

Bótes i barrils



ARMENGOL GASULL

*Departament de Matemàtiques, Edifici C, Universitat Autònoma de Barcelona,
08193 Bellaterra (Barcelona) Spain. gasull@mat.uab.cat*

Rellegint l'enciclopèdia¹ amb la que vaig estudiar quan era petit, així com altres enciclopèdies i llibres antics que hi havia per casa (vegeu per exemple [3, 11]), vaig trobar un parell de fórmules que permetien calcular el volum d'una bóta de vi amb seccions circulars. Si anomenen D i d els diàmetres de la part més ampla i les bases de la bóta, respectivament, h la seva alçada i ℓ la distància entre el forat per omplir la bóta i l'extrem més allunyat d'aquest forat, vegeu la Figura 1, les fórmules eren

$$V_1 = \frac{11}{42}(2D^2 + d^2) \times h, \quad \text{i} \quad V_2 = 0.625 \times \ell^3 = \frac{5}{8} \ell^3. \quad (1)$$

Buscant per internet també vaig veure que a una plana web dedicada a la sidra ([16]) es donava la fórmula alternativa

$$V_3 = 0.82 \times D \times d \times h. \quad (2)$$

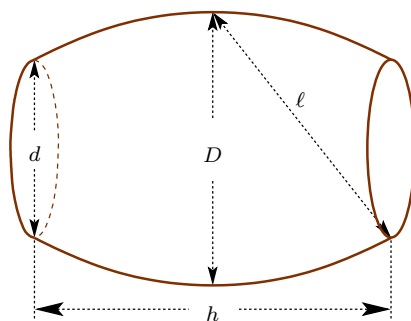


Figura 1. Mesures en una bóta de vi.

¹Als anys 50 i 60, com alguns de vosaltres segur que recordareu, a moltes escoles de Catalunya s'estudiava amb un llibre (enciclopèdia) que contenia totes les matèries i servia per molts d'anys. De fet, en alguns temes hi havia fins i tot dues mides de lletra, de manera que quan eres més petit només llegies la lletra més gran i en una segona passada, de més gran, ho havies d'estudiar tot.

Per a un matemàtic és un problema força suggerent trobar explicacions de la validesa de les tres fórmules. Amb una mica de reflexió, ben aviat un s'adona que la fórmula V_2 ha de pressuposar alguna informació addicional. No pot ser que només amb una mida ℓ ja puguem saber el volum de la bóta. De totes maneres aquesta fórmula ja fa molt de temps que s'usa a altres llocs del món, com per exemple a Àustria (consulteu la Secció 2) o Canàries (vegeu [7] i les seves referències) o també [1]. Per tant ha de ser “bona”, almenys en algun context. La fórmula V_3 també sembla poc natural.

L'objectiu principal d'aquest treball serà donar justificacions matemàtiques de les tres fórmules. Buscant en la literatura trobem altres treballs que han tingut una motivació similar (vegeu per exemple [6, 10, 15]). La fórmula V_1 es basa en el càlcul d'un volum de revolució, i en aproximar π per la fracció $22/7$. De fet, en el camí d'aquesta fórmula i d'altres ben semblants, ens trobarem a Kepler que es va interessar precisament per aquest problema i motivat pel mateix va ser el continuador d'Arquimedes en el càlcul de volums, abans de la creació del càlcul integral (vegeu [8]). Pel que sabem, les explicacions que donarem de les altres dues fórmules són originals.

És curiós saber que segons el diccionari de l'Institut d'Estudis Catalans, una barril és una bóta petita. Més concretament es diu que una bóta és “un recipient de fusta més llarg que ample, de secció transversal aproximadament circular, major en el centre que en els extrems, les bases del qual són dues peces de fusta i la superfície lateral està formada per dogues encorbades i acoblades mantingudes unides amb cercols de fusta o ferro, que serveix per a guardar i transportar vi i altres líquids, especialment de capacitat superior a quatre cargues”. Per altra banda, seguint la mateixa font, una carga de vi equival a 128 porrons, és a dir, a 121.60 litres. Per tant la diferència entre bóta i barril està sobre els 500 litres. En aquest treball hem decidit parlar només de botes, però tots els resultats que es donen són també aplicables als barrils.

1. VOLUMS DE REVOLUCIÓ: FÓRMULES EXACTA I APROXIMADA

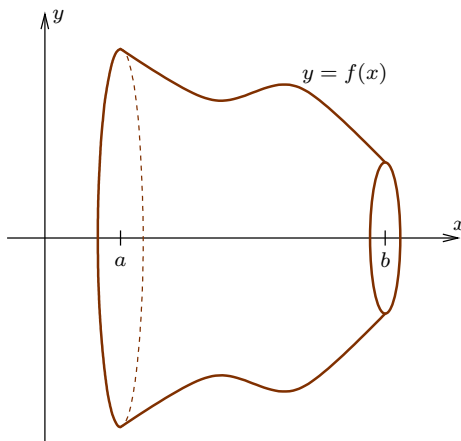


Figura 2. Un volum de revolució.

Donada una figura de revolució, respecte a l'eix OX i amb perfil $y = f(x)$, com la de la Figura 2, el seu volum ve donat per la fórmula

$$V_r = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \quad (3)$$

Quan la integral de $(f(x))^2$ és molt complicada de calcular, o bé la funció en qüestió no té primitiva expressable en termes de les funcions elementals, pot ser útil usar la fórmula d'integració de Simpson per a calcular una aproximació de V_r . Aquesta fórmula s'escriu com

$$\int_a^b g(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right) - \left(\frac{b-a}{2} \right)^5 \frac{g^{(IV)}(s)}{90}, \quad (4)$$

on s és un punt desconegut de l'interval (a, b) i $g^{(IV)}$ denota la derivada quarta de g . Si no tenim en compte el darrer terme (anomenat terme de l'error) obtenim una aproximació de la integral buscada.

Si apliquem aquesta fórmula aproximada al càlcul de la integral (3) arribem a

$$V_{ap} = \frac{b-a}{6} \pi \left((f(a))^2 + 4 \left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)^2 + (f(b))^2 \right), \quad (5)$$

o, en altres paraules,

$$V_{ap} = \frac{h}{6} (A_i + 4A_m + A_s) \quad (6)$$

on A_i, A_m i A_s són respectivament les àrees de les seccions inferior, mitjana i superior d'un volum de revolució, amb alçada h . Aquesta fórmula apareix a [10, p. 24] amb el nom de *fórmula universal*. El motiu d'aquest nom és que si s'aplica per a calcular el volum d'un prisma, cilindre, piràmide, con, piràmide truncada, con truncat (tots ells rectes) o una esfera, en tots els casos dóna el resultat exacte. De fet, per a les figures de revolució anteriors, que (6) ens doni el volum exacte és una conseqüència de l'expressió de l'error a la fórmula de Simpson (4). Observi's que en aquesta fórmula l'error és zero si l'apliquem a un polinomi g de grau menor que 4, ja que $g^{(IV)} = 0$. Per tant si fem girar perfils $y = f(x)$ de manera que $(f(x))^2$ sigui un polinomi de grau menor o igual que 3, el resultat obtingut usant (6) serà exacte. Aquest és el cas del cilindre, en què el grau de $(f(x))^2$ és 0 i del con, con truncat i esfera, tots amb grau de $(f(x))^2$ igual a 2. Així, per exemple, el volum d'una esfera de radi r serà

$$V = V_{ap} = \frac{2r}{6} (0 + 4\pi r^2 + 0) = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

1.1. Aplicació a les bótes de vi. Una explicació de la fórmula V_1 . Per tal d'aplicar les fórmules (3) i (5) posarem coordenades adients a certs punts de la bóta. Així, els punts superiors de les dues bases i el punt de més alçada seran $\mathbf{b}^\pm = (\pm h/2, d/2)$ i $\mathbf{c} = (0, D/2)$, respectivament (vegeu la Figura 3).

