$J(t_i^j) \leq (1 - C)\, I(t_i^j)\,, \;\; j = 1, 2\,.$$

De aquí deducimos que para $j = 1, 2$ se cumple que

$$I(t_i^j) - J(t_i^j) \geq C\, I(t_i^j) \geq 2\delta\, I(t_i^j) > \delta\, I(t_i^j)\,, \tag{3.25}$$

donde en la segunda desigualdad se ha usado que $C \geq 2\delta$.

En segundo lugar, por la desigualdad (3.12), se tendrá que

$$I(t_i) - J(t_i) < \delta\, I(t_i)\,. \tag{3.26}$$

Debido al hecho de que $I(t_i) - J(t_i) < \delta\, I(t_i)$, por continuidad es claro que existe un pequeño intervalo cerrado de tiempo, W_a de manera que $t_i \in \operatorname{int}(W_a) \subset W_a \subset [t_i^1, t_i^2]$ y tal que $I(t) - J(t) \leq \delta\, I(t)\,,\; \forall t \in W_a$.
Es decir, este intervalo W_a ya cumple la propiedad (a).

En cuanto a la propiedad (b), comenzamos tomando un i lo bastante avanzado de manera que I sea decreciente en el intervalo $]0, t_i^2]$.

Definimos a continuación el conjunto $\mathfrak{Z} := \{t \in [t_i^1, t_i] :\; I(t) - J(t) - \delta\, I(t) = 0\}$.
Se tiene que $\mathfrak{Z} \neq \emptyset$, puesto que por un lado (3.25) implica que $I(t_i^1) - J(t_i^1) - \delta\, I(t_i^1) > 0$ y por otro lado (3.26) implica que $I(t_i) - J(t_i) - \delta\, I(t_i) < 0$.
Además $\mathfrak{Z}$ es compacto, y puede definirse $t^* := \text{máx}\, \mathfrak{Z}$. Obviamente $I(t^*) - J(t^*) = \delta\, I(t^*)$.
Ahora bien, como I es decreciente en $]0, t_i^2]$ y $t^* < t_i$, se tendrá que

$$I(t^*) - J(t^*) = \delta\, I(t^*) \geq \delta\, I(t_i) > I(t_i) - J(t_i)\,,$$

donde la segunda desigualdad es (3.26).

Usando ahora el teorema del valor medio deducimos que existe un $t_i^3 \in]t^*, t_i[$ tal que $\dot{I}(t_i^3) - \dot{J}(t_i^3) < 0$.

Se define finalmente $W_b := [t^*, t_i]$, y tomando $W = W_a \cup W_b$ se consigue un intervalo cerrado que verifica todas las propiedades del enunciado. ∎

Lo realmente importante del resultado que se acaba de probar es que existe un $t_i^3 \in]t_i^1, t_i^2[$ cumpliendo las dos propiedades correspondientes:

(a) $I(t_i^3) - J(t_i^3) \leq \delta\, I(t_i^3)$
(b) $\dot I(t_i^3) < \dot J(t_i^3)$

Puesto que $I(t_i^3) - J(t_i^3) \leq \delta\, I(t_i^3)$, las fórmulas (3.12), (3.13), (3.15) y (3.22) se verifican con t_i reemplazado por t_i^3 (ya que fue precisamente una propiedad de esa forma pero en t_i la que se usó para deducirlas en su momento).

Para i lo bastante avanzado se tiene que $t_i^3 < \beta t_i^2\,,\ \forall \beta < 1$

Vemos ahora que para cualquier constante positiva $\beta < 1$ y para cualquier i lo bastante avanzado (y por tanto t_i lo suficientemente pequeño) se tiene que $t_i^3 < \beta t_i^2$. Supongamos que esto fuera falso; entonces para cada β, $0 < \beta < 1$, pueden encontrarse valores t_i arbitrariamente pequeños de manera que $\beta t_i^2 \leq t_i^3 < t_i^2$. Usando (3.14) y la expansión en serie de Taylor de J, se llega a que

$$(1 - C)\, I(t_i^2) \geq J(t_i^2) = J(t_i^3) + (t_i^2 - t_i^3)\, \dot J(\xi) \tag{3.27}$$

donde $\xi \in\ ]t_i^3, t_i^2[$.

