

FR ACTALS I MEDICINA

ARMENGOL GASULL

En aquest treball es donen alguns exemples coneguts de conjunts fractals i s'explica el mètode del *recompte de caixes* per a calcular la seva dimensió fractal. Finalment es mostren diferents aplicacions d'aquests conceptes a la medicina.

Una primera versió del mateix, amb títol *Algunes aplicacions dels fractals a la medicina*, 6 p., va ser publicada l'any 2000 a la desapareguda revista *Fi*, editada pels estudiants de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.



FIGURA 1. Imatge fractal generada per ordinador i falguera real.

El conjunts *fractals* es van popularitzar a la segona meitat del segle passat principalment degut als treballs del matemàtic francès/nord-americà i nascut a Polònia, Benoît Mandelbrot, vegeu [6, 11, 19]. Objectes com les costes marines, les muntanyes, els núvols, els arbres, les falgueres, etc. exhibeixen un comportament fàcilment identificable amb un fractal. Vegeu per exemple la similitud entre una falguera i la imatge d'un fractal generada per un procés iteratiu recurrent i senzill a la Figura 1. També s'ha observat que objectes amb estructura fractal són presents en el regne animal. Per exemple l'estructura en ramificació dels vasos sanguinis, el sistema urinari, les fibres que transmeten impulsos elèctrics al múscul cardíac, l'estructura dels pulmons, dels bronquis, Pensem que la superfície dels pulmons d'un ésser humà és superior a la d'un camp de tennis i aquesta cap a l'interior de la caixa toràcica.

Potser val al pena comentar, que tot i que la Terra no es pròpiament ni una esfera ni un elipsoide, pensar que ho és ha donat molts bons fruits a la ciència. El mateix passa amb el concepte de fractal. Cap dels objectes comentats és realment un fractal matemàtic (en cap d'ells hi ha un procés que es repeteix infinitament), però el pensar que són fractals ens dóna un bon model per a estudiar-los.

No és fàcil donar una definició rigorosa de conjunt fractal. Fins i tot el mateix Mandelbrot va defugir donar-ne una definició al seu primer llibre “Objects fractals,” aparegut el 1975, vegeu [26]. Seguint el criteri de K. Falconer, autor del

llibre “Fractal Geometry,” [12] on s’estudien matemàticament aquests objectes, ens decantarem per una descripció de les propietats que caracteritzen els fractals. De fet, Falconer ho compara amb les dificultats de definir la vida: *no hi ha cap definició senzilla i ràpida del que és la vida, en tot cas una llista de propietats que tenen les coses vives com l’habilitat per a reproduir-se, o moure’s, o....* Així, quan ens referim a un fractal F tindrem en ment les propietats següents:

- F és massa irregular per a ser descrit usant el llenguatge geomètric clàssic.
- F té una estructura fina, és a dir que la seva estructura es veu en escales arbitràriament petites.
- Sovint F té algun tipus d’autosimilitud, és a dir, F és igual, mòdul canvis d’escala, a una part seva. Aquesta autosimilitud pot ser aproximada o estadística.
- La seva *dimensió fractal* (introduïda més endavant) és més gran que la seva dimensió topològica.
- En molts casos, F es pot definir de manera molt senzilla i fins i tot de manera geomètrica i/o recurrent.

1. EXEMPLES DE FRACTALS MATEMÀTICS

A continuació recordarem alguns dels exemples més coneguts de conjunts fractals matemàtics: el de Cantor, els de Sierpiński, el floc de neu, la corba drac i els de Mandelbrot i Julia.

1.1. El conjunt de Cantor. Rep aquest nom en honor al cèlebre matemàtic alemany Georg Cantor, qui el va considerar l’any 1883. La seva construcció es fa de la següent manera: Prenem l’interval $K_0 = [0, 1]$ i li traiem el seu interval obert central $(1/3, 2/3)$. El conjunt obtingut $K_1 = [0, 1] \setminus (1/3, 2/3)$ està format per dos intervals tancats. Ara fem el mateix amb els dos intervals de K_1 , és a dir

$$K_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Repetint aquest procés infinits cops obtenim infinits K_n i el conjunt de Cantor $\mathcal{K}$ és la seva intersecció. Els primers passos d’aquesta construcció s’il·lustren a la Figura 2.



FIGURA 2. Primers passos per la construcció del conjunt de Cantor.

Si considerem el subconjunt de $\mathbb{R}^2$ format pel producte cartesià de dos conjunts de Cantor, $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$, obtenim el conjunt fractal anomenat *pols de Cantor*. Clarament hi ha conjunts tipus pols de Cantor a $\mathbb{R}^m$ definits com el producte cartesià de m còpies de $\mathcal{K}$.

1.2. Els fractals de Sierpiński. El seu nom es deu al matemàtic polonès Waclaw Sierpiński, qui els va introduir a principis del segle XIX. El primer d'aquests fractals és un subconjunt del pla que es construeix de manera semblant al conjunt de Cantor, però prenent com a conjunt inicial un triangle equilàter ple. Més concretament, comencem dividint el triangle en 4 triangles equilàters iguals i més petits i eliminem el del mig. A continuació, fem el mateix amb cadascun dels tres triangles restants. Després ho repetim amb els 9 triànglets que queden i així successivament, portant aquest procediment al límit. Els punts que queden formen l'anomenat *triangle de Sierpiński*. Aquest procés es generalitza començant amb altres figures planes, com per exemple el quadrat, que dóna lloc a la catifa de Sierpiński, o a l'espai començant amb un tetraedre o un cub.