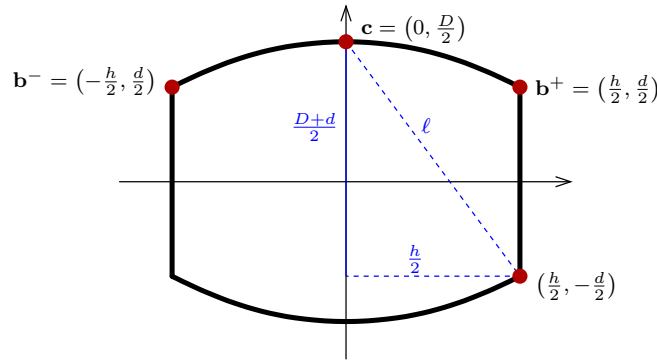


Figura 3. Coordenades en una bóta.

Ara tenim l'opció d'aplicar directament la fórmula universal (6), o bé buscar curves senzilles que tinguin un perfil similar al d'una bóta de vi i aplicar la fórmula (3). En el primer cas, obtenim

$$V_4 = \frac{h}{6} \left(\pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 + 4\pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 + \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right) = \frac{\pi}{12} (2D^2 + d^2) h.$$

Per la segona opció podem considerar diverses possibilitats:

(a) Perfil format per dos segments, els que uneixen els punts $\mathbf{b}^-$ i $\mathbf{c}$ i els punts $\mathbf{c}$ amb $\mathbf{b}^+$.

L'equació és:

$$y = \begin{cases} (D-d)x/h + D/2 & \text{per } -h/2 \leq x \leq 0, \\ (d-D)x/h + D/2 & \text{per } 0 \leq x \leq h/2, \end{cases}$$

i en aquest cas la figura de revolució es la unió de dos cons truncats.

(b) Perfil format per un tros d'el·lipse. La seva equació és:

$$y = \sqrt{\frac{d^2 - D^2}{h^2} x^2 + \frac{D^2}{4}}.$$

(c) Perfil format per un tros de paràbola. La seva equació corresponent és:

$$y = \frac{2(d - D)}{h^2} x^2 + \frac{D}{2}.$$

(d) Perfil donat per un tros de la funció cosinus. En aquest cas l'equació és:

$$y = \frac{D}{2} \cos\left(\frac{2 \arccos(d/D)}{h} x\right).$$

També es poden prendre altres perfils. Per exemple a [17] es considera el cas en que el perfil és un tros de circumferència.

Aplicant en cada situació la fórmula (3) arribem a diferents expressions per a obtenir el volum de la nostra bóta. Per exemple, en el cas (c) tenim

$$\begin{aligned} V_r &= \pi \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{2(d - D)}{h^2} x^2 + \frac{D}{2} \right)^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^{h/2} \left(\frac{4(d - D)^2}{h^4} x^4 + \frac{2(d - D)D}{h^2} x^2 + \frac{D^2}{4} \right) dx \\ &= 2\pi \left(\frac{4(d - D)^2}{5h^4} \left(\frac{h}{2} \right)^5 + \frac{2(d - D)D}{3h^2} \left(\frac{h}{2} \right)^3 + \frac{D^2}{4} \frac{h}{2} \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{(d - D)^2}{40} + \frac{(d - D)D}{12} + \frac{D^2}{8} \right) h \\ &= \frac{\pi}{60} \left(3(d - D)^2 + 10(d - D)D + 15D^2 \right) h = \frac{\pi}{60} (8D^2 + 4Dd + 3d^2) h. \end{aligned}$$

Fent uns càlculs similars en els altres tres casos anteriors obtenim les fórmules següents:

$$(a) \quad V_5 = \frac{\pi}{12} (D^2 + Dd + d^2) h.$$

$$(b) \quad V_6 = \frac{\pi}{12} (2D^2 + d^2) h.$$

$$(c) \quad V_7 = \frac{\pi}{60} (8D^2 + 4Dd + 3d^2) h.$$

$$(d) \quad V_8 = \frac{\pi D^2}{8} \left(1 + \frac{\frac{d}{D} \sqrt{1 - (d/D)^2}}{\arccos(d/D)} \right) h.$$

De fet, no caldria haver calculat V_6 fent servir (3) ja que hauriem pogut aplicar directament la fórmula de Simpson V_4 , perquè en aquest cas $(f(x))^2$ és un polinomi de grau 2. És clar que la fórmula V_5 és la pitjor de totes, ja que aproxima la bóta per dos cons truncats, que clarament tenen un volum menor que el que busquem. A més, per exemple, V_6 és sempre més gran que V_7 , ja que per a $D > d$,

$$V_6 - V_7 = \frac{\pi}{30} (D - d)^2 h > 0. \quad (7)$$

Si substituïm en les fórmules que ens donen $V_4 = V_6$ el nombre π , per la seva aproximació racional 22/7, deguda a Arquímedes, obtenim que

$$V_4 = V_6 \approx \frac{11}{42} (2D^2 + d^2) h = V_1,$$

arribant en conseqüència a una justificació matemàtica de l'expressió V_1 , tal i com desitjàvem.

Volem remarcar aquí que en la època de les enciclopèdies, en la que no es disposava encara de calculadores, era habitual treballar en els càlculs concrets amb aproximacions de π com 3.14, 3.1416 o el mateix 22/7 = 3.1428..., d'aquí ve que a la fórmula V_1 es prescindeixi de π i es posi directament una aproximació seva que doni lloc a una expressió amb nombres senzills. No podem deixar de mencionar aquí la fantàstica aproximació racional de π , 355/113, ja coneguda

des del segle V pel matemàtic xinès Tsu Ch'ung-Chih. De fet $|\pi - 355/113| < 3 \times 10^{-7}$. Aquestes aproximacions racionals són precisament dos dels convergents del desenvolupament de π en fracció continua

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \dots}}}}, \quad \frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7} \quad \text{i} \quad \frac{355}{113} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + 1}},$$

(vegeu [4, p. 68]). Acabarem aquesta secció amb alguns comentaris històrics sobre les fórmules $V_4 = V_6$ i V_5 i amb mencions a altres fórmules similars. La fórmula V_5 va ser donada per Johannes Kepler (1571-1630). Com que aquesta es basa en aproximar la bóta per la unió de dos cons truncats, ja es pot considerar coneguda des de l'època dels egipcis i babilonis ([15]). L'expressió V_6 (i en conseqüència la de V_1) és deguda al matemàtic anglès William Oughtred (1574-1660), inventor entre d'altres coses, del regle de càlcul.

