UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

FACULTAT DE CIÈNCIES

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES

ESTUDI QUALITATIU D'ALGUNES CLASSES D'EQUACIONS DIFERENCIALS AL PLA

ARMENGOL GASULL I EMBID

ESTUDI QUALITATIU D' ALGUNES CLASSES D' EQUACIONS DIFERENCIALS AL PLA.

Armengol Gasull i Embid.

Memòria presentada per a aspirar al grau de doctor en Ciències Matemàtiques.

Departament de Matemàtiques.
Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, Abril del 1986.

CERTIFICO que la present memòria ha estat realitzada per Armengol Gasull i Embid, i dirigida per mi, al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, Abril del 1986

Dr. Jaume Llibre i Saló.

Als meus pares.

ÍNDEX.

Pàg.

INTRODUCCIÓ.

L' estudi de les equacions diferencials al plà té una llarga història a les Matemàtiques i a les Ciències Físiques. Potser els exemples més coneguts siguin el problema de l'oscil.lador de van der Pol, o el sistema quadràtic d'equacions diferencials de Lotka-Volterra com a model matemàtic d'un sistema depredador-presa.

Un dels problemes més coneguts en aquesta direcció és el plantejat en la segona part del Problema 16 de Hilbert [Bulletin of the AMS 8 (1902), p.465]:

... I wish to bring forward a question which, it seems to me, may be attacked by the ... method of continuous variations of coefficients, and whose answer is of ... value for the topology of families of curves defined by differential equations. This is the question as to the maximun number and position of Poincaré's boundary cycles (cycles limites) for a differential equation of the first order and degree of the form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X},$$

here X and Y are rational integral functions of the n th degree in x and y.

Hi ha un problema previ a aquest i menys ambiciós que és el següent: Veure que cada equació diferencial polinomial té un nombre finit d'òrbites periòdiques.

Poincaré va resoldre genèricament aquest segon problema en el següent sentit: Si considerem X_n com l' espai de tots els camps vectorials $X = (P, Q)$ on $P,Q:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ són polinomis de grau menor o igual que n, llavors podem associar a cada punt de $\mathbb{R}^{(n+1)(n+2)}$ un camp X biunívocament. Aleshores Poincaré [Sur les courbes definies par une equation differentielle, Obres Completes, vol 1] va demostrar que hi ha un subconjunt de X_n, amb interior buit, fora del qual tot $X \in X_n$ té un nombre finit de cicles límit (en principi no té perque ser afitat).

Dulac a [Sur les limit cycles, Bull. Soc. Math. France 51 (1923), 45-188] creia que havia resolt totalment aquest darrer problema, però va cometre un error en la demostració de que l' aplicació de Poincaré associada a un cicle separatriu no podia tenir una acumulació de punts fixos. Malgrat que la seva demostració no era totalment correcta moltes de les seves idees són encara utilitzades per a intentar resoldre el problema de la finitud dels cicles límit. Un dels resultats més recents és el degut a S. Il'yasenko [Func. Ana. and Appl. 18, 3, (1985), 189-209] que ens assegura que un cicle separatriu en el que tots els seus vèrtexs són punts de sella no degenerats no pot ser acumulació de cicles límits. Usant aquest darrer resultat més un estudi cas per cas, en Bamon a [Solution of Dulac's problem for quadratic vector fields, Preprint IMPA (1985)] prova que cada equació diferencial quadràtica té un nombre finit de cicles límit.

En la present Memòria no realitzem un estudi general de les equacions diferencials polinomials. Ens preocupem, als Capítols 1, 2 i 3, d' equacions diferencials quadràtiques i al Capítol 4 d'una família d' equacions diferencials, la donada pels camps $X(v) = A\,v + f(v)\,B\,v$ on A i B són matrius 2 x 2 i f és una funció de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ complint certes hipòtesis.

Els Capítols 1 i 2 són d' una estructura semblant. En el Capítol 1 estudiem les equacions diferencials quadràtiques sense punts crítics finits, obtenint tots els retrats de fase a l' esfera de Poincaré. Al Capítol 2 estudiem les equacions diferencials quadràtiques amb un únic punt crític finit. En aquest segon capítol ja ens trobem totes les dificultats que presenta l' existència de cicles límit. Podem caracteritzar quines equacions diferencials quadràtiques amb una una única singularitat finita tenen com a màxim un cicle límit. Els únics sistemes quadràtics amb una única singularitat finita que poden tenir més d' un cicle límit es poden escriure com:
$\dot{x} = y+px^2+xy$, $\dot{y}= -x+by+(\ell+bp)x^2+(m+b)xy$ amb les condicions $p>0$, $(1+\ell)^2-4pm<0$ i $(m+b-p)^2-4(\ell+bp)>0$. Els quals provem que poden arribar a tenir tres cicles límit.

En el Capítol 3 donem un criteri d' existència i unicitat de cicles límit (Theorem A) que apliquem a vàries famílies d' equacions diferencials quadràtiques estudiades també per altres autors. Aquest criteri està basat en l' estudi de les solucions de l' equació d' Abel

$$\frac{dr}{d\theta} = A(\theta)r^3+B(\theta)r^2+C(\theta)r+D(\theta)$$

que compleixen $r(0) = r(2\pi)$.

En el Capítol 4 estudiem el retrat de fase i el nombre de cicles límit de l' equació $\dot{v} = A\,v + f(v)\,B\,v$, ja mencionada, sota certes hipòtesis sobre A, B i f. Les tècniques usades són similars a les utilitzades al capítol anterior. Demostrem que el màxim nombre de cicles límit per a aquesta equació és dos.

Aquest resultat generalitza el de Chicone [Limit cycles of a class of polynomial vector fields in the plane, Preprint of University of Missouri, 1984] que demostra que si l'origen de l'equació diferencial és repulsor aquesta té exactament un cicle límit. Les eines que usem són substancialment diferents de les usades en el treball de Chicone.

Cada capítol té una introducció detallada i per aquest fet no ens hem estès més en aquesta introducció general.

Els quatre capítols d' aquesta Memòria poden ser llegits de manera quasi independent. Als Capítols 1, 2 i 3 hi ha diversos apèndixs que són citats a qualsevol dels tres capítols. A més, cada un d' ells té les seves pròpies referències.

Els resultats del Capítol 1 apareixeran publicats a Rocky Mountain Journal of Mathematics, i els del 3 i 4 en dos treballs independents al Journal of Differential Equations, sota els noms de "Chordal Quadratic Systems', "Some theorems on the existence, uniqueness and nonexistence of limit cycles for quadratic systems" i "Limit cycles of vector fields of the form: $X(v) = A v + f(v) B v$ ", respectivament. Aquests treballs són fets en col.laboració amb el Dr. Jaume Llibre, i a més amb el Dr. Sheng Li-Ren, Bartomeu Coll i Dr. Jorge Sotomayor, respectivament. El Capítol 2 forma part d' un treball conjunt amb en Bartomeu Coll.

No voldria deixar d' expressar el meu agraïment al Dr. Jaume Llibre per l' estímul que m' ha donat en tot moment i la dedicació amb que ha dirigit aquest treball.

Bellaterra, Abril de 1986.