

CONTROL SOBRE EL NUMERO DE CICLOS LIMITE DE UNA ECUACION DIFERENCIAL
MEDIANTE EL ESTUDIO DE LAS BIFURCACIONES EN SU UNICO PUNTO CRITICO

Armengol Gasull

Departament de Matemàtiques, Facultat de Ciències, Universitat Autònoma
de Barcelona, Bellaterra 08193, Barcelona.

ABSTRACT. The plane differential equation $\dot{v}=Av+f(v)Bv$ has been already studied by several authors : Koditschek y Narendra ; Chicone; Gasull, Llibre y Sotomayor. Under some hypotheses on A , B and f this equation has either two, or one or none limit cycle. By studying the limit cycle bifurcations in a neighborhood of its unique critical point, $v=0$, we give an explanation of the reason for which the differential equation studied has sometimes two limit cycles and sometimes no limit cycles. We also show that in an adequate complex coordinate system the number of limit cycles is always three.

CLASSIFICATION AMS (1980) : 34C05.

1. INTRODUCCION. En varios trabajos anteriores (ver [KN1], [KN2], [Chi], [GLL], [GLLS1], [GLLS2]) se ha estudiado el número de ciclos límite del sistema de ecuaciones diferenciales

$$(1) \quad \dot{v} = Av + f(v)Bv ,$$

en el cual $v=(x,y) \in \mathbb{R}^2$, A y B son matrices 2×2 y f es una función suficientemente regular cumpliendo $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^D \bar{f}(\theta)$ (por abuso de notación diremos que f es homogénea de grado D). Se imponían en todos ellos unas condiciones adicionales sobre A , B y f que permitían asegurar que el infinito tiene un entorno negativamente invariante. Estas condiciones son :

H_1 : $(JB)_s$ y $(B^t JA)_s$ son definidas y tienen el mismo signo. Aquí $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C_s = (C+C^t)/2$.

H_2 : Existe un v_0 tal que $\text{Tr}(B)\bar{f}(v_0) < 0$.

En este trabajo nos preocuparemos solamente del caso en que el origen (que bajo las hipótesis H_1 y H_2 es la única singularidad de (1)) es un foco o un centro lineal y f toma valores positivos y negativos.

Los resultados esenciales sobre ciclos límite obtenidos en los trabajos anteriormente citados pueden resumirse de la siguiente forma:

R_1 : Si el origen de (1) es un foco repulsor entonces (1) tiene exactamente un ciclo límite que es hiperbólico y estable.

R_2 : Si el origen de (1) es un centro lineal entonces (1) tiene exactamente un ciclo límite que es hiperbólico y estable o no tiene ciclos

límite.

R_3 : Si el origen de (1) es un foco atractor entonces (1) tiene o bien dos ciclos límite (que son hiperbólicos, el interior estable y el exterior inestable), o un ciclo límite (que es semiestable), o no tiene ciclos límite.

R_4 : Si suponemos que f es una función homogénea en el sentido usual (e. d. $f(kx,ky)=k^D f(x,y)$) y D es impar entonces en R_2 y R_3 la única posibilidad es la de no existencia de ciclos límite.

El objetivo principal de este trabajo es refinar R_2 , R_3 y R_4 , es decir, intentar discernir más explícitamente cual es el número exacto de ciclos límite. Esto será posible a veces localmente y otras veces globalmente. La idea esencial consiste en estudiar cuidadosamente las bifurcaciones que se producen en el origen considerando como parámetro el parámetro de estabilidad de dicho punto. El resultado principal es el siguiente:

TEOREMA. Consideremos el sistema de coordenadas en que (1) es tal que $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $b < 0$, y sea

$$B_a(\theta) = D\bar{f}(\theta) \langle B_s u, u \rangle + (\bar{f}(\theta) \langle (JB)_s u, u \rangle)' + 2a\bar{f}(\theta) \langle (JB)_s u, u \rangle / b$$

donde $u = (\cos\theta, \sin\theta)$. Si $c_a = 2 \int_0^{2\pi} B_a(\theta) d\theta$ y (1) cumple todas las hipótesis anteriormente mencionadas entonces existe $\epsilon > 0$ tal que:

(i) Si $c_a < 0$ y el origen es un foco atractor o un centro lineal, con $0 \geq a > -\epsilon$ entonces (1) no tiene ciclos límite.