Como $\ddot J$ es positiva, se tiene que $\dot J(t_i^3) < \dot J(\xi)$. Combinando esto con que $\dot I(t_i^3) < \dot J(t_i^3)$, se llega a que $\dot I(t_i^3) < \dot J(\xi)$.
Como por otro lado también se tenía que $J(t_i^3) \geq (1 - \delta)\, I(t_i^3)$ (lo cual viene de que $I(t_i^3) - J(t_i^3) \leq \delta\, I(t_i^3)$), la desigualdad (3.27) queda

$$(1 - C)\, I(t_i^2) \geq (1 - \delta)\, I(t_i^3) + (t_i^2 - t_i^3)\, \dot I(t_i^3)\,.$$

Usando finalmente que $\dot I(t_i^3)$ es negativa (ya que para i avanzado I es decreciente en $]0, t_i^2]$) y la suposición $\beta t_i^2 \leq t_i^3$ (y por tanto $t_i^2 \leq \beta^{-1} t_i^3$), obtenemos que

$$(1 - C)\, I(t_i^2) \geq (1 - \delta)\, I(t_i^3) + (\beta^{-1} - 1) t_i^3\, \dot I(t_i^3)\,.$$

Reescribiendo lo que hemos obtenido:

$$(1 - C) \frac{I(t_i^2)}{I(t_i^3)} \geq (1 - \delta) + (\beta^{-1} - 1) t_i^3 \frac{\dot I(t_i^3)}{I(t_i^3)}\,. \tag{3.28}$$

Puesto que $I \to +\infty$ monótonamente cuando $t \to 0$, llegamos a

$$1 \geq \frac{I(t_i^2)}{I(t_i^3)} \geq \frac{I(t_i^2)}{I(\beta t_i^2)}.$$

Como I es de variación lenta, el lado derecho tiende a 1. Por consiguiente el lado izquierdo de (3.28) puede hacerse arbitrariamente próximo a $(1-C)$ para todo t_i menor a una cierta constante. Por el Lema 3.4 el segundo término en el lado derecho de (3.28) tiene a cero. Pero como $0 < 2\delta \leq C < 1$, esto lleva a contradicción.

Por tanto si $0 < \beta < 1$, entonces $t_i^3 < \beta t_i^2$ para todo t_i menor que una constante, esto es, para i lo suficientemente avanzado.

Cota superior para mín $|\dot{C}_s|$ en el caso no acotado $I \to +\infty$

Por el Lema 3.4, el resultado obtenido en el apartado anterior implica que para un número positivo ε, el cual tomaremos de manera que

$$\varepsilon < \frac{m_0^{1/2}(C-\delta)}{16NM},$$

y para i lo suficientemente avanzado, existe cierto ξ en el intervalo $[t_i^3, t_i^2]$ tal que $\ddot{I}(\xi) \leq \dfrac{M\varepsilon^2 I(t_i^2)}{4(t_i^2)^2}$ (puede tomarse $\tilde{\varepsilon} := M\varepsilon^2/4$ en el enunciado del Lema 3.4). Por la definición de los términos involucrados,

$$0 \leq \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{p} M_k^{-1} \sum_{i,j\in G_k} m_i m_j (\dot{q}_i - \dot{q}_j)^2 = T - \frac{1}{2}\sum M_k \dot{C}_k^2.$$

(**Nota:** En la sumatoria $\displaystyle\sum_{i,j\in G_k}$ se están contando dos veces los índices; es decir, primero i, j y luego j, i para cada par de índices).

Usando la identidad de Lagrange-Jacobi y el hecho de que $\ddot{I} \to +\infty$, deducimos (para t_i menos que una constante) que en $t = \xi$

$$\frac{1}{2}\sum M_k \dot{C}_k^2 \leq T(\xi) = \ddot{I}(\xi) - h < 2\ddot{I}(\xi) \leq \frac{M\varepsilon^2 I(t_i^2)}{2(t_i^2)^2}.$$

Nótese que $(t_i^2)^2$ es el cuadrado del valor t_i^2.