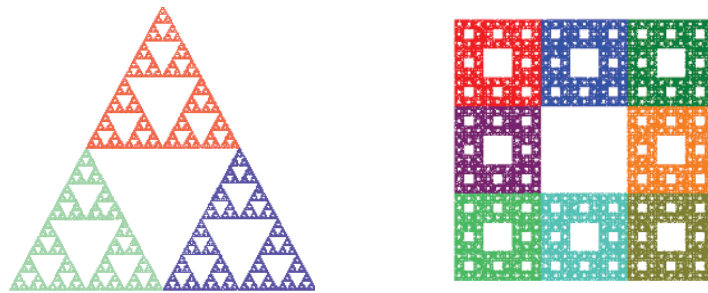


FIGURA 3. Triangle i catifa de Sierpiński.

En el cas del tetraedre, s'elimina a cada pas la meitat del seu volum i només es deixen 4 tetraedres iguals i amb costat la meitat del tetraedre total, vegeu la Figura 4. De figures fractals corresponents al cub n'hi ha dues de famoses. En les dues, a cada pas es divideix cada cub en 27 cubets més petits. En la que dóna lloc a l'anomenada *esponja de Menger*, s'eliminen 7 cubets, el del mig de cada cara i el central, i com sempre, aquest procés es va repetint indefinidament. Aquest nom és degut al matemàtic austríac/nord-americà Karl Menger, qui va proposar aquesta construcció l'any 1926. En l'*esponja de Sierpiński*, a cada pas, s'elimina només el cub del mig. L'aspecte exterior d'aquest fractal és el d'un cub, però el seu interior està ben ple de foradets.

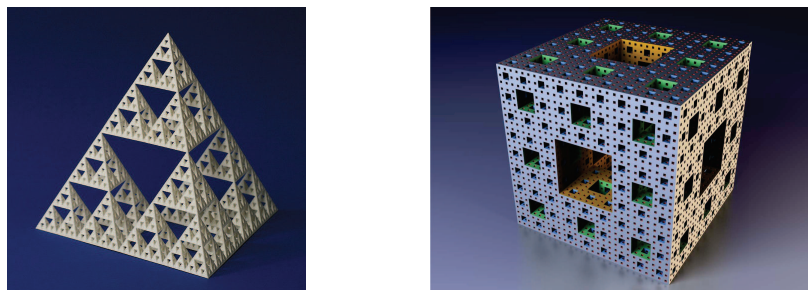


FIGURA 4. Tetraedre de Sierpiński i esponja de Menger.

1.3. El floc de neu. Un altre exemple clàssic d'objecte fractal és la *corba de von Koch*, introduïda l'any 1904 pel matemàtic suec Helge von Koch. A la Figura 5 representem els primers passos en la construcció d'un dels costats de la corba de von Koch.

Quan es repeteix indefinidament el procés explicat a la Figura 5, però prenent com a conjunt de partida un triangle equilàter, s'obté el fractal anomenat *floc de neu*, vegeu la Figura 6.

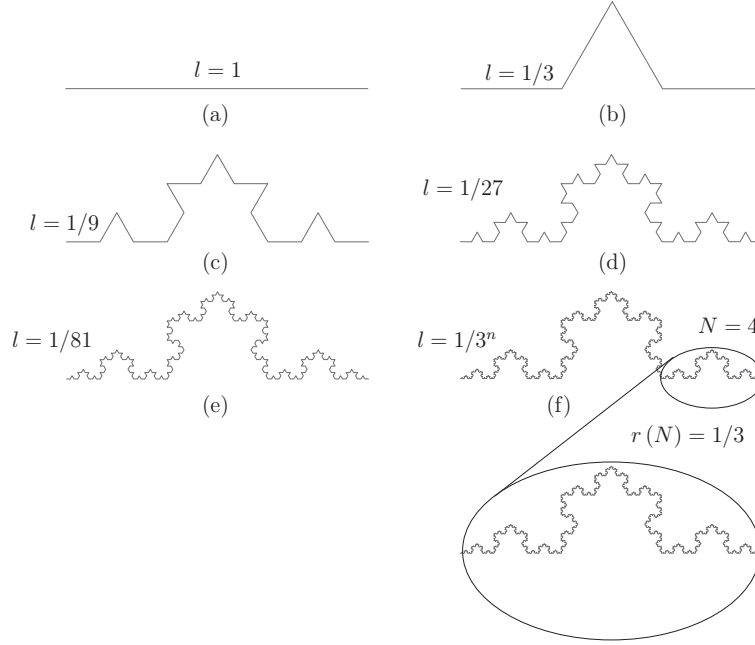


FIGURA 5. Construcció d'un dels costats de la corba de von Koch. (a) 1 costat de longitud 1; (b) 4 costats de longitud $1/3$; (c) 4^2 costats de longitud $1/3^2$; (d) 4^3 costats de longitud $1/3^3$; (e) 4^4 costats de longitud $1/3^4$; (f) 4^n costats de longitud $1/3^n$.

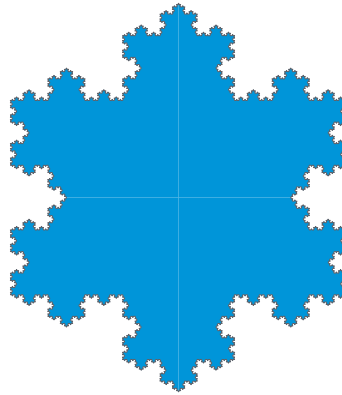


FIGURA 6. Floc de neu.

1.4. La corba drac. Basant-se en el que s'obté doblegant successivament una tira de paper i desplegant-la convenientment, els físics de la NASA, Banks, Harter i Heighway van introduir i estudiar un fractal conegut com *corba drac*, que es va popularitzar arran de la seva inclusió en la columna "Jocs matemàtics" de Scientific American conduïda pel famós divulgador Martin Gardner l'any 1967. Anem a veure com construir-lo.