(ii) Si $c_a > 0$ y el origen es un foco atractor o un centro lineal, con $0 \geq a > -\epsilon$ entonces (1) tiene exactamente dos ciclos límite y son hiperbólicos.

(iii) Si $c_a = 0$ y el origen es un foco atractor o un centro lineal entonces (1) no tiene ciclos límite.

La demostración de (iii) esta basada en una idea de J. Llibre. Esta idea tambien ha aparecido en [LL2]. Veremos que R_4 es un caso particular de (iii).

2. CAMBIOS DE COORDENADAS. Con un cambio lineal de coordenadas podemos suponer que A tiene la expresión dada en el enunciado del Teorema. Usando las coordenadas polares generalizadas $x = r^{1/D} \cos\theta$, $y = r^{1/D} \sin\theta$, y posteriormente el cambio de coordenadas introducido por Cherkas [Che] $\rho = r/(b+r\bar{f}R)$, $\theta = \theta$ (que es un difeomorfismo en la region de R^2 en que los ciclos límite de (1) pueden existir (ver [GLLS1])) tenemos que la expresión de (1) viene dada por

$$(2) \quad d\rho / d\theta = A_a(\theta)\rho^3 + B_a(\theta)\rho^2 + aDb^{-1}\rho$$

en donde $A_a = D\bar{f}^2(aR-bQ)/bR$, $B_a = D\bar{f}Q - 2aR/b - (\bar{f}R)'$, $Q = \langle B_s u, u \rangle$,

$R = -\langle (JB)_s u, u \rangle$, $\bar{f} = \bar{f}(\theta)$ y $u = (\cos\theta, \sin\theta)$.

La ecuación (2) es la ecuación con la que trabajaremos constantemente. Observemos que las funciones A_a y B_a son funciones homogéneas de grados $2D+4$ y $D+2$ respectivamente, además, debido a la hipótesis H_1 se puede demostrar que $A_a(\theta) \geq 0$, y que $A_a(\theta)$ no es idénticamente 0.

Notemos que los ciclos límite de (1) se han transformado en órbitas solución de (2) con $\rho(\theta) < 0$ cumpliendo que $\rho(0) = \rho(2\pi)$. Por abuso de notación llamaremos cerradas a estas órbitas.

3. RESULTADOS PRELIMINARES. El origen de la ecuación diferencial (1) se ha transformado en la solución $\rho = 0$ de (2). Por tanto una manera de estudiar las bifurcaciones en un entorno del origen será el de considerar la "aplicación de Poincaré" $h(x) = \rho(2\pi, x)$, donde $\rho(\theta, x)$ es la solución de (2) que cumple $\rho(0, x) = x$, en un entorno de $x = 0$. Para el estudio de las derivadas de dicha aplicación necesitamos el resultado siguiente que es una generalización de la Proposición 5.3 de [GLLS1]. La demostración del mismo está basada en el Teorema de la función implícita.

Seguiremos la siguiente notación: sean I y K los intervalos $[0, 1]$ y $[-1, 1]$, respectivamente. Para la aplicación $h: I \times K \rightarrow I$ escribiremos $h_a(x)$ en lugar de $h(x, a)$ y diremos que h_a es una familia uniparamétrica de aplicaciones.