Por consiguiente $|\dot{C}_s(\xi)| \leq \dfrac{\varepsilon I(t_i^2)^{1/2}}{t_i^2}$, y en concreto

$$\min |\dot{C}_s| \leq \frac{\varepsilon I(t_i^2)^{1/2}}{t_i^2}\,. \tag{3.29}$$

Obtención de la contradicción (en el caso no acotado $I \to +\infty$)

Usamos ahora el Lema 3.3 teniendo en cuenta las cotas (3.23) y (3.29), llegando a que

$$|C_s(t_i) - C_s(t_i^2)| \leq \left\{ \frac{\varepsilon I(t_i^2)^{1/2}}{t_i^2} + \frac{B}{I(t_i^2)}\,|t_i - t_i^2| \right\} |t_i - t_i^2|\,.$$

Usando que $t_i^1 < t_i < t_i^2 < t_{i-1}$, nos queda

$$|C_s(t_i) - C_s(t_i^2)| \leq (t_i^2 - t_i)\left(\frac{\varepsilon I(t_i^2)^{1/2}}{t_i^2} + \frac{B\,t_{i-1}}{I(t_i^2)} \right)$$

Usando que para i lo suficientemente avanzado I es decreciente en $]0, t_i^2]$ y que por tanto $I(t_i^2) < I(t_i)$, llegamos a que

$$|C_s(t_i) - C_s(t_i^2)| \leq \varepsilon I(t_i)^{1/2} + \frac{B\,t_i^2\,t_{i-1}}{I(t_i^2)}\,.$$

Teniendo ahora en cuenta esto último junto a (3.22), se obtiene

$$\frac{(C-\delta)(m_0 I(t_i))^{1/2}}{8NM} \leq |C_s(t_i) - C_s(t_i^2)| \leq \varepsilon I(t_i)^{1/2} + \frac{B\,t_i^2\,t_{i-1}}{I(t_i^2)}\,.$$

Como $\varepsilon < \dfrac{m_0^{1/2}(C-\delta)}{16NM}$, puede obtenerse una contradicción a esta desigualdad tomando i lo suficientemente avanzado (recordemos que $\{t_i\} \to 0$ y que $\lim\limits_{t\to 0^+} I(t) = +\infty$).

El teorema queda por tanto demostrado.

3.3 El problema de N cuerpos lineal

Como consecuencia del Teorema 3.1, vamos a obtener de manera inmediata un resultado sobre el problema de N cuerpos lineal:

Teorema 3.2. *En el problema de N cuerpos lineal todas las singularidades son debidas a colisiones.*

Demostración. Podemos suponer que las N partículas están situadas sobre el eje x y que están etiquetadas en orden ascendente, esto es, q_1 es la primera partícula empezando desde la izquierda y q_N es la última partícula. Del hecho de que $\sum m_i q_i = 0$ se sigue que $q_1 = x_1 \leq 0$ y que $q_N = x_N \geq 0$.
Supongamos que el teorema fuera falso. Por el Teorema 3.1 o el Corolario 3.1, la existencia de una singularidad de no colisión en $t = 0$ implica que $I \to +\infty$ cuando $t \to 0$. Esto implica, por (3.1) (en concreto, de $I \leq \dfrac{MR^2}{4}$, donde $R(t) := \text{máx}_{i \neq j} r_{ij}(t)$), que el distanciamiento máximo entre partículas va a infinito. Como las partículas están constreñidas a permanecer sobre el eje x y no pueden cambiar su ordenación, $|x_N - x_1|$ es el distanciamiento máximo y $|x_N - x_1| \to +\infty$. Haciendo uso de $\sum m_i x_i = 0$ se sigue que x_N no está acotada cuando $t \to 0$ (de hecho, se sigue que $x_N \to +\infty$ cuando $t \to 0$). Para ver esto, supongamos que x_N estuviera acotada superiormente. Como $|x_N - x_1| \to +\infty$, se sigue que $m_1 x_1 \to -\infty$. Como el centro de masas está fijo, esto da lugar a que $\displaystyle\sum_2^N m_i x_i = -m_1 x_1 \to +\infty$. Esto significa que existe alguna partícula x_i tal que $\limsup x_i = +\infty$. Por la ordenación de las partículas, x_N está a la derecha del resto de partículas. Por tanto $\limsup x_N = +\infty$. Esta contradicción prueba la afirmación.
La ecuación de movimiento para $q_N = x_N$ es