Es comença fent els passos que es mostren a la Figura 7. Si prenem a l'inici un segment de longitud 1, el pas de la primera figura a la segona consisteix en agafar els dos catets d'un triangle rectangle amb hipotenusa el segment. Per tant, cadascun d'ells mesura $\sqrt{2}/2$. Per a passar de la segona figura a la tercera repetim el procés dos cops, fent que tots els angles involucrats siguin rectes. Observi's que les longituds totals de les figures van creixent i són $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, \dots$. La corba drac es l'objecte límit d'aquest procés.



FIGURA 7. Primers tres passos de la construcció de la corba drac.

És interessant observar que com ja hem comentat, i mòdul canvis d'escala, les formes que obtenim són les mateixes que doblegant una tira de paper successives vegades i després desfent els doblecs de la manera adequada, veure la Figura 8. Aquesta figura s'ha extret de [20].

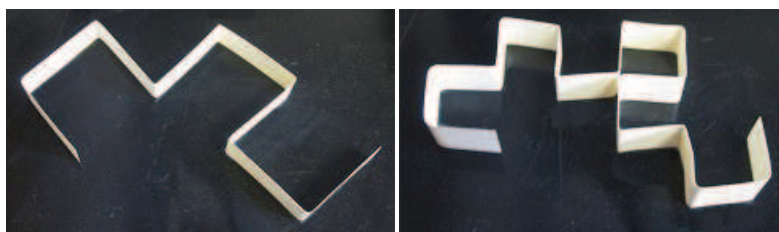


FIGURA 8. Passos tres i quatre de la construcció en paper de la corba drac.

Aquest procés es pot programar sense massa dificultats. A la Figura 9 es mostren quinze passos de la construcció, convenientment reescalats.

1.5. Els conjunt de Mandelbrot i els conjunts de Julia. El conjunt de Mandelbrot, que denotarem per $\mathcal{M}$, és un subconjunt del pla complex $\mathbb{C}$. Considerem l'aplicació $f_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida com $f_c(z) = z^2 + c, c \in \mathbb{C}$. Aleshores es diu que $c \in \mathcal{M}$ si i només si el conjunt de punts complexos

$$\{0, f_c(0), f_c(f_c(0)), \dots, f_c^n(0), \dots\} \subset \mathbb{C},$$

que forma el que s'anomena l'òrbita positiva del 0 pel semi-sistema dinàmic generat per f_c , és un conjunt fitat. Per exemple, clarament $0 \in \mathcal{M}$. La vora d'aquest

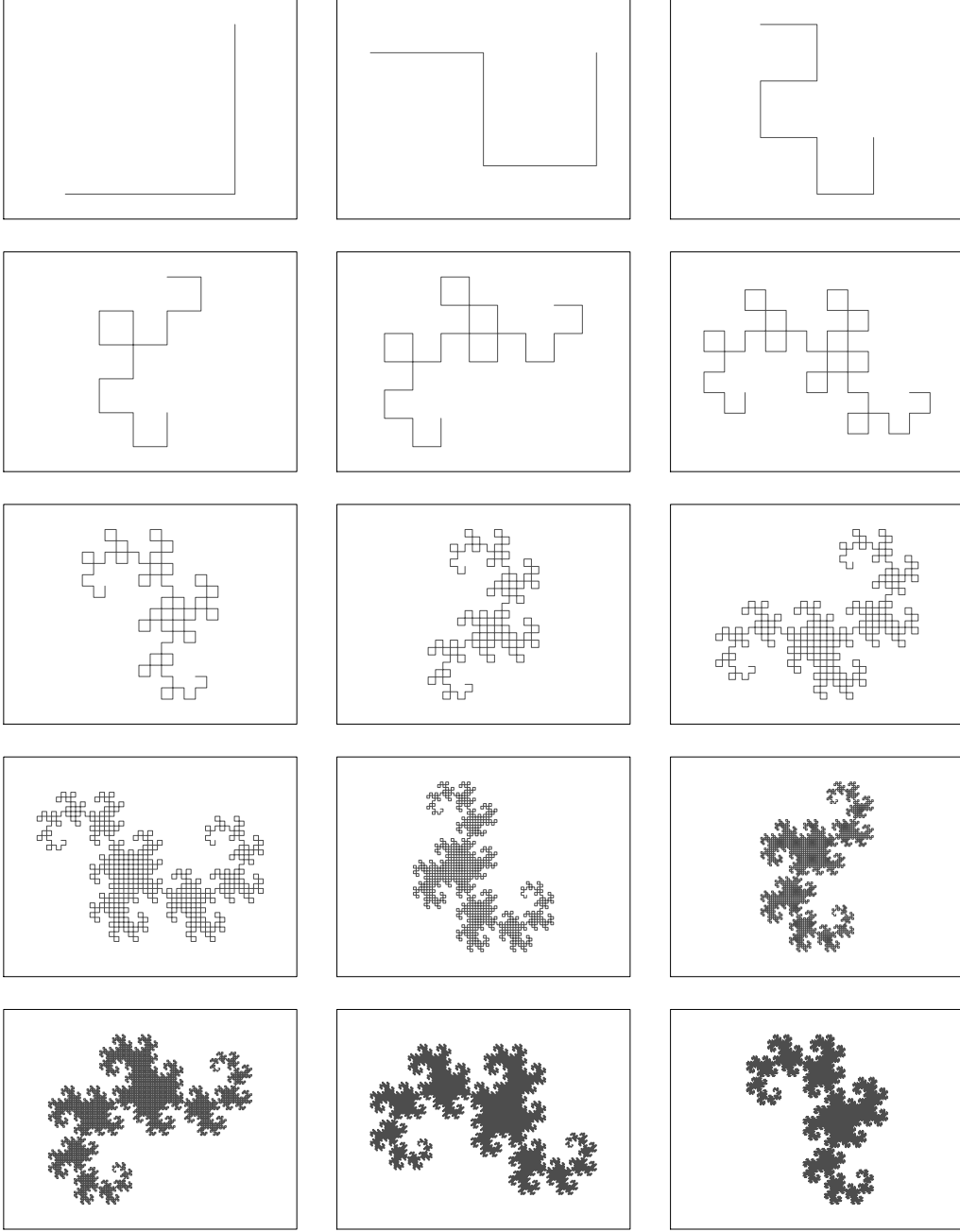


FIGURA 9. Construcció de la corba drac.