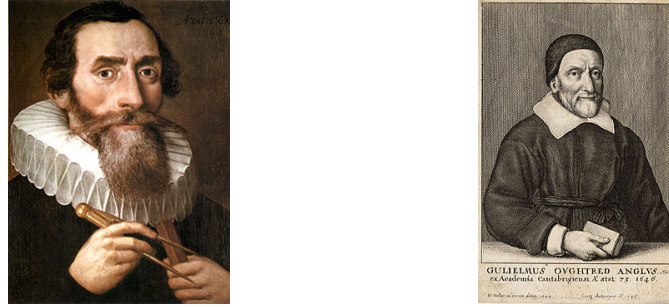


Figura 4. Johannes Kepler i William Oughtred.

De fet, les tres fórmules V_5 , V_6 i V_7 admeten un format comú:

$$V_{i,j,k} = \frac{\pi}{4} \frac{i D^2 + j D d + k d^2}{i + j + k} h, \quad (8)$$

amb (i, j, k) nombres naturals. És a dir que en totes elles el volum és $\pi h/4$ vegades una mitjana ponderada de D^2 , $D d$ i d^2 . Aquesta estructura és molt raonable, ja que en el cas particular d'una bóta cilíndrica ($D = d = 2r$), on r és el radi de la base, la fórmula anterior ens ha de proporcionar sempre el volum del cilindre

$$V_{i,j,k}|_{D=d=2r} = \frac{\pi}{4} d^2 h = \pi r^2 h.$$

La fórmula (8) ens dóna, per exemple, la senzilla fórmula donada a [6], que usa la mitjana de D i d ,

$$V_{1,2,1} = \frac{\pi}{4} \frac{D^2 + 2 D d + d^2}{4} h = \frac{\pi}{16} (D + d)^2 h,$$

les fórmules proposades l'any 1692 per John Newton, astrònom a Cambridge ([15]),

$$V_{10,0,5} = \frac{\pi}{4} \frac{10 D^2 + 5 d^2}{15} h \quad \text{i} \quad V_{8,0,7} = \frac{\pi}{4} \frac{8 D^2 + 7 d^2}{15} h,$$

la fórmula donada en una ordre Ministeri de l'Interior francès de l'any² 1799,

$$V_{4,4,1} = \frac{\pi}{4} \frac{4 D^2 + 4 D d + d^2}{9} h = \frac{\pi}{4} \left(d + \frac{2}{3} (D - d) \right)^2 h,$$

²A [17] és parla de Pluviós de l'any VII, sense cap més explicació. De fet, els anys del calendari revolucionari francès s'acostumaven a escriure amb xifres romanes, i es comptaven a partir de l'inici de l'Era Republicana, que començà el dia 22 de setembre de 1792. Així, per exemple, el numeral romà VII indica el setè any -o any 7- de la República francesa. Els mesos tenien noms relacionats amb la natura. Així els mesos d'hivern eren Nivós, Pluviós i Ventós.

o la fórmula proposada per M. Dez, professor a l'Escola Reial Militar francesa l'any 1773 ([5]), usada per exemple en un reglament de duanes a la illa de Cuba l'any 1847,

$$V_{25,30,9} = \frac{\pi}{4} \frac{25 D^2 + 30 D d + 9 d^2}{64} h = \frac{\pi}{4} \left(d + \frac{5}{8} (D - d) \right)^2 h.$$

Per a aquesta darrera fórmula es proposava també reemplaçar el valor $5/8 = 0.625$ per $2/3 \approx 0.667$ si la bóta era molt combada (precisament la fórmula anterior), o per 0.55 , o 0.6 en cas contrari ([6]), donant lloc a les fórmules $V_{121,198,81}$ i $V_{9,12,4}$, respectivament. Altres fórmules d'aquest tipus, així com un manual d'ús de regles de càlcul per a calcular volums de bótes es pot trobar a [9]. És fàcil veure que totes les fórmules de la forma

$$V = \frac{\pi}{4} \left(d + \frac{p}{q} (D - d) \right)^2 h, \quad 0 < \frac{p}{q} < 1, \quad \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

també donen lloc a fórmules del tipus (8) amb $(i, j, k) = (p^2, 2(q - p)p, (q - p)^2)$.

L'expressió de V_8 és totalment diferent i sembla ser que només té interès matemàtic, veure [17].

2. LA BODA DE KEPLER

L'any 1613, Kepler va decidir comprar unes quantes bótes de vi per a les celebracions de la seva segona boda. Quan va veure la manera en la que el venedor mesurava la quantitat de vi que contenien les bótes va quedar estorat. L'home usava la fórmula $V_2 = 0.625 \ell^3$ donada a la introducció. Immediatament Kepler va començar a pensar quina havia de ser la forma de la bóta que li sortia més a compte triar, ja que és evident que entre bótes amb la mateixa distància ℓ el volum real no sempre és el mateix. Per aclarir bé el problema va tractar el cas “ideal” de bótes cilíndriques $D = d$ amb una ℓ fixada.

En aquest cas és clar que el volum ve donat per

$$V = V(h) = \frac{\pi}{4} d^2 h = \frac{\pi}{16} (4\ell^2 - h^2) h,$$

on hem usat que $d^2 + (h/2)^2 = \ell^2$, i que en aquest cas $D = d$ (vegeu la Figura 3). Per tal d'obtenir el màxim de $V(h)$ per a una ℓ donada, resolem

$$V'(h) = \frac{\pi}{16} (4\ell^2 - 3h^2) = 0,$$

obtenint $h = 2\ell/\sqrt{3}$, o equivalentment $\ell = \sqrt{3}h/2$ o $d = h/\sqrt{2}$. És fàcil veure que aquest valor de h és un màxim absolut quan $0 < h < 2\ell$, que és quan el problema té sentit. Recordeu que en el seu temps el càlcul diferencial no es coneixia i per tant va haver de resoldre la qüestió amb altres mitjans. La seva aproximació al problema va ser geomètrica (vegeu el Teorema V de la segona part de [8]).

A la Figura 5 podem veure un gravat i una fotografia on s'il·lustra el mètode d'aplicar la fórmula V_2 per a calcular volums de bótes. En castellà, aquest procediment té el nom de “aforo diagonal”. No he sabut trobar el nom català d'aquest mètode, però potser es podria anomenar *cabuda diagonal*.



Figura 5. Mètode de càlcul de volums basat en l'ús de la fórmula V_2 .

Per tant hem vist que si es compleix que $h \approx 2\ell/\sqrt{3}$ aleshores el mètode donat per la fórmula V_2 , suposant que la fórmula ens doni realment el volum, és just, en el sentit que no hi haurà bótes amb la mateixa ℓ amb essencialment menys capacitat.

