SOBRE UNA FAMÍLIA D'APLICACIONS QUE PRESERVEN L'ÀREA

Armengol Gasull Embid

SOBRE UNA FAMÍLIA D'APLICACIONS QUE PRESERVEN L'ÀREA

Armengol Gasull Embid

Memòria presentada per a
optar al grau de Llicenciatura
de Matemàtiques.

Juliol 1982

Director : Jaume Llibre Saló

ÍNDEX

0. Introducció

En aquest treball estudiarem els iterats de la família d'aplicacions de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, $T_{a,b}$ donada per

$$T_{a,b}(x,y) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos r^b & \sin r^b \\ -\sin r^b & \cos r^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

on $r=(x^2+y^2)^{1/2}$ i a i b són paràmetres reals positius.

Aquesta aplicació ja ha estat estudiada per Easton [E], per ésser un model senzill d'aplicació twist pertorbat.

A la Proposició (5.14) es veu que podem estudiar només el cas $a<1$, ja que $a>1$ es redueix facilment a aquest.

Donarem a la secció 1 tota la nomenclatura i els Teoremes que utilitzarem a tot el treball, en particular en el Teorema 1.24 la millor versió actual del Teorema de Kolmogorov-Arnold--Moser-Rüssman [R] per a aplicacions twist pertorbat de classe C^p, amb $p>3$.

Al final de la secció 1 i a la secció 2, donarem dos dels motius que fan que tingui interès l'estudi d'aplicacions twist pertorbat :(i) A un entorn de'un punt el.líptic d'una aplicació que preserva l'àrea aquesta es comporta genèricament com un twist pertorbat (Teorema 1.28).(ii) L'aplicació de Poincaré associada a un sistema Hamiltonià amb dos graus de llibertat en moltes ocasions s'expressa com un twist pertorbat (secció 2).

A la secció 3 ens ocuparem d'aplicacions T tals que $T(-x)=-T(x)$. Per a aquestes aplicacions les corbes invariants per T^n i les varietats invariants de l'origen tenen simetries (Lema 3.5, Proposició

3.6). Per a twist pertorbats d'aquest tipus es millora el Teorema de Poincaré-Birkhoff (Proposició 3.7).

Utilitzant [D] i [De] estudiem a la secció 4 sistemes dinàmics donats per aplicacions T, S-reversibles. Per a aquestes aplicacions un cert conjunt de punts n-periòdics (els punts n-periòdics simètrics) ve determinat per les imatges d'uns pocs conjunts. A la Proposició (4.5) i al Corol.lari (4.7) s'obtenen resultats sobre simetries de corbes invariants per T^m i sobre l' existència de punts homoclínics i heteroclínics.

La secció 5 està dedicada a veure que $T_{a,b}$ defineix efectivament un sistema dinàmic discret diferenciable, que és un twist per a=1 i un twist pertorbat per a≠1. Hom aplicarà també els resultats de les seccions 3 i 4, ja que $T_{a,b}$ compleix les hipòtesis adients; aquests resultats es recullen a la Proposició 5.12. Aplicarem també a $T_{a,b}$ els teoremes KAM i de Poincaré-Birkhoff.

A la secció 6 trobarem tots els punts fixos de $T_{a,b}$ i els classificarem. També estudiarem el naixement dels punts 2-periòdics de $T_{a,b}$ i la seva distribució al pla, veurem els que provenen del trencament dels cercles de punts 2-periòdics de $T_{1,b}$, els que provenen de bifurcacions dels punts fixos (figura 6.5) i els que venen de talls amb tangència de dues corbes perfectament determinades. Tambe provarem que d'aquests punts n'hi ha de simètrics respecte $\pm S_a$ (aplicacions que fan de $T_{a,b}$ $\pm S_a$-reversible).

Dedicarem la secció 7 a estudiar un cert conjunt d'òrbites, les òrbites creixents, d'una aplicació T, tal que la imatge de tot cercle que envolta a l'origen talla a aquest en un nombre finit de punts. A la Proposició 7.5 es donarà el conjunt límit d'aquestes òrbites.

Farem un estudi concret d'aquestes òrbites per $T_{a,b}$ i veurem amb ell la impossibilitat de l'existència de corbes invariants prop de l'origen per a certs valors de a (Proposició 7.10). Trobarem també totes les òrbites n-periòdiques de mòdul constant de $T_{a,b}$ (Proposició 7.12).

Finalment a la secció 8 es fa un estudi numèric sobre la desaparició de les corbes invariants que envolten l'origen per $T_{a,b}$ amb b=3. . L'última d'aquestes corbes (treballant amb precisió 10^{-3} respecte del paràmetre a) es troba per a=1.274. Aquesta orbita té un nombre de rotació $\rho=(0.23084...)/2\pi$.

Sembla que la desaparició d'aquestes corbes ve acompanyada de l'escap de les varietats $W^s(0)$ i $W^u(0)$ a l'infinit. També es troben, per a=1.29, punts, per exemple (0.1,0.), tals que $T^n(0.1,0.)$ és lluny de l'origen per $n > 300.000$.

Agraïments

Em cal agrair al Dr. Jaume Llibre la bona disposició i l'interès que ha mostrat en la direcció d'aquesta tesina. També haig d'agrair al Dr. Gerard Gómez l'ajuda que m'ha prestat, especialment en la part numèrica del treball així com a la Maria Jolis i en Gregori Guasp, i en general l'agradable ambient de treball que hi ha a la Secció de Matemàtiques de la U.A.B. .