conjunt és un objecte ben complicat, vegeu la Figura 10. De l'estudi d'aquest conjunt, i d'altres relacionats, com els coneguts com a conjunts de Julia, se'n ocupa la branca dels *Sistemes Dinàmics* anomenada *Dinàmica Complexa*. Vegeu per exemple [7, 8, 9, 10] per més detalls.

Recordem, per acabar aquest llistat de fractals, el que és un conjunt de Julia, $\mathcal{J}$. Considerem de nou l'aplicació f_c , però ara fixem $c = \hat{c} \in \mathbb{C}$. Aleshores, per

aquesta $f_{\hat{c}}$, el conjunt de Julia és la vora del conjunt format pels $z_0 \in \mathbb{C}$ tals que l'òrbita positiva de z_0 , és a dir,

$$\{z_0, f_{\hat{c}}(z_0), f_{\hat{c}}(f_{\hat{c}}(z_0)), \dots, f_{\hat{c}}^n(z_0), \dots\} \subset \mathbb{C},$$

està fitada. També coincideix amb la vora del conjunt dels punts tals que la seva òrbita positiva tendeix a infinit. De nou, si ens fixem en $c = 0$, és fàcil veure que $\mathcal{J}$ coincideix amb la circumferència de radi 1 centrada a l'origen:

$$\mathcal{J} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Així per a $c = 0$ el conjunt de Julia no és un fractal. Per a molts altres valors de c sí que ho és. A la Figura 10 en mostrem un parell d'ells. El corresponent a $c = i$ es sol anomenar *dendrita*. El de $c \simeq -0.123 + 0.745i$ es coneix com *conill de Douady*, en honor al matemàtic francès Adrien Douady. Per a aquest valor de c , el punt $z = c$ és una òrbita 3-periòdica, és a dir, si fem

$$c, \quad f_c(c) = c^2 + c, \quad f_c^2(c) = (c^2 + c)^2 + c, \quad f_c^3(c) = ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c,$$

i imposem $c = f_c^3(c)$ obtenim $c^2(c^3 + 2c^2 + c + 1)^2 = 0$. Les solucions d'aquesta equació són aproximadament $0, -1.755, -0.123 \pm 0.745i$.

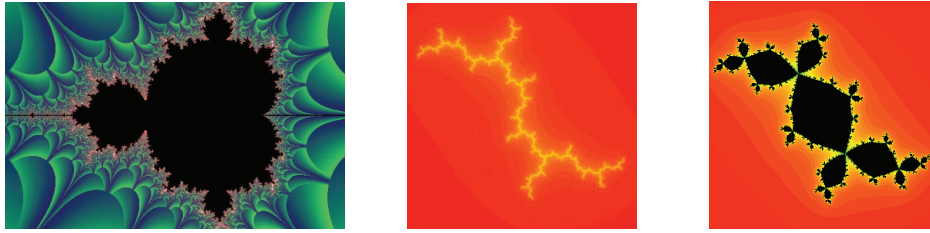


FIGURA 10. Conjunt de Mandelbrot i conjunts de Julia, per a $c = i$ i $c \simeq -0.123 + 0.745i$.

Observant tots els conjunts descrits i rellegant la llista de propietats donades a la introducció del treball, veurem que essencialment les compleixen. Hi ha molts llocs a internet amb altres imatges fractals; a partir de qualsevol d'aquestes planes web o de la Wikipedia se n'obtenen molts més. Per exemple una plana web amb molta informació és [20].

2. QUE ÉS LA DIMENSIÓ FRACTAL?

La definició rigorosa de *dimensió fractal* o també anomenada *dimensió de Hausdorff-Besicovitch* és deguda a Hausdorff (1919) i va ser elaborada per Besicovitch (1934). Aquesta definició està basada en teoria de la mesura, vegeu de nou [12, Cap. 2] o [1, 2, 14].

En aquest treball ens limitarem a introduir una definició més restrictiva de dimensió fractal basada en una mesura de l'autosimilitud i a continuació un procediment, anomenat mètode del *recompte de caixes*, que permet calcular-la aproximadament i que és el que s'utilitza a la pràctica quan s'usa aquest concepte en altres disciplines de la Ciència.

Dimensió de similitud. Es diu que dues figures són *similars*, amb *raó de similitud* r , si podem passar de la petita a la gran amb una translació més una homotècia de raó r . Una figura és *auto-similar* si es pot dividir en N trossos iguals de manera que cadascun sigui similar al total. Per exemple, un segment de recta de longitud $M \in \mathbb{N}$ es pot dividir en $N = M$ trossos idèntics, sent cadascun d'ells de longitud 1 i similar a tot el segment amb una raó de similitud $r(N) = N$. De la mateixa manera el podem dividir en $N = 2M$ segments de longitud $1/2$. Aleshores la raó de similitud és igualment $r(N) = r(2M) = 2M = N$.