Sembla ser que per les bótes d'Austria, que és on es casava, si que es compleix aproximadament aquesta proporció i això va tranquil·litzar relativament a en Kepler (consulteu [2, 8]). Però aquest fet no explica de cap manera la validesa de la fórmula V_2 . Per tant, segurament motivat per la seva insatisfacció, va seguir buscant fórmules millors per a calcular el volum d'un sòlid de revolució, escrivint un parell d'anys més tard el tractat *Nova stereometria doliorum vinariorum*, [8]. Aquest llibre ha estat, després de la contribució d'Arquimedes (287-212 a.C.), l'avangament més seriós juntament amb els de Bonaventura Cavalieri (1598-1647), en els càlculs d'àrees i volums fins al desenvolupament del càlcul diferencial i integral per part de Gottfried W. Leibnitz (1646-1716) i Isaac Newton (1642-1727).

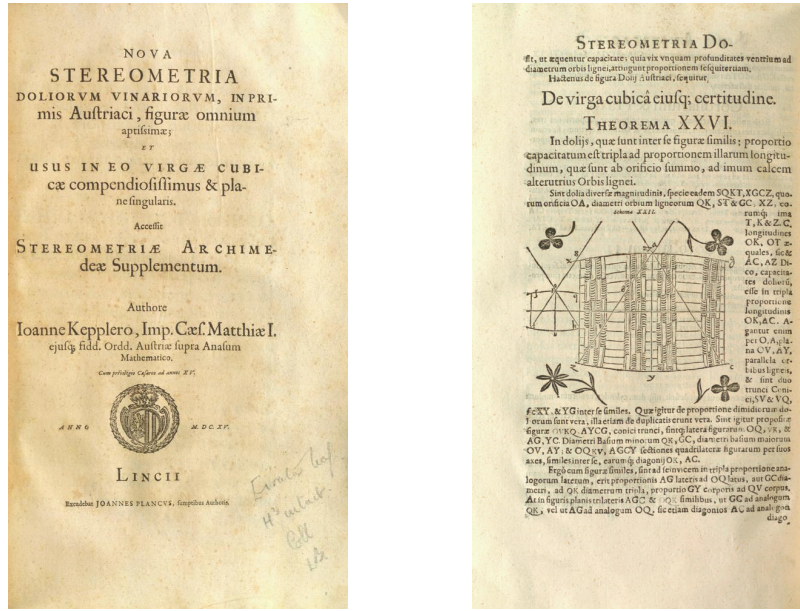


Figura 6. Portada i una plana del llibre de Kepler, *Nova stereometria doliorum vinariorum*.

Observi's finalment que a la discussió del primer paràgraf d'aquesta secció, basada en l'estudi d'en Kepler, no s'han considerat en cap cas bótes no cilíndriques. A continuació farem un estudi d'optimització similar per varies de les fórmules que hem obtingut en la secció anterior. Aquesta qüestió, usant només la fórmula V_5 , es tracta ja a [13].

Per a començar, serà útil introduir un nou paràmetre, $\rho = D/d \geq 1$ que ens mesura el bombament de la bóta, ja que $\rho = 1$ correspon al cas cilíndric. A més, observem que pel Teorema de Pitàgores, $4\ell^2 = (D + d)^2 + h^2 = (\rho + 1)^2 d^2 + h^2$, on el catet vertical és $D/2 + d/2$ (vegeu la Figura 3). Per tant,

$$d^2 = \frac{4\ell^2 - h^2}{(\rho + 1)^2}.$$

Aleshores les formules V_j per $j = 5, 6$ i 7 , es transformen en

$$V_j = \frac{\pi}{12} g_j(\rho)(4\ell^2 - h^2)h, \quad j = 5, 6, 7,$$

on

$$g_5(\rho) = \frac{\rho^2 + \rho + 1}{(\rho + 1)^2}, \quad g_6(\rho) = \frac{2\rho^2 + 1}{(\rho + 1)^2}, \quad \text{i} \quad g_7(\rho) = \frac{8\rho^2 + 4\rho + 3}{5(\rho + 1)^2}.$$

Ara, si considerem fixos el valors ℓ i ρ , tenim $V_j = V_j(h)$ i, com en el cas del cilindre en el que $g(\rho) \equiv 3/4$, la condició d'extrem és

$$V_j'(h) = \frac{\pi}{12} g_j(\rho)(4\ell^2 - 3h^2) = 0.$$

Per tant, en els tres casos obtenim que també $\ell = \sqrt{3}h/2$. Ara, si substituïm aquest valor d' ℓ a les tres funcions, obtenim el valors màxims següents pels corresponents volums

$$V_j^{\max} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{27} g_j(\rho)\ell^3, \quad j = 5, 6, 7.$$

Finalment si impossem que la fórmula V_2 sigui certa per aquestes bótes amb capacitat màxima (un cop ℓ i ρ han estat fixades) arribem a les tres equacions

$$\frac{4\pi\sqrt{3}\pi}{27} g_j(\rho) = \frac{5}{8}, \quad j = 5, 6, 7.$$

Aquestes equacions són equivalents a equacions quadràtiques de fàcil solució. Per exemple, per $j = 6$ tenim

$$(64\pi\sqrt{3} - 135)\rho^2 - 270\rho + 32\pi\sqrt{3} - 135 = 0,$$

amb solucions aproximades 1.0992... i 0.16690.... De fet, només ens interessa la solució més gran que 1, és a dir $\rho_6 \approx 1.1$. De manera similar obtenim $\rho_5 \approx 1.9$ i $\rho_7 \approx 1.1$. El fet que la forma de la bóta s'aconsegueixi forçant la fusta a corbar-se ens fa decidir per escollir només la fórmula V_7 , obtinguda usant el perfil parabòlic³, o bé la fórmula V_6 , que és una de les més usades i que recordem prové de l'anomenada fórmula universal. Volem remarcar aquí que la construcció efectiva de bótes no és gens fàcil. A la Figura 7 podem veure un pas del procés de construcció a una factoria moderna així com una fotografia antiga de boters treballant a Tarragona.



Figura 7. Construcció de bótes.

Fins ara, hem vist que té sentit aplicar la fórmula V_2 per les bótes en què $D/d \approx 1.1$. A la Taula 1 donem uns quants exemples de dades de bótes i barrils, o relacions entre D, d i h que hem recollit, juntament amb la seves respectives fonts.

Referència	D	d	h	cas
[6]	$18h/21$	$16h/21$	h	I
[17]	7.01 dm	6.06 dm	8.05 dm	II
[14]	10.5 pol.	9 pol.	12.25 pol.	III

Taula 1. Diverses relacions entre D, d i h .