$$m_N \ddot{x}_N = \sum_{j \neq N} \frac{m_N m_j (x_j - x_N)}{|x_j - x_N|^3} .$$

Debido a la ordenación de las partículas, el punto x_i para $i = 1, 2, \ldots, N-1$ está a la izquierda de x_N; por consiguiente $\ddot{x}_N < 0$ para todo tiempo en el que el movimiento esté definido. Esto es, x_N es cóncava en el dominio de definición. Como $x_N \geq 0$, eso implica que x_N está acotada cuando $t \to 0$. Pero como esto contradice la afirmación de que x_N no estaba acotada, el teorema queda probado. ∎

4 Las colisiones son de primera categoría

4.1 Preliminares

Comenzamos recordando el Corolario 3.1 del Capítulo 3, el cual puede reformularse como:

"Una singularidad ω es una colisión si y sólo si el límite cuando $t \to \omega$ del momento de inercia I es finito". O equivalentemente: "Una singularidad ω es una pseudocolisión si y sólo si el límite cuando $t \to \omega$ del momento de inercia es infinito".

Observación 4.1. Si la singularidad ω es una colisión es claro que el límite cuando $t \to \omega$ del momento de inercia I es finito, puesto que por la propia definición de colisión las partículas q_i tenderán a un límite concreto, con lo cual $I := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i |q_i|^2$ tendrá por límite un cierto valor finito.
El recíproco lo da precisamente el Corolario 3.1.

Nos disponemos a demostrar, usando que el conjunto de condiciones iniciales que dan lugar a colisiones en el problema de N cuerpos tiene medida de Lebesgue cero[1], que dicho conjunto es también pequeño en un sentido topológico; en concreto, que es de primera categoría:

Teorema 4.1. *El conjunto de condiciones iniciales que dan lugar a colisiones es de primera categoría.*

[1]La demostración de que las colisiones son de medida nula puede encontrarse en [4, 5, 6], y con una prueba diferente publicada más recientemente en [3, 2].

4.2 Primera demostración

Seguiremos aquí lo expuesto en [8] por Donald Saari.

Supongamos que la conclusión del Teorema 4.1 fuera falsa; esto es, si el conjunto G es el conjunto de condiciones iniciales que dan lugar a colisiones, entonces supongamos que el conjunto G es de segunda categoría. Definamos el conjunto G_m, para $m \in \mathbb{Z}$, como el conjunto de condiciones iniciales con las propiedades de que (i) sus soluciones tienen su singularidad en el intervalo de tiempo $[m, m+1]$, y (ii) dicha singularidad es debida a colisiones. Claramente, $G = \bigcup G_m$.

Como el conjunto G se ha supuesto de segunda categoría y por otro lado puede expresarse como unión numerable de los conjuntos G_m, ha de existir algún entero m, digamos $m = \kappa$, tal que el conjunto G_κ es de segunda categoría. La reversibilidad temporal del sistema nos permite suponer que el entero κ es no negativo.

Sea $\{\eta_j\}$ una sucesión creciente de números positivos tal que $\eta_j \to +\infty$ cuando $j \to +\infty$. Definamos G^{η_j} como el conjunto de aquellas condiciones iniciales Υ tales que (i) $\Upsilon \in G_\kappa$ y (ii) si la solución correspondiente a Υ tiene una singularidad en el instante ω, entonces la solución tiene la propiedad de que $I(t) \leq \eta_j$ para $t \in [0, \omega[$. Teniendo en cuenta que si una singularidad ω es una colisión entonces el límite cuando $t \to \omega$ del momento de inercia I es un número finito concreto, junto a la continuidad de $I(t)$ en el intervalo $[0, \omega[$, y el hecho de que $\eta_j \to +\infty$ cuando $j \to +\infty$, se deduce que si $\Upsilon \in G_\kappa$, entonces existe un término η_j tal que $\Upsilon \in G^{\eta_j}$. Por consiguiente, $G_\kappa = \bigcup G^{\eta_j}$.