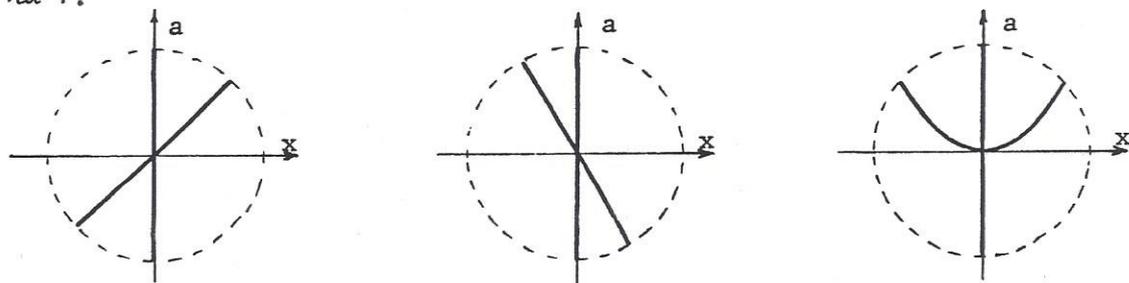
LEMA 1. Supongamos que $h: I \times K \rightarrow I$ es una familia uniparamétrica de aplicaciones que satisface las propiedades:

- (1) h_a es una función derivable, al menos de clase C^3 ,
- (2) $h_a(0) = 0$,
- (3) $d(h_a(x))/dx \big|_{x=0, a=0} = 1$,
- (4) $d^2(h_a(x))/dx da \big|_{x=0, a=0} < 0$,

y una de las tres condiciones siguientes:

- (5) $d^2(h_a(x))/dx^2 \big|_{x=0, a=0} > 0$,
- (5)' $d^2(h_a(x))/dx^2 \big|_{x=0, a=0} < 0$,
- (5)'' $d^2(h_a(x))/dx^2 \big|_{x=0, a=0} = 0$, $d^3(h_a(x))/dx^3 \big|_{x=0, a=0} > 0$.

Entonces existe un entorno de $(0, 0)$ tal que los puntos fijos de $h_a(x)$ en el plano x, a tienen una gráfica del tipo mostrado en la Figura 1.



Condición (5)

Condición (5)'

Condición (5)''

Figura 1. Puntos fijos de $h_a(x)$ según las condiciones que cumplan las derivadas de h_a en un entorno de $(0, 0)$.

Usando las fórmulas dadas por Lloyd [LL1] (ver también [GLL]) tenemos el siguiente resultado

LEMA 2. Si llamamos $h_a(x)$ a la aplicación de Poincaré definida anteriormente para la ecuación (2) y consideramos a como parámetro se cumplen los siguientes resultados:

$$h_a(0)=0, \quad d(h_a(x))/dx|_{x=0, a=0}=1, \quad d^2(h_a(x))/dx da|_{x=0, a=0}=2\pi D/b < 0,$$

$$d^2(h_a(x))/dx^2|_{x=0, a=0}=2\int_0^{2\pi} B_0(\theta) d\theta, \quad d^3(h_a(x))/dx^3|_{x=0, a=0} > 0.$$

Necesitamos también un resultado conocido sobre ecuaciones del tipo (2).

PROPOSICION 3. (ver [P], [L], [GLLS1]). La ecuación (2) con $A_a(\theta) \geq 0$ tiene como máximo tres soluciones tales que $\rho(0)=\rho(2\pi)$, contando multiplicidades.

4. DEMOSTRACION DEL TEOREMA. Claramente una de las soluciones a las que se refiere la proposición anterior es $\rho=0$. La estabilidad de la misma viene dada por el signo de $-a$ (e. d. a positivo, estable y a negativo, inestable). La estabilidad de otra solución de $h(x)=x$ (es decir de otra órbita cumpliendo $\rho(0)=\rho(2\pi)$) se puede deducir de la demostración del Lema 1. Además por ser $A(\theta) \geq 0$ es fácil ver que si $x > 0$ es suficientemente grande $h_a(x) > x$ y que si $x < 0$ es tal que $-x$ es suficientemente grande $h_a(x) < x$.

Todos los hechos mencionados en el párrafo anterior más la Proposición 3 nos permiten obtener la Figura 2, en la que cada órbita cerrada de (2) se representa por el punto $(\rho(0), a)$ y además se indica esquemáticamente su estabilidad.