³Igual que passa amb els regles flexibles de dibuix tècnic en les que la forma que agafa el regle és la de un “spline”, que està format per trossos de polinomis cúbics. El polinomi cúbic que passa pels punts $\mathbf{b}^\pm$ i $\mathbf{c}$ de la Figura 3 és, de fet, quadràtic

Observi's que en els casos I, II i III tenim que els valors de D/d són

$$\frac{18}{16} = 1.125, \quad \frac{701}{606} \approx 1.157 \quad \text{i} \quad \frac{105}{90} \approx 1.167,$$

respectivament, per tant, a primera vista l'ús de la fórmula sembla raonable per aquests casos. De l'estudi anterior s'obtenen les proporcions completes per les bótes que donen volum màxim per a unes ρ i ℓ fixades. Aquestes són

$$(D, d, h) = \left(\rho d, d, \frac{\rho+1}{\sqrt{2}} d \right) \quad \text{o, equivalentment,} \quad (D, d, h) = \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{\rho+1} h, \frac{\sqrt{2}}{\rho+1} h, h \right),$$

amb $\rho \approx 1.1$. Per tant, per aquestes bótes s'ha de complir també

$$\frac{d}{h} = \frac{\sqrt{2}}{\rho+1} \Big|_{\rho \approx 1.1} \approx 0.673.$$

Malauradament, aquestes dades no s'ajusten tan bé, ja que aquest cop en els casos I, II i III tenim que els valors de d/h són

$$\frac{16}{21} \approx 0.762, \quad \frac{606}{805} \approx 0.753 \quad \text{i} \quad \frac{900}{1225} \approx 0.734,$$

respectivament. És a dir, totes les bótes de la taula són una mica més baixes que les bótes amb capacitat màxima.

De totes maneres, a la secció següent veurem que per una gran varietat de mides de bótes la fórmula V_2 es pot aplicar sense cometre errors massa grans.

3. LES FÓRMULES V_2 I V_3

Dedicarem aquesta secció a buscar justificacions per a les fórmules V_2 i V_3 . És clar que es poden prendre valors D, d i h de manera que cap de les dues doni lloc a una aproximació raonable del volum real de la bóta. Per tant, el que farem serà considerar només dades de bótes i barrils reals. En particular usarem els valors introduïts a la Taula 1 de la secció anterior. Com ja hem vist en aquella secció, un cop coneguts D, d i h , és clar pel Teorema de Pitàgores que

$$\ell = \frac{1}{2} \sqrt{(D+d)^2 + h^2}, \quad (9)$$

(vegeu de nou la Figura 3). Per tant, podem usar qualsevol de les fórmules que hem donat a la Secció 1 per a trobar una estimació del volum de la bóta corresponent.

Els casos II i III corresponen a bótes concretes, però pensarem què aquests valors determinen les proporcions entre les dades. Així, per exemple en el cas II tindrem $(D, d, h) = k(701, 606, 805)$, per un cert $k > 0$. Observi's que qualsevol fórmula raonable per a calcular volums ha de complir

$$V(kD, kd, kh) = k^3 V(D, d, h) \quad \text{per a tot} \quad k > 0. \quad (10)$$

De fet, totes les que surten en aquest treball ho compleixen.

Així, aplicant al cas I la fórmula V_6 tenim,

$$\begin{aligned} V_6 &= \frac{\pi}{12} (2D^2 + d^2) h = \frac{\pi}{12} \left(2 \left(\frac{18}{21} \right)^2 + \left(\frac{16}{21} \right)^2 \right) h^3 \\ &= \frac{226}{1323} \pi h^3 = \frac{12\,656\sqrt{1597}}{2\,550\,409} \pi \ell^3 \approx 0.623 \ell^3. \end{aligned}$$

on hem usat que $h = 42 \ell / \sqrt{1597}$, tal i com es dedueix de (9). De manera similar, aplicant la fórmula V_7 , obtenim

$$\begin{aligned} V_7 &= \frac{\pi}{60} (8D^2 + 4Dd + 3d^2) h \\ &= \frac{\pi}{60} \left(8 \left(\frac{18}{21} \right)^2 + 4 \left(\frac{18}{21} \frac{16}{21} \right) + 3 \left(\frac{16}{21} \right)^2 \right) h^3 \\ &= \frac{376}{2205} \pi h^3 = \frac{63\,168\sqrt{1597}}{12\,752\,045} \pi \ell^3 \approx 0.622 \ell^3. \end{aligned}$$

Aquest resultat és força similar a l'anterior, i una mica menor com ja sabíem a priori per (7).

Fent els càlculs corresponents pel cas II obtenim

$$V_6 \approx 0.629 \ell^3 \quad \text{i} \quad V_7 \approx 0.628 \ell^3.$$

De manera similar, pel cas III arribem a

$$V_6 \approx 0.633 \ell^3 \quad \text{i} \quad V_7 \approx 0.631 \ell^3.$$

Per tant, hem trobat una primera explicació basada en dades reals del misteriós 0.625 que apareix a la fórmula de V_2 , ja que en tots els casos el volum s'ha pogut expressar com $c \ell^3$, per a una c molt propera a aquest valor.

3.1. Una justificació experimental de la fórmula V_2 . Hi ha un punt de vista totalment experimental per a intentar validar una fórmula del tipus

$$V = c \ell^3.$$

Considerem m bótes, per les quals mesurem els valors ℓ_j i de les que sabem les seves respectives capacitats V_j , $j = 1, 2, \dots, m$. Aleshores s'hauria de complir

$$V_j = c \ell_j^3, \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, m. \quad (11)$$

Clarament, encara que només sigui pels errors de mesura, el sistema anterior, amb m equacions i una sola incògnita, c , serà incompatible, però podem buscar la “millor” solució. De fet, sembla raonable prendre com valor candidat a millor solució una mitjana apropiada de les solucions de cadascuna de les m equacions. Tenim dos candidats clars, la mitjana aritmètica i la geomètrica, és a dir

$$c_1 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{V_j}{\ell_j^3} \quad \text{i} \quad c_2 = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^m \frac{V_j}{\ell_j^3}}. \quad (12)$$



Figura 8. Carl Friedrich Gauss i Adrien-Marie Legendre.

L'aproximació que hem fet és natural i tècnicament senzilla, a més, no usa per res l'anomenat mètode dels mínims quadrats per a trobar la millor solució de sistemes sobredeterminats i incompatibles. De fet, aquest mètode va ser desenvolupat per Gauss (1777-1855) i Legendre (1752-1833) de manera independent (avui en dia encara es polemitzava sobre quin dels dos matemàtics va ser el primer en fer-lo servir), molt temps després de l'aparició de la fórmula V_2 . Per

tant és més que plausible que els “descobridors” de aquesta fórmula fessin una anàlisi similar a l'exposat als paràgrafs anteriors per a trobar el valor 0.625.