Puesto que el conjunto G_κ es un conjunto de segunda categoría, habrá alguna constante η_j, digamos $\eta_j = \eta$, tal que el conjunto G^η es de segunda categoría. Definamos el conjunto G^o como el interior de la clausura del conjunto G^η. Debido al hecho de que G^η es de segunda categoría, tenemos que el conjunto G^o es un conjunto abierto no vacío. Por consiguiente, el conjunto G^o tiene medida de Lebesgue positiva (esto es, no nula). En consecuencia, usando que el conjunto de condiciones iniciales que dan lugar a colisiones en el problema de N cuerpos tiene medida de Lebesgue cero, deducimos que existe un $\Upsilon \in G^o$ tal que $\Upsilon \notin G$.

Existen únicamente dos posibilidades para la condición inicial Υ. O bien la solución correspondiente a Υ no tiene ninguna singularidad en el intervalo de tiempo $[0, \kappa+1]$, o bien la solución tiene una singularidad de no colisión (es decir, una pseudocolisión) en el instante $\omega \in \,]0, \kappa+1]$. En el primer caso, tenemos de la dependencia continua de las soluciones con respecto a las condiciones iniciales que para $\varepsilon > 0$, existe una bola abierta de condiciones iniciales centrada en Υ y con la propiedad de que mientras existan las soluciones en el intervalo de tiempo $[0, \kappa+1]$, éstas difieren de la solución dada por Υ en a lo sumo ε. La solución dada por Υ está acotada en $[0, \kappa+1]$. Esto fuerza al resto de soluciones a estar acotadas mientras no se topen con una singularidad. Sin embargo, si en efecto se toparan con una singularidad, entonces la solución (que recordemos incluye posición y también momento) dejaría de estar acotada. Para ver esto último, téngase en cuenta que si ω es una singularidad, entonces $\lim_{t\to\omega} \rho(q(t)) = 0$ (Teorema 1.1), lo cual implica que $U \to +\infty$ cuando $t \to \omega$, lo que a su vez implica (por ser $h = T - U$ una cantidad conservada) que $T \to +\infty$ cuando $t \to \omega$.
En consecuencia, la dependencia continua con respecto a las condiciones iniciales nos da una bola abierta centrada en Υ con la propiedad de que las correspondientes soluciones existen en el intervalo de tiempo $[0, \kappa+1]$. Claramente, esta bola abierta es disjunta con los conjuntos G_κ y G^η; esto lleva a que $\Upsilon \notin G^o$, una contradicción.

Supongamos que la solución correspondiente al punto Υ tuviese una singularidad de no colisión en el instante $\omega \in \,]0, \kappa+1]$. De acuerdo al Corolario 3.1, existirá un cierto t, $t \in \,]0, \omega[$, tal que $I(t) \geq 3\eta$. Como la solución correspondiente a la condición inicial Υ existe en el intervalo de tiempo $[0, t]$, por la dependencia continua de las soluciones con respecto a las condiciones iniciales, tenemos que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una bola abierta centrada en Υ y con las propiedades de que (i) las soluciones correspondientes a puntos en esta bola existen en el intervalo de tiempo $[0, t]$ (para esto puede argumentarse como en el primer caso), y (ii) para cualquier instante de tiempo en este intervalo las soluciones difieren de la dada por Υ en a lo sumo una cantidad ε. En particular, existe una bola abierta centrada en Υ tal que las soluciones correspondientes tienen la propiedad de que $I(t) \geq 2\eta$. Claramente, esta bola abierta es disjunta con el conjunto G^η, contradiciendo la afirmación de que $\Upsilon \in G^o$. Como se ha contradicho la suposición de que el conjunto G es de segunda categoría, hemos completado la demostración del Teorema 4.1.