En el cas d'un quadrat d'àrea M^2 , $M \in \mathbb{N}$, succeeix una cosa anàloga: podem dividir-lo en $N = M^2$ quadrats d'àrea 1, i per tant, cadascun és similar al total amb una raó de similitud $r(N) = r(M^2) = M = N^{1/2}$.

El mateix podem fer en el cas d'un cub de volum M^3 i obtenim una raó de similitud $r(N) = r(M^3) = M = N^{1/3}$.

Així, en general, podem pensar què si la raó de similitud d'un objecte s'expressa com

$$r(N) = N^{1/D}, \quad (1)$$

on N és el número de peces en que el dividim, llavors D és la dimensió euclidiana de l'objecte. D'aquest raonament sorgeix el concepte de *dimensió de similitud*. Si la raó de similitud $r(N)$ d'una figura autosimilar s'expressa com a (1) direm que la dimensió de similitud de la figura és D . Prenent logaritmes i aïllant D s'obté

$$D = \frac{\log(N)}{\log(r(N))} = \log_{r(N)}(N).$$

Per a la majoria d'objectes fractals es pot veure que quan existeix aquesta dimensió de similitud coincideix amb la dimensió fractal.

Usarem aquesta aproximació per a calcular la dimensió fractal del conjunt de Cantor $\mathcal{K}$. En cada pas tenim dues còpies de la situació anterior ($N = 2$) i la raó de similitud és clarament $r(N) = 3$, veure la Figura 2. Per tant, la seva dimensió fractal és $D = \log_3(2) \simeq 0.63$, menor que 1, ja que és un subconjunt de la recta, que té dimensió 1.

Pel que fa a la pols de Cantor, $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$, la seva dimensió fractal és el doble de la del conjunt de Cantor, ja que a cada pas en lloc de doblar-se el número de còpies es quadruplica, mantenint la mateixa raó de similitud. De fet, en general, la dimensió fractal de $\mathcal{K}^m$ és $m \log_3(2)$.

De manera similar tenim que la dimensió fractal del triangle de Sierpiński és ben clara a partir d'observar la figura que la representa. Hi ha 3 còpies iguals i similars a la figura completa, amb una raó de similitud 2, i per tant $D = \log_2(3)$. En el cas de la catifa de Sierpiński, hi ha 8 còpies amb raó de similitud 3. Per tant $D = \log_3(8)$.

En el tetraedre de Sierpiński hi ha 4 còpies amb raó de similitud 2 i, en conseqüència, $D = \log_2(4) = 2$. Per a l'esponja de Menger (resp. Sierpiński), a cada pas, les còpies de la figura gran són 20 (resp. 26) i la raó de similitud és 3. Per tant la seva dimensió és $\log_3(20)$ (resp. $\log_3(26)$).

Per que la a la corba drac, a cada pas hi ha dos còpies amb raó de similitud $\sqrt{2}$. Per tant la seva dimensió fractal és $\log_{\sqrt{2}}(2) = 2$.

En el cas particular de la corba de von Koch s'observa que cadascun dels costats es divideix en quatre parts ($N = 4$) similars al costat sencer, amb una raó de similitud $r(N) = 3$, (vegeu la Figura 5.(f)). Així doncs, la corba de von Koch té dimensió fractal $D = \log_3(4) \simeq 1.26$, entre 1 i 2, ja que té “més punts” que una corba regular del pla (objecte amb dimensió 1) i està continguda al pla.

Nom	Dimensió Fractal
Conjunt de Cantor	$\log_3(2) \simeq 0.63$
Dendrita	$\simeq 1.2$
Pols de Cantor (2-D)	$2 \log_3(2) \simeq 1.26$
Floc de neu (vora)	$\log_3(4) \simeq 1.26$
Conill de Douady	$\simeq 1.39$
Corba drac (vora)	$\simeq 1.52$
Triangle de Sierpiński	$\log_2(3) \simeq 1.58$
Catifa de Sierpiński	$\log_3(8) \simeq 1.89$
Pols de Cantor (3-D)	$3 \log_3(2) \simeq 1.89$
Tetraedre de Sierpiński	2
Corba drac	2
Conjunt de Mandelbrot (vora)	2
Conjunt de Mandelbrot	2
Esponja de Menger	$\log_3(20) \simeq 2.73$
Esponja de Sierpiński	$\log_3(26) \simeq 2.96$

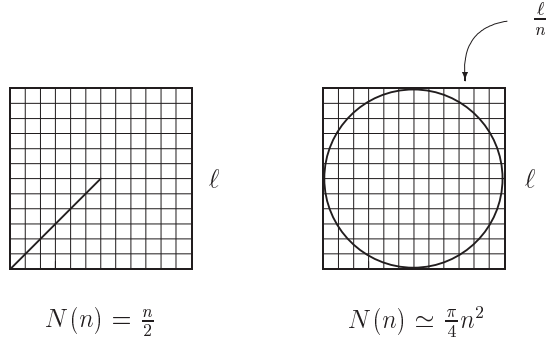
TAULA 1. Alguns conjunts i la seva dimensió fractal.

A la Taula 1 es presenta un resum dels resultats exposats que usen la dimensió de similitud i d'altres de nous que comentarem breument a continuació. Per exemple, la dimensió fractal de la dendrita o del conill de Douady no s'ha obtingut analíticament, sinó que han estat trobades usant el mètode del recompte de caixes, que descriurem en la següent secció. Per altra banda, no és difícil veure que la dimensió del conjunt de Mandelbrot és 2, ja que en particular conté un entorn obert de l'origen. Pel que fa a la seva vora, el resultat de la taula va ser conjecturat per Mandelbrot i Milnor i la seva prova no va arribar fins l'any 1998 en el treball [22] del matemàtic japonès Mitsuhiro Shishikura. Els resultat sobre la vora de la corba drac es dona a [4].