De totes maneres aprofitarem aquí les idees de Gauss i Legendre i la potència del càlcul diferencial per buscar el valor més raonable de c usant les idees del mètode de mínims quadrats. La manera estàndard de buscar el millor c és linealitzar primer el problema i buscar després el corresponent valor de c . Així, en lloc de les equacions (11), considerarem les equacions equivalents

$$\ln(V_j) = C + 3 \ln(\ell_j), \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, m, \quad (13)$$

on $C = \ln(c)$. Direm que la millor aproximació és el valor de C que fa mínima la suma dels errors al quadrat comesos en cadascuna de les m equacions (13). Més concretament, definim la funció

$$E_1(C) = \sum_{j=1}^m \left(C + 3 \ln(\ell_j) - \ln(V_j) \right)^2,$$

i busquem el seu mínim. Aquest es pot obtenir imposant que $E_1'(C) = 0$. Els càlculs donen

$$E_1'(C) = 2 \sum_{j=1}^m \left(C + 3 \ln(\ell_j) - \ln(V_j) \right) = 2 \left(mC + \sum_{j=1}^m (3 \ln(\ell_j) - \ln(V_j)) \right) = 0,$$

i per tant el mínim s'obté si

$$C = \tilde{C} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\ln(V_j) - 3 \ln(\ell_j)).$$

Traslladant aquest resultat a la variable c arribem a què la millor solució és

$$c = \tilde{c} = e^{\tilde{C}} = \exp \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\ln(V_j) - 3 \ln(\ell_j)) \right) = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^m \frac{V_j}{\ell_j^3}},$$

és a dir la mitjana geomètrica proposada a (12).

Per altra banda, pel cas senzill $V = c \ell^3$, es pot intentar buscar directament l'aproximació mínim quadràtica, sense necessitat de linealitzar les equacions (11). Així, des d'aquest punt de vista el que volem és minimitzar la funció

$$E_2(c) = \sum_{j=1}^m \left(c \ell_j^3 - V_j \right)^2.$$

Imposant ara que $E_2'(c) = 0$, tenim

$$E_2'(c) = 2 \sum_{j=1}^m \left(c \ell_j^3 - V_j \right) \ell_j^3 = 2 \left(c \sum_{j=1}^m \ell_j^6 - \sum_{j=1}^m V_j \ell_j^3 \right) = 0.$$

Així, usant aquesta via, la millor aproximació per a c és

$$c = c_3 = \frac{\sum_{j=1}^m V_j \ell_j^3}{\sum_{j=1}^m \ell_j^6}.$$

Tenim doncs tres fórmules raonables per a obtenir el c que ajusti millor una fórmula del tipus $V = c \ell^3$, un cop disposem de les dades V i ℓ per a m bótes. Aquestes fórmules són:

$$c_1 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{V_j}{\ell_j^3}, \quad c_2 = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^m \frac{V_j}{\ell_j^3}} \quad \text{i} \quad c_3 = \frac{\sum_{j=1}^m V_j \ell_j^3}{\sum_{j=1}^m \ell_j^6}.$$

Avui en dia és cada cop més habitual substituir el treball pesat de camp, que consistiria en anar per diferents bodegues mesurant dades de bótes directament, per una simulació. Així,

prenent com a base les proporcions d'una bóta ideal donades a [6], és a dir $D = 18h/21$ i $d = 16h/21$, el que farem serà suposar

$$h = 1, \quad D = U\left(\frac{17}{21}, \frac{19}{21}\right) \quad i \quad d = U\left(\frac{15}{21}, \frac{17}{21}\right), \quad (14)$$

on $U(a, b)$ denota una variable aleatòria uniforme a l'interval $[a, b]$. A més agafarem les dues variables aleatòries independents. En altres paraules és com si suposéssim que cada bóta que agafem té mesures D, d, h on h és un valor arbitrari, $D = Kh$ i $d = kh$ on $17/21 < K < 19/21$, i $15/21 < k < 17/21$, i tots els valors K i k tenen la mateixa probabilitat. Observi's que no és restrictiu suposar $h = 1$ ja que, com hem dit, qualsevol fórmula per a calcular volums ha de complir (10).

Volem remarcar aquí que, amb aquest nou punt de vista, incloem també les bótes que tenen les proporcions donades a [10], que no hem considerat a la Taula 1. Per a veure-ho, notem que a [10] es diu que una bóta es construeix usualment de manera que el radi de la base major supera el radi de la base menor en una cinquena par d'ell mateix, és a dir $R = r + R/5$. En termes de diàmetres tenim que $4D = 5d$ i per tant $D/d = 5/4 = 1.25$. Precisament per a les variables (14) que considerem es compleix per la proporció màxima entre D i d és $19/15$, és a dir

$$1 \leq \frac{D}{d} \leq \frac{19}{15} \approx 1.27,$$

i per tant el cas que ens ocupa quedarà també cobert en aquest estudi.

A les Taules 2 i 3 donem els diferents valors c_j obtinguts quan simulem m bótes, per a diferents valors de m , amb les condicions esmentades a dalt i calculem els seus corresponents volums amb les fórmules V_6 o V_7 .

	$m = 50$	$m = 100$	$m = 500$	$m = 1000$	$m = 5000$
c_1	0.6255	0.6228	0.6236	0.6232	0.6231
c_2	0.6254	0.6228	0.6235	0.6231	0.6230
c_3	0.6252	0.6225	0.6233	0.6228	0.6228

Taula 2. Valors c_j obtinguts usant la fórmula V_6 per a calcular els volums.

	$m = 50$	$m = 100$	$m = 500$	$m = 1000$	$m = 5000$
c_1	0.6241	0.6216	0.6223	0.6219	0.6219
c_2	0.6240	0.6215	0.6222	0.6218	0.6218
c_3	0.6238	0.6212	0.6220	0.6216	0.6215

Taula 3. Valors c_j obtinguts usant la fórmula V_7 per a calcular els volums.

A la Figura 9 considerem $m = 500$. Hi podem veure 500 punts $(\ell_j, (V_6)_j)$ així com la corba $V = c_1 \ell^3$, on denotem per $(V_6)_j$ els valors calculats amb la fórmula V_6 .

Com a conseqüència d'aquestes simulacions podem concloure que $c = 0.625$ és un bon candidat per aproximar el volum si estem prop de la bóta "ideal", ja que qualsevol de les nostres sis famílies d'aproximacions dona un valor molt semblant a aquest. De fet, sembla que c hauria de ser una mica més petit, però potser és va triar 0.625 perquè és igual a $5/8$ que és una fracció amb numerador i denominador molt petits i, a més, és molt fàcil d'operar amb ella. Observi's que multiplicar per $5/8$ es pot fer de manera molt senzilla, i quasi de cap, ja que s'ha de multiplicar primer per 10 i fer la meitat, de la meitat, de la meitat, de la meitat, és a dir $5/8 = 10/2^4$.

