

LA SÈRIE HARMÒNICA

ARMENGOL GASULL

En aquest treball estudiarem les propietats i aplicacions de la sèrie harmònica i de les seves sumes parcials. Començarem veient diferents proves de la seva divergència. Estudiarem diversos resultats clàssics sobre la convergència o divergència de les seves subsumes, com per exemple la dels inversos dels números primers o la dels inversos dels números que no tenen cap nou entre les seves xifres. També recollirem situacions en les quals aquesta sèrie o les seves sumes parcials apareixen. Així, entre d'altres, considerarem el problema del col·leccionista, el de la secretària, el dels rècords en sèries de dades, un problema de control de qualitat, el passeig aleatori i algunes qüestions de matemàtica recreativa.

1. Introducció

La sèrie harmònica és l'exemple més antic i famós de successió de números positius, cada cops més petits i tendint a zero, però amb suma infinita. Aquest fet sembla que és conegut des del segle XIV. Si ho escrivim d'una manera informal,

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = +\infty,$$

i més rigorosament, introduint les sumes parcials,

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n},$$

tenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

De vegades, en lloc de dir que la suma és infinita, també es diu que la sèrie és divergent o, per abús de llenguatge, que convergeix cap a infinit. La primera secció la dediquem a explicar per què la sèrie que estudiem s'anomena harmònica.

Hi ha moltíssimes demostracions de la divergència de la sèrie harmònica. Per exemple, a [24, 25] se'n recopilen més de quaranta. A la segona secció d'aquest treball recollim una selecció d'algunes de les més elementals.

Un resultat encara més interessant i delicat, que ja va demostrar el matemàtic suís Leonhard P. Euler (1707-1783) el 1737, és que

$$\sum_{p \text{ primer}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \cdots$$

és divergent (vegeu, per exemple [34]). A la Secció 3.2 en donarem una demostració molt curta que féu, el 1938, el prolífic matemàtic hongarès Paul Erdős (1913-1996) (vegeu [1, 3, 10, 42]). Observeu que aquest resultat ens mostra l'abundància de nombres primers.

D'altra banda, per exemple, si només agafem els termes de la forma $\frac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$, la sèrie obtinguda està formada pels termes d'una progressió geomètrica i convergeix