Mètode del recompte de caixes. En aquesta secció presentem un mètode per calcular aproximadament la dimensió fractal $D(F)$ d'un conjunt F amb un procediment pràctic i constructiu. Aquest mètode es coneix com el *mètode del recompte de caixes*. Restringirem la nostra atenció al cas que $F \subset \mathbb{R}^2$. La seva extensió a dimensions superiors és ben clara.

Per començar el mètode, dividim un quadrat de referència de costat ℓ i que contingui a F en n^2 quadradets de costat ℓ/n . Denotem per $N(n)$ el nombre d'aquests quadrats que toquen a F .

A la Figura 11 es representa aquest procés quan F és un segment que anomenen F_1 i F_2 és un disc (ple) i s'estimen els valors de $N(n)$ per ambdós casos. Volem

FIGURA 11. Càlcul de $N(n)$ per un segment i un disc.

trobar una quantitat D de manera que $D(F_1) = 1$ i $D(F_2) = 2$, ja que aquestes són les seves corresponents dimensions euclidianes.

Observeu que per a F_1 obtenim

$$\frac{\log(N(n))}{\log(n)} = \frac{1 \log(n) - \log(2)}{\log(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

i per a F_2 ,

$$\frac{\log(N(n))}{\log(n)} \simeq \frac{\log(\pi n^2/4)}{\log(n)} = \frac{\log(\pi/4) + 2 \log(n)}{\log(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2.$$

En general, es pot demostrar que en molts casos la dimensió fractal es pot calcular amb la fórmula:

$$D(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N(n))}{\log(n)}.$$

En particular, per a n gran, $\frac{\log(N(n))}{\log(n)} \simeq D$.

Aplicarem aquest resultat per a calcular aproximadament $D(F)$ quan F és el floc de neu. Les 6 figures de la Figura 12 mostren quadricules que contenen a un costat F i cada cop son més fines.

A partir de la Figura 12 podem construir la següent taula, per a calcular aproximadament $D(F)$.

n	5	10	15	20	25	30
$N(n)$	8	20	36	32	50	78
$\log(N(n))/\log(n)$	1.29	1.30	1.32	1.16	1.21	1.28

Sembla raonable dir que $D(F) \simeq 1.28$, o que $D(F)$ està entre 1.2 i 1.3. En qualsevol cas, valors prou propers al real ($\log_3(4) \simeq 1.26$), obtingut usant la dimensió de similitud.

Una manera més acurada per a obtenir una aproximació de $D(F)$, usant les mateixes dades, consisteix en considerar la nova taula

x	$\log(n)$	$\log(5)$	$\log(10)$	$\log(15)$	$\log(20)$	$\log(25)$	$\log(30)$
y	$\log(N(n))$	$\log(8)$	$\log(20)$	$\log(36)$	$\log(32)$	$\log(50)$	$\log(78)$

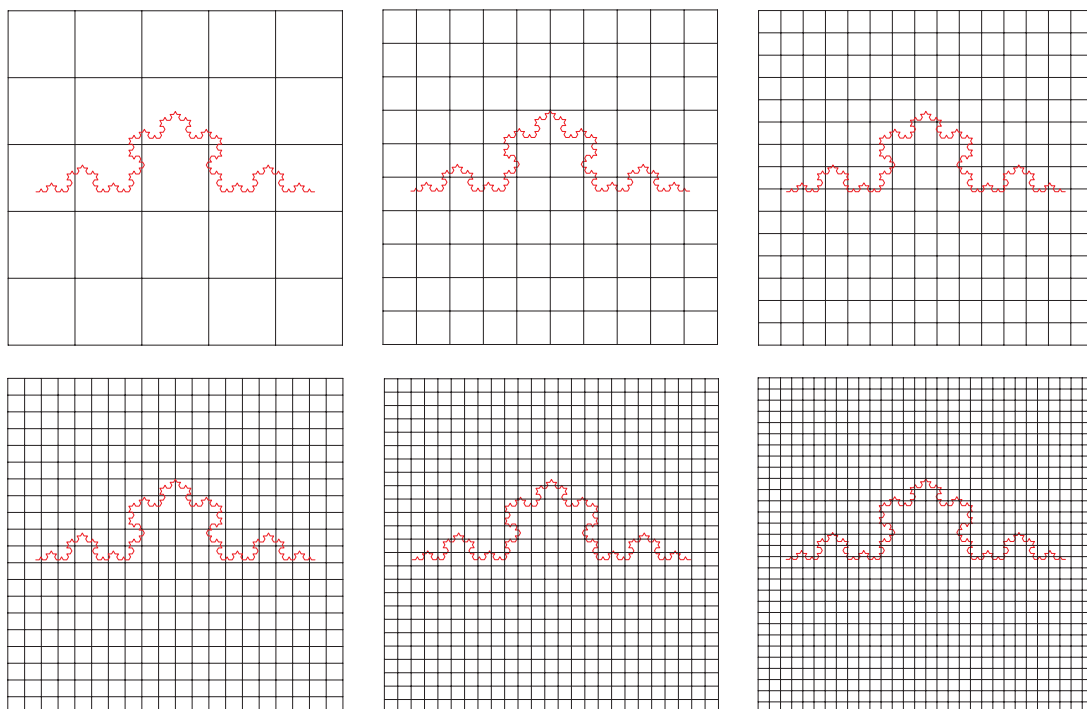


FIGURA 12. Mètode experimental del recompte de caixes per a calcular $D(F)$. Les quadrícules són de $n \times n$ per $n = 5, 10, 15, 20, 25$ i 30 .