Noteu també que hem triat variables aleatòries uniformes, en lloc de la tria potser més usual d'agafar variables aleatòries gaussianes, perquè no considerem que es construeixin les bótes

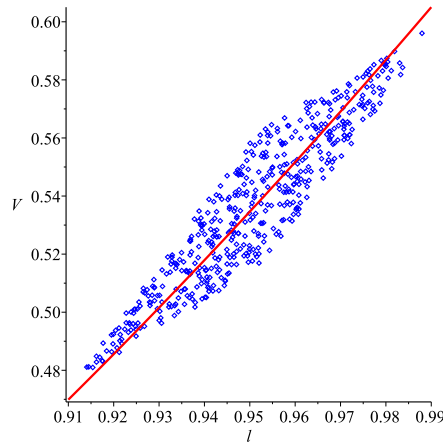


Figura 9. La corba $V = c_1 \ell^3$ i 500 punts $(\ell_j, (V_6)_j)$ calculats usant V_6 .

amb l'objectiu final $(D, d, h) = (18h/21, 16h/21, h)$ i que es produeixen errors sobre aquestes dades. El que pensem és que les bótes es construeixen amb aquesta idea a la ment, però tenint també en compte diferents idees estètiques, costums locals, o fins i tot la mida de les fustes a disposició, però en tot cas sense allunyar-se “massa” d'un estàndard tradicional.

Ens pot quedar encara el dubte de si la fórmula V_2 és vàlida per a les bótes que s'allunyin més de la proporció $(D, d, h) = (18/21, 16/21, 1)$. Per això anem a veure que passa si considerem pels valors de D i d variables aleatòries uniformes independents que prenguin valors més allunyats d'aquests valors ideals. Considerem, per $n \in \mathbb{N}$,

$$h = 1, \quad D = U_n = U\left(\frac{18-n}{21}, \frac{18+n}{21}\right) \quad i \quad d = W_n = U\left(\frac{16-n}{21}, \frac{16+n}{21}\right).$$

Amb aquestes notacions en les simulacions anteriors havíem considerat U_1 i W_1 . A la Taula 4 es mostren els valors c_1 obtinguts usant $m=1000$ i la fórmula V_6 per a diferents n . Observi's també que si $n > 1$ es generen també bótes amb $D < d$. Dels resultats d'aquesta taula es dedueix que 0.625 segueix sent el millor candidat per a bótes més allunyades de les proporcions base. De totes maneres, ser el millor candidat no es garantia de ser un bon valor per al càlcul dels volums com veurem a continuació.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
c_1	0.6236	0.6248	0.6247	0.6247	0.6239

Taula 4. Valors c_1 usant la fórmula V_7 per 1000 punts i per a diferents variables aleatòries U_n i W_n .

Amb aquesta finalitat, anem a veure quin error relatiu representa l'ús de V_2 en front de l'ús de V_6 . Per això, comencem definint el quadrats

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n &= \left\{ (D, d) : \frac{18-n}{21} \leq D \leq \frac{18+n}{21}, \frac{16-n}{21} \leq d \leq \frac{16+n}{21} \right\} \\ &= \left[\frac{18-n}{21}, \frac{18+n}{21} \right] \times \left[\frac{16-n}{21}, \frac{16+n}{21} \right], \end{aligned}$$

on viuen les lleis dels vectors aleatoris (U_n, V_n) . Per altra banda, considerem l'aplicació de $\mathbb{R}^2$ en ell mateix,

$$F(D, d) = \left(\frac{1}{2} \sqrt{(D+d)^2 + 1}, \frac{\pi}{12} (2D^2 + d^2) \right).$$

Observi's que precisament $F(D, d) = (\ell, V_6)$ per a una bóta amb mides D, d i $h = 1$. Per tant $F(\mathcal{Q}_n)$ dona les longituds i volums, segons V_6 de totes les bótes amb $(D, d) \in \mathcal{Q}_n$. A la Figura 10

podem veure $F(\mathcal{Q}_n)$, per a $n = 1$ i $n = 3$, juntament amb la corba $V = 0.625 \ell^3$. A més, és clar que els valors $(\ell_k, (V_6)_k)$ corresponents als punts (D_k, d_k) , que hem generat amb les variables aleatòries U_n i W_n , acaben omplint, quan m creix, els rectangles $F(\mathcal{Q}_n)$. Això es pot apreciar per exemple comparant la Figura 9 amb el gràfic de l'esquerra de la la Figura 10.

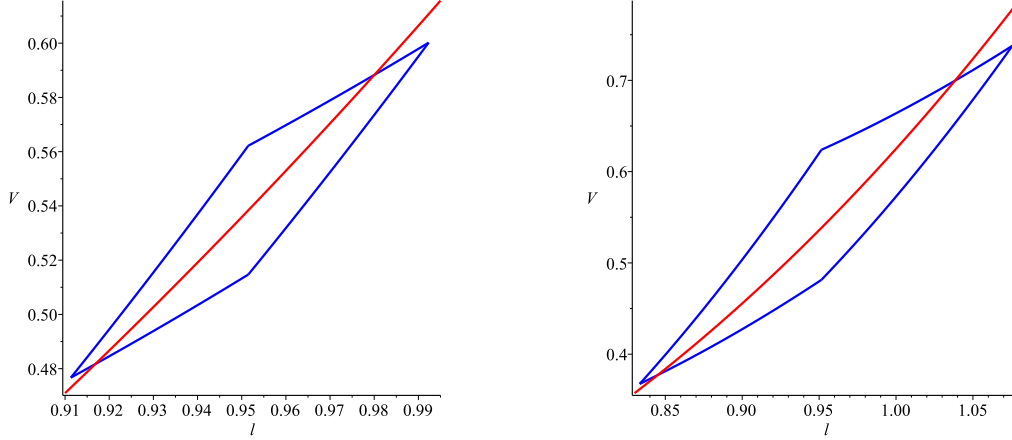


Figura 10. Conjunts $F(\mathcal{Q}_n)$ per $n = 1$ i $n = 3$ i corba $V = 0.625 \ell^3$.

A partir de les fronteres dels conjunt de la Figura 10, podem calcular fàcilment per a cada ℓ quin és el valor màxim de l'error relatiu quan aproximem V_6 per V_2 , és a dir de

$$\text{Er}(\ell) = \frac{V_6(D, d, 1) - V_2(\ell)}{V_6(D, d, 1)} \quad \text{quan} \quad \ell = \frac{1}{2} \sqrt{(D + d)^2 + 1}.$$

Els valors d'aquests errors relatius pels punts de la frontera de $F(\mathcal{Q}_3)$, donats al gràfic de la dreta de la Figura 10, són els que es representem a la Figura 11. Per tant, l'error relatiu màxim per aquest cas és d'un 14%. Si fem el mateix estudi per a altres valors de n obtenim el resultats de la Taula 5.

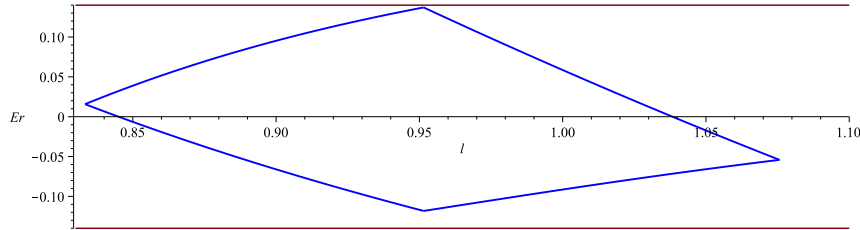


Figura 11. Errors relatius màxims en funció de ℓ quan aproximem V_6 per V_2 pels valors (D, d) a la frontera de $\mathcal{Q}_3$.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
Error relatiu	5%	9%	14%	19%	23%

Taula 5. Errors relatius màxims quan aproximem V_6 per V_2 per $(D, d) \in \mathcal{Q}_n$.