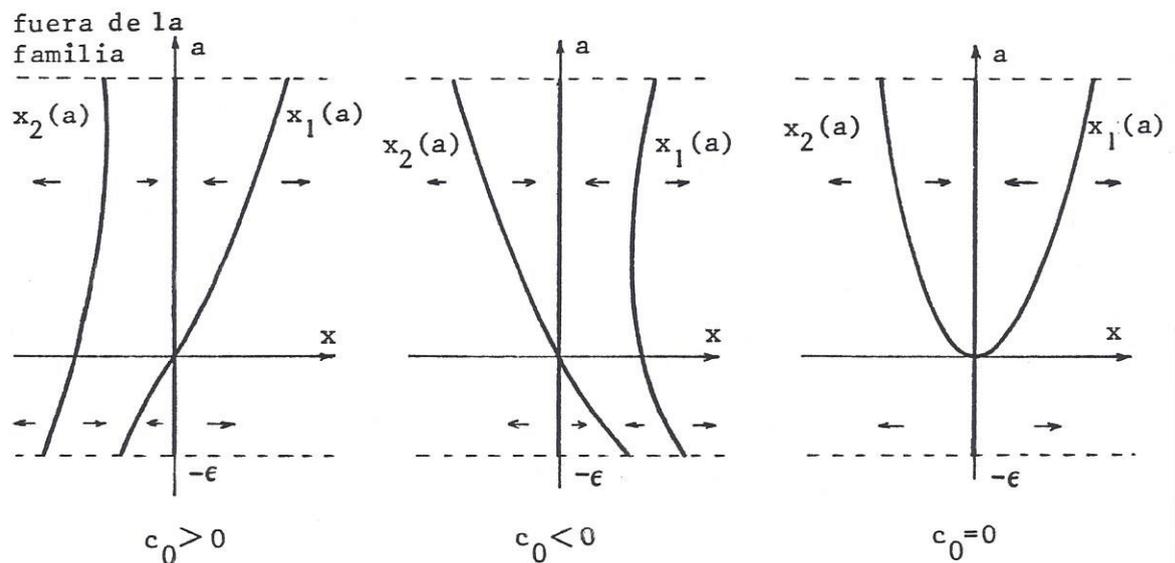


Figura 2. Órbitas cerradas de (2) representadas por el punto $(\rho(0), a)$ y una representación esquemática de su estabilidad.

Notemos que la estabilidad de las órbitas cerradas de (2) dada en la Figura 2 es contraria a la de los ciclos límite de (1) correspon-

dientes.

La Figura 2 nos da la demostración de (i) y (ii) del Teorema. La demostración de (iii) es la siguiente :

Consideremos la ecuación (2) en $\rho \neq 0$. Dividiéndola por ρ^2 tenemos $d(-1/\rho)/d\theta = A_a(\theta)\rho + B_a(\theta) + aD/(b\rho)$. Entonces si $\rho(\theta)$ es una órbita cerrada de (2) tenemos

$$0 = \int_0^{2\pi} A_a(\theta)\rho(\theta)d\theta + aDb^{-1} \int_0^{2\pi} (1/\rho(\theta))d\theta.$$

Entonces como $A_a(\theta) \geq 0$ si $aD/b \geq 0$ la igualdad anterior nunca es posible. Por tanto si $a \leq 0$ la ecuación (2) no tiene órbitas cerradas diferentes de $\rho=0$.

Observemos que R_4 se deduce de (iii) del Teorema ya que si f es homogénea en el sentido usual, como $B_a(\theta)$ es una función homogénea de grado $D+2$, si D es impar $\int_0^{2\pi} B_a(\theta)d\theta = 0$.

5. COMENTARIOS FINALES.

(i) Para tener un estudio completo de las órbitas cerradas de (2) y por tanto de los ciclos límite de (1) solo nos falta estudiar la región $a \leq -\epsilon < 0$. Si nos centramos en el caso $c_0 \neq 0$ el problema que nos falta estudiar es el de la evolución de las dos órbitas cerradas de (2) diferentes de $\rho=0$.

Es fácil obtener ejemplos de (a) de la Figura 3 (ver [GLLS1]). Otras evoluciones igualmente posibles vienen dadas por (b), (c) y (d) de la misma figura.