4.3 Segunda demostración

Sea $\Omega = \left[(\mathbb{R}^d)^N \backslash \Delta \right] \times (\mathbb{R}^d)^N$ el espacio de fases del problema de N cuerpos que se mueven en el espacio ambiente $\mathbb{R}^d$. Recordemos que Δ representaba el conjunto de colisión

$$\Delta = \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \Delta_{ij}, \qquad \Delta_{ij} = \{ q = (q_1, q_2, \ldots, q_N) \in (\mathbb{R}^d)^N \mid q_i = q_j \} .$$

Se tiene que Ω es abierto en $(\mathbb{R}^d)^N \times (\mathbb{R}^d)^N$ y que por tanto tiene la *propiedad de Baire*: cada punto tiene un entorno homeomorfo a un espacio métrico completo. (Recordemos que un espacio es de Baire si y sólo si es localmente un espacio de Baire).
Por tanto, en Ω se cumple el Teorema de la Categoría de Baire.

Dado $\Upsilon \equiv (X_0, V_0) \in \Omega$, denotaremos por $q(t; \Upsilon)$ a la solución $q = q(t)$ con condición inicial $q(0) = X_0$, $\dot{q}(0) = V_0$ y definida en un intervalo maximal a la derecha de la forma $[0, \omega_\Upsilon[$.

A continuación, dados dos números $T > 0$, $\eta > 0$, se define

$$G_{T,\eta} := \left\{ \Upsilon \in \Omega : \ \omega_\Upsilon \leq T \, , \ I(t; \Upsilon) \leq \eta \quad \forall t \in [0, \omega_\Upsilon[\right\} ,$$

donde $I(t; \Upsilon) := I(q(t, \Upsilon))$ es el momento de inercia asociado a la solución $q(t; \Upsilon)$.

Nos disponemos a probar que $G_{T,\eta}$ es un cerrado de Ω.

Sea $(X_{0n}, V_{0n}) \in G_{T,\eta}$, $(X_{0n}, V_{0n}) \to (X_0, V_0) \in \Omega$.
La solución correspondiente a (X_{0n}, V_{0n}), a la que denotamos por $q_n(t)$, está definida en $]0, \omega_n[$ con $\omega_n \leq T$ y cumple que $I_n(t) \leq \eta$, $\forall t \in [0, \omega_n[$.
Sea $q(t)$ la solución que cumple $q(0) = X_0$, , $\dot{q}(0) = V_0$, y está definida en un intervalo maximal a la derecha de la forma $[0, \omega[$.

Si $\omega > T$, por dependencia continua respecto a las condiciones iniciales $q_n(t)$ estaría definida en $[0, T]$ para n lo suficientemente grande, lo cual contradice que $\omega_n \leq T$.

Si $\omega \leq T$, fijamos $\varepsilon > 0$ y observamos que, por dependencia continua respecto a las condiciones iniciales, se verifica que $\omega_n > \omega - \varepsilon$ para n grande. Entonces $I_n(t) \leq \eta \quad \forall t \in [0, \omega - \varepsilon]$ y, pasando al límite (usando que por dependencia continua se cumple que $q_n(t) \to q(t)$), se deduce que $I(t) \leq \eta \quad \forall t \in [0, \omega - \varepsilon]$.

En consecuencia, como ε es arbitrario, se concluye que $(X_0, V_0) \in G_{T,\eta}$.

Podemos describir el conjunto de condiciones iniciales con colisión en el futuro, al que denotamos por Coll, como

$$\text{Coll} = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} G_{n,m} \,.$$

El hecho de que el conjunto Coll se puede expresar de esta manera es consecuencia de la definición de singularidad de colisión y del Corolario 3.1. (Recuérdese también que los únicos tipos de singularidades en el problema de N cuerpos son las colisiones y las pseudocolisiones).

Como cada $G_{n,m}$ es cerrado y de interior vacío (esto último como consecuencia de que Coll es de medida nula en Ω), concluimos que Coll es de primera categoría en Ω.

4.4 Un resultado adicional sobre la topología del conjunto de todas las singularidades

El siguiente resultado es válido en general para cualquier ecuación diferencial ordinaria en la que haya dependencia continua respecto a las condiciones iniciales (además de existencia y unicidad de solución).
Seguiremos lo expuesto en [8] por Donald Saari (aunque ahí se presenta para el caso concreto del problema de N cuerpos).