Així, en resum, la fórmula V_2 només dona valors raonables (error relatiu menor del 9%) quan les bótes compleixen les proporcions $(D, d, h) = (K h, k h, h)$ amb $(K, k) \in \mathcal{Q}_2$, és a dir quan

$$\frac{16}{21} \leq K \leq \frac{20}{21} \quad \text{i} \quad \frac{14}{21} \leq k \leq \frac{18}{21},$$

i això és cert fins i tot si $D < d$.

3.2. La fórmula V_3 . La fórmula V_3 obeeix a unes restriccions similars a la fórmula V_2 . De fet, si les dues són certes s'hauria de complir que $V_2 = V_3$, i per tant que $0.625 \ell^3 = 0.82 D d h$. Usant (9) obtenim que aquesta igualtat és equivalent a

$$V_2 = 0.625 \left(\frac{1}{2} \sqrt{(D+d)^2 + h^2} \right)^3 = 0.82 D d h = V_3.$$

Calculant una mica tenim que l'anterior igualtat és certa si

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{125}{1312} \frac{\left(\sqrt{(D+d)^2 + h^2} \right)^3}{d D h} = 1.$$

Anem a veure quan val aquest quocient en cadascun dels casos de la Taula 1. Per exemple, pel cas I obtenim

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{125}{1312} \frac{\left(\sqrt{(D+d)^2 + h^2} \right)^3}{d D h} = \frac{199\,625}{7\,934\,976} \sqrt{1597} \approx 1.005.$$

Pels casos II i III obtenim que V_2/V_3 val aproximadament 1.008 i 1.005, respectivament. En resum, per les bótes amb les proporcions “adients” (per les que la fórmula V_2 proporciona una bona aproximació del volum) la fórmula V_3 també és vàlida.

Per acabar, només comentar que per exemple al Midi francès també se sol utilitzar la fórmula

$$V_9 = 3.2 R r h,$$

on R i r son els radis respectius de les bases i la part més ampla de la bóta, és dir $D = 2 R$ i $d = 2 r$. És clar que de la fórmula V_3 tenim

$$V_3 = 0.82 D d h = 4 \times 0.82 R r h = 3.28 R r h \approx 3.2 R r h = V_9,$$

fet que justifica aquesta darrera manera de calcular volums.

De fet, a [12] es dona una explicació heurística de V_9 , a partir de la fórmula V_5 , amb la que acabarem aquest treball.

Expressant V_5 en termes dels radis R i r , tenim

$$\begin{aligned} V_5 &= \frac{\pi}{12} (D^2 + D d + d^2) h = \frac{\pi}{3} (R^2 + R r + r^2) h \\ &= \pi R r h + \frac{\pi}{3} (R - r)^2 h \geq \pi R r h. \end{aligned}$$

Observi's que a la penúltima expressió hem eliminat el terme $\pi(R - r)^2/3$, que per a bótes no massa bombades ha de ser un número bastant petit. Per tant, si el que fem es compensar aquesta pèrdua incrementant una mica π i posant al seu lloc 3.2, obtenim

$$V_5 = \pi R r h + \frac{\pi}{3} (R - r)^2 h \approx 3.2 R r h,$$

com volíem veure.

Agraïments. L'autor vol agrair al seu col·lega i amic Gori Guasp els seus comentaris, així com la seva ajuda en la preparació de les figures.

L'autor està recolzat pels projectes MINECO MTM2013-40998-P i per la Generalitat de Catalunya, projecte 2014SGR568.

REFERÈNCIES

- [1] L. BALBUENA CASTELLANO, *El vino y las matemáticas*, Vinalletas 3. Accesible a www.tacovin.com/dota/espanol/publicaciones.html
- [2] R. CARDIL, *Kepler: El volumen de un barril de vino i Kepler: Las proporciones óptimas de un barril de vino* a www.matematicasvisuales.com/html/historia/kepler/keplerbarril.html. Veure també la versió anglesa publicada per la Mathematical Association of America, *Kepler: The Volume of a Wine Barrel* a www.maa.org/publications/periodicals/convergence/kepler-the-volume-of-a-wine-barrel.
- [3] J. DALMAU CARLES, *Lecciones de aritmética*. Dalmau Carles, Pla S.A.-Ed. Girona 1926.
- [4] J.-P. DELAHAYE, *Le fascinant nombre π* . Pour la Science, Diffusion Belin 1997.
- [5] M. DEZ, *Mémoire sur la théorie du jaugeage*, pp. 383–389 a “Mémoires de mathématique et de physique”, Paris 1773.
- [6] J. M. GONZÁLEZ RODRÍGUEZ, *Tecnología Popular Tradicional: Medición de la Capacidad de Barriles y Toneles por métodos empíricos*. Suma 11-12, 1992, pp. 118–127.
- [7] J. M. GONZÁLEZ RODRÍGUEZ, *La matemática y la sabiduría popular de los canarios* publicat a “Sociedad, ciencia, tecnología y matemáticas”, coord. per M. I. Marrero Rodríguez i R. Trujillo González, 2004, 67–80
- [8] J. KEPLER, *Nova stereometria doliorum vinariorum*, 1615. Accesible per cortesia de “the Posner Memorial Collection of the Carnegie Mellon University Libraries” a posner.library.cmu.edu/Posner/books/book.cgi?call=520_K38PN.
- [9] G. MARTIN, *Reglas de cálculo para las bebidas alcohólicas utilizadas por la Aduana en Gran Bretaña*, Accesible a www.photocalcul.com/Calcul/Regles/Notices-regles/notices.html. Consultat el desembre de 2014.
- [10] Y. PERELMAN, *Geometria recreativa*. Editorial MIR, Moscou. Disponible a www.librosmaravillosos.com.
- [11] J. PLA CARGOL I J. M. PLA DALMÁU, *Enciclopedia Autodidáctica*. Dalmau Carles, Pla S.A.-Ed. Girona 1942.
- [12] E. ROUCHÉ I CH. DE COMBEROUSSE, *Éléments de géométrie*. Gauthier-Villars, Paris 1898.
- [13] B.-S. SHECHTER, *Kepler's wine barrel problem in a dynamic geometry environment*. Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics, at Hersonissos, Crete Greece, 2002.
- [14] G. U. A. VIETH, *Cours populaire des sciences mathématiques*. Hesse 1835.
- [15] W. WIESLAW, *Exempla mensurae capacitatis cuparum*. In Mathematics throughout the ages II, Praha, 2004, pp. 23–40.
- [16] Proceso y elaboración tradicional de la sidra Asturiana, veure <http://www.sidra-villaviciosa.es/4.html>. Consultat el desembre de 2014.
- [17] Tonneau(formules). Wikipèdia: [fr.wikipedia.org/wiki/Tonneau_\(formules\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/Tonneau_(formules)). Consultat el desembre de 2014.