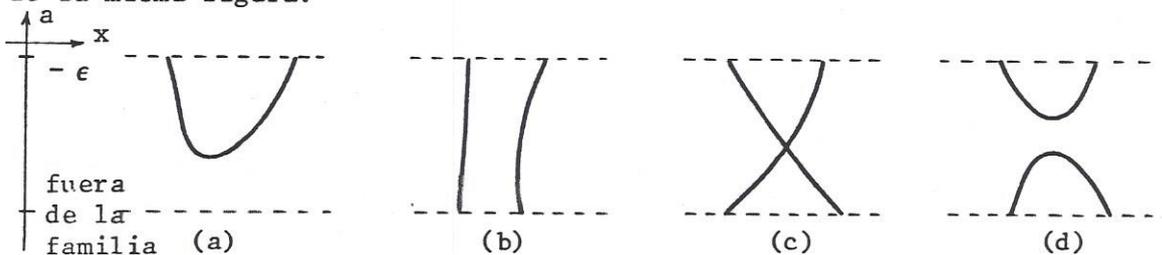


Figura 3. Posibles evoluciones de las dos órbitas cerradas de (2) cuando $c_0 \neq 0$ y $a \leq -\epsilon < 0$.

(ii) En el caso $c_0 = 0$ observamos que el número de trayectorias cerradas de (2) pasa al disminuir a de 3 a 1. Este fenómeno se traduce en (1) en pasar de tener un ciclo límite a no tener ninguno.

Podemos estudiar más detenidamente este cambio considerando en (2) $\rho(\theta) \in \mathbb{C}$. Usando los resultados de [ALL] podemos ver que cuando $c_0 = 0$ la ecuación (2) tiene siempre tres trayectorias cerradas, si $a > -\epsilon < 0$, contando multiplicidades. Esto equivale a decir que si $a < 0$ dos de ellas son complejas.

Por tanto hemos demostrado que la ecuación (1) que para $a > -\epsilon < 0$ puede tener 2, 1 o ningún ciclo límite es tal que en unas coordenadas polares adecuadas y con el radio complexificado tiene siempre tres "ciclos límite" contando multiplicidades.

Observemos por tanto, que como en otras ocasiones en matemáticas,

la introducción de los números complejos da una visión más clara y uni
ficada del problema.

6. REFERENCIAS

- [ALL] M.A.M. ALWASH, N.G. LLOYD, Non autonomous equations related to polynomial two-dimensional systems, por aparecer en los Proceedings of the Royal Society of Edimburg.
- [Che] L.A. CHERKAS, Number of limit cycles of an autonomous second-order system, Diff. Eq. 5, V. 12 (1976), 666-668.
- [Chi] C. CHICONE, Limit cycles of a class of polynomial vector fields in the plane, por aparecer en JDE.
- [GLL] A. GASULL, J. LLIBRE, Número de ciclos límite de una familia polinómica de ecuaciones diferenciales, por aparecer en las Actas del VIII CEDYA.
- [GLLS1] A. GASULL, J. LLIBRE, J. SOTOMAYOR, Limit cycles of vector fields of the form : $X(v)=Av+f(v)Bv$, por aparecer en JDE.
- [GLLS2] _____, Further considerations on the number of limit cycles of vector fields of the form : $X(v)=Av+f(v)Bv$, por aparecer en JDE.
- [KN1] D.E. KODITSCHKEK, K.S. NARENDRA, The stability of second order quadratic differential equations, IEEE Trans. Aut. Control AC-27(4) (1982), 783-798.
- [KN2] _____, Limit cycles of planar quadratic differential equations, JDE 54 (1984) 181-195.
- [L] A. LINS, On the number of solutions of the equation $dx/dt = \sum_{j=0}^n a_j(t)x^j$, $0 \leq t \leq 1$, for which $x(0)=x(1)$, Inv. Math. 59 (1980), 67-76.
- [LL1] N.G. LLOYD, A note on the number of limit cycles in certain two-dimensional systems, J. London Math. Soc. 20 (1979), 277-286.
- [LL2] _____, Limit cycles of certain polynomial systems, por aparecer en Nonlinear Functional Analysis and its Applications, ed. S.P. Singh NATO ASI Series C, vol. 173.