i aplicar el mètode dels mínims quadrats per a obtenir la funció de la forma $y = dx$ que passi el més a prop possible dels sis punts anteriors (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 6$, on $(x_1, y_1) = (\log(5), \log(8))$, i així successivament. Més concretament, busquem el valor $d = d^*$ tal que la funció error,

$$E(d) = \sum_{i=1}^6 (y_i - dx_i)^2,$$

prengui el valor més petit possible. Aleshores la dimensió fractal serà $D(F) \simeq d^*$. Per tal d'obtenir aquest mínim, calculem

$$E'(d) = -2 \sum_{i=1}^6 (y_i - dx_i) x_i = -2 \sum_{i=1}^6 x_i y_i + 2d \sum_{i=1}^6 x_i^2.$$

Per tant, resolent $E'(d) = 0$ arribem a què

$$d^* = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i y_i}{\sum_{i=1}^6 x_i^2} = \frac{\log(5) \log(8) + \dots + \log(30) \log(78)}{\log^2(5) + \dots + \log^2(30)} \simeq 1.25,$$

valor encara més proper a la dimensió fractal real.

Podeu consultar [10, Cap. 6.2] per a veure el càlcul de la dimensió fractal del triangle de Sierpiński amb el mateix mètode.

3. APLICACIONS A LA MEDICINA

Parlarem en aquesta secció final de certes situacions en què el càlcul d'una dimensió fractal pot ajudar a diagnosticar una malaltia. Com veurem, el seu càlcul per certes parts dels cos humà, aporta vies complementàries a les tradicionals per a fer diagnòstics preventius en malalties tan diferents com l'osteoporosi, els emfisemes pulmonars, el càncer de mama, la retinopatia diabètica o l'esclerosi múltiple.

3.1. Osteoporosi. El tall d'un os trabecular¹ té una estructura amb un patró ramificat. Com es veu a la Figura 13, aquesta estructura també es pot considerar fractal.

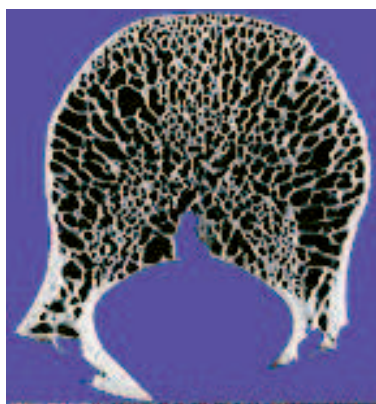


FIGURA 13. Tall transversal d'un os trabecular.

A partir d'una tomografia computeritzada (TC) d'una vèrtebra i un tractament de la seva imatge s'obtenen imatges com les de la Figura 14.



FIGURA 14. Tomografia computeritzada d'una vèrtebra i imatge tractada per a potenciar els contrastos.

Es podria pensar que el que fa que un os sigui més o menys resistent al trencament és la densitat de matèria òssia. La realitat és que ossos amb la mateixa densitat tenen diferent comportament davant de la facilitat a trencar-se. Segons estudis del Departament de Radiologia de la Universitat de Washington (d'on hem

¹Aquest és un dels dos tipus de teixit ossi del cos humà i també s'anomena os esponjós.

extret les imatges), es considera que la dimensió fractal d'una secció d'un os sa està entre 1.7 i 1.8. Aquesta dimensió es calcula a partir de la imatge digitalitzada (imatge de la dreta de la Figura 14) i seguint el mètode del recompte de caixes. Dimensions fractals més baixes són símptomes d'osteoporosi.

3.2. Emfisemes pulmonars. El problema de la insuficiència respiratòria deguda als emfisemes pulmonars també es pot estudiar d'una forma semblant al cas anterior. La dimensió fractal d'una secció d'un pulmó sa és aproximadament 1.26. Dimensions fractals més altes es poden considerar com indicis del començament d'aquesta malaltia. A [3] s'estudia també la naturalesa fractal de l'arbre bronquial i s'arriba a la conclusió que en diversos mamífers, des de les rates fins els humans, està entre 1.5 i 1.7.

3.3. Càncer de mama. A [24] es fa un estudi del càncer de mama a partir del càlcul de la dimensió fractal de certs contorns obtinguts a partir de mamografies per tal de distingir els pacients sans dels malalts en casos dubtosos. Es consideren 40 pacients classificats com BI-RADS 4. Aquests són els casos on les lesions no tenen clarament les característiques morfològiques del càncer de mama, però tenen probabilitat positiva de ser malignes. En aquests casos sol ser aconsellable fer una biòpsia. S'obté que les lesions que acaben sent benignes tenen dimensió fractal entre 1 i 1.5, mentre que les dimensions fractals de les malignes estan entre 1.35 i 2.

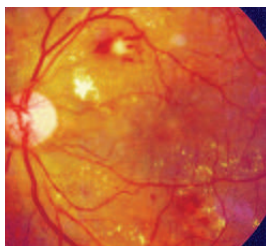


FIGURA 15. Vasos sanguinis d'un ull humà.

3.4. Retinopatia diabètica. En aquest apartat comentem el resultat de [17], on s'explica com usar la dimensió fractal per a proposar una prova no invasiva per a diagnosticar la retinopatia diabètica. Tal i com afirmen els autors, la retina és l'únic lloc del cos humà on els vasos sanguinis es poden veure in vivo, amb un mètode no invasiu. La conclusió del treball és que per a pacients sans la dimensió fractal dels vasos sanguinis està entre 1.55 i 1.64, mentre que per als ulls malalts és més baixa i està entre 1.44 i 1.59.