El conjunto de condiciones iniciales que dan lugar a una singularidad en algún instante de tiempo es un conjunto F_σ (esto es, puede expresarse como unión numerable de conjuntos cerrados). Para ver esto, sea S_κ el conjunto de condiciones iniciales cuyas correspondientes soluciones tienen a una singularidad en algún instante de tiempo del intervalo $[-\kappa, \kappa]$, donde κ es un entero positivo. La afirmación anterior es entonces una consecuencia del siguiente resultado:

Teorema 4.2. *El conjunto S_κ es un conjunto cerrado.*

Demostración. Supongamos que existe $\Upsilon \in \overline{S_\kappa}$ tal que $\Upsilon \notin S_\kappa$.
Entonces, como consecuencia de que $\Upsilon \notin S_\kappa$, la solución correspondiente a Υ existe en el intervalo de tiempo $[-\kappa, \kappa]$. Pero, por dependencia continua de las soluciones con respecto a las condiciones iniciales, existe una bola abierta de condiciones iniciales centrada en Υ tal que las correspondientes soluciones existen en el mismo intervalo de tiempo.
Lo que se acaba de obtener es una contradicción con el hecho de que $\Upsilon \in \overline{S_\kappa}$. ∎

Conclusiones

A pesar de la intensa labor de investigación llevada a cabo en el problema de los N cuerpos, la cual se extiende a lo largo de varias décadas e incluso siglos, aún hoy día quedan importantes cuestiones sin resolver.

En este sentido destaca por ejemplo el hecho de que se desconoce si las pseudocolisiones son, como sí se sabe de las colisiones, improbables (esto es, de medida nula). Esto supone que la abundancia de soluciones singulares en general es todavía una incógnita.

Asimismo, es interesante notar a este respecto que la mera existencia de pseudocolisiones fue durante varias décadas un misterio. Fue precisamente Painlevé, que como se ha visto había probado que en el caso de tres cuerpos tales singularidades de no colisión eran imposibles, quien conjeturó a finales del siglo XIX que en general para cuatro o más cuerpos existían singularidades de no colisión.

A pesar de que en 1973 en [7] Saari muestra su inclinación por pensar que de hecho todas las singularidades eran debidas a colisiones, en 1988 Zhihong Xia, en su tesis doctoral dirigida por el propio Saari, logró construir un complejo ejemplo de singularidad de no colisión [10]. Esto muestra la dificultad subyacente a la obtención de este tipo de resultados.

Finalmente, y con objetivos mucho más modestos, terminamos apuntando a la posibilidad de que, siguiendo argumentos análogos a los usados en [3, 2] para probar que las colisiones son de medida nula, pueda probarse de manera directa (sin hacer uso del resultado en [7]) que las soluciones son de primera categoría. Esto constituiría una demostración alternativa a la que ha sido expuesta en esta memoria de dicho hecho.

Bibliografía

[1] Cabral, H., and Diacu, F. *Classical and celestial mechanics: the Recife lectures.* Princeton University Press, 2002.

[2] Fleischer, S., and Knauf, A. Improbability of Collisions in n-Body Systems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis 234*, 3 (2019), 1007–1039.

[3] Fleischer, S., and Knauf, A. Improbability of Wandering Orbits Passing Through a Sequence of Poincaré Surfaces of Decreasing Size. *Archive for Rational Mechanics and Analysis 231*, 3 (2019), 1781–1800.

[4] Saari, D. G. Improbability of collisions in Newtonian gravitational systems. *Transactions of the American Mathematical Society 162* (1971), 267–271.

[5] Saari, D. G. Erratum to "Improbability of collisions in Newtonian gravitational systems". *Transactions of the American Mathematical Society 168* (1972), 521.

[6] Saari, D. G. Improbability of collisions in Newtonian gravitational systems II. *Transactions of the American Mathematical Society 181* (1973), 351–368.

[7] Saari, D. G. Singularities and collisions of Newtonian gravitational systems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis 49*, 4 (1973), 311–320.

[8] Saari, D. G. Collisions are of first category. *Proceedings of the American Mathematical Society 47*, 2 (1975), 442–445.

[9] Siegel, C. L., and Moser, J. K. *Lectures on Celestial Mechanics.* Springer, 1971.

[10] Xia, Z. The Existence of Noncollision Singularities in Newtonian Systems. *Annals of Mathematics 135*, 3 (1992), 411–468.