3.5. Esclerosi múltiple. L'equip de Neuroimmunologia de IIDIBAPS-Hospital Clínic, ha col·laborat amb equips multidisciplinaris, en el desenvolupament d'un software d'ús clínic per a detectar l'esclerosi múltiple, abans fins i tot de que apareguin les lesions cerebrals pròpies d'aquesta malaltia neurodegenerativa. Per això,

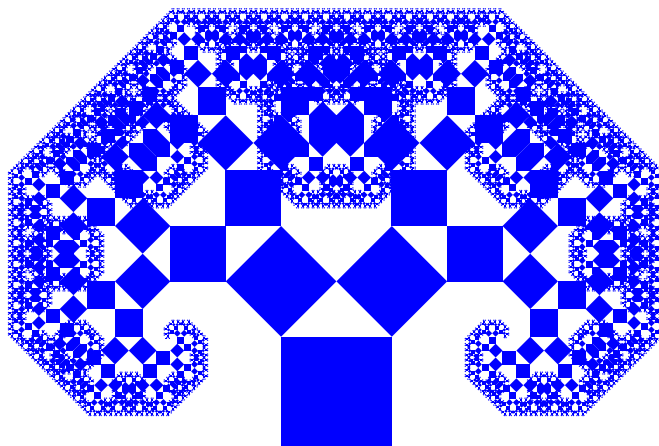
aquests científics calculen la dimensió fractal de les imatges obtingudes per ressonància magnètica, vegeu [5]. Usant la seva dimensió fractal és possible mesurar la complexitat d'un cervell.

Més exemples de l'ús de la dimensió fractal en Medicina es poden consultar per exemple a [10, Cap. 6.3] o a [13, 15, 16, 21, 23, 25] i a les seves referències.

Curiositats. El fractals també han arribat als segells. Acabem aquest treball amb una mica de filatèlia dedicada a aquest tema



i amb l'*Arbre de Pitàgores* que barreja la matemàtica clàssica i els fractals.



Agraïments. La primera versió d'aquest treball va sorgir fa més de 15 anys gràcies a diverses converses amb els meus amics i col·legues Tomeu Coll, Antonio Teruel i Joan Torregrosa. L'autor està secundat pels projectes MINECO MTM2013-40998-P i AGAUR (Generalitat de Catalunya) 2014SGR568.

REFERÈNCIES

- [1] M. Barnsley. Fractals everywhere. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.
- [2] M. Barnsley *et al.* The science of fractal images. Springer, New York, 1988
- [3] M. Canals *et al.* Caracterización de la geometría fractal del árbol bronquial en mamíferos. *Rev. Chil Anat.* **16** (1998) 237–244.
- [4] A. Chang i T. Zhang. The fractal geometry of the boundary of Dragon curve. *J. Recreational Mathematics* **30** (1999-2000) 9–22.
- [5] BLOC del Clínic. <http://blog.hospitalclinic.org/tag/dimensio-fractal/>
- [6] R. Delgado, M. Jolis i F. Utzet. Mandelbrot i l'atzar. *Butl. Soc. Catalana Mat.* **27** (2012) 121–160.
- [7] R. L. Devaney. A first course in chaotic dynamical systems. Westview Press, 1992.
- [8] N. Fagella. El conjunt de Mandelbrot i altres plans de bifurcació. *Butl. Soc. Catalana Mat.* **15** (2000) 35–54.
- [9] N. Fagella. Invariants en dinàmica complexa. *Butl. Soc. Catalana Mat.* **23** (2008) 29–51.
- [10] N. Fagella i X. Jarque. Iteración compleja y fractales. Vicens Vives y ICE-UAB, 2007.
- [11] N. Fagella i X. Jarque. Benoît B. Mandelbrot: científic i matemàtic. *Notícies Soc. Catalana Mat.* **30** (2011) 20–23.
- [12] K. Falconer, Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. John Wiley Sons, Ltd., Chichester, 1990.
- [13] C. Fortin, R. Kumaresan, W. Ohley i S. Hofer. Fractal Dimension in the Analysis of Medical Images, *IEEE Engineering in Medicine and Biology*, June 1992, 65–71.
- [14] J. F. Gouyet, Capítol 1: Fractal geometries, de *Physics and Fractal Structures*, accessible a <http://www.jfgouyet.fr>.
- [15] S. Havlin *et al.* Fractals in Biology and Medicine. *Chaos, Solitons & Fractals* **6** (1995) 171–201.
- [16] M. Ioanes i A. Isvoran. About applying fractal geometry concepts in biology and medicine. *Annals of West University of Timisoara, ser. Biology* **IX** (2006) 23–30.
- [17] K. Lamrini Uahabi i M. Atounti, Applications of fractals in medicine, *Annal. Univ. of Craiova. Math. and Comp. Sci. Ser.* **42** (2015), 167–174.
- [18] G. A. Losa. Fractals and their contribution to biology and medicine. *Medicographia* **34** (2012) 365–374.
- [19] B. Mandelbrot, La geometría fractal de la naturaleza. traducció de [The fractal geometry of nature, 1982] Metatemas **49**. Tusquets Editores, S.A., Barcelona, 1997.
- [20] L. Riddle. Plana web *Classic Iterated Function Systems* del Dep. of Mathematics de l'Agnes Scott College. <http://ecademy.agnesscott.edu/~lriddle/ifs/ifs.htm>.
- [21] C. Schmidt. The Gompertzian View: Norton Honored for Role in Establishing Cancer Treatment Approach. *Journal of the National Cancer Institute*, **96**, October 20 (2004), NEWS 1492–1493.
- [22] M. Shishikura, The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets, *Ann. of Math. (2)* **147** (1998), 225–267.
- [23] S. Sun i X. Xing. The research of the fractal nature between costs and efficacy in the brain vascular disease. *J. Appl. Math.* **2012**, Art. ID 171406, 12 p.
- [24] I. Sztojánov, D. Crisan, C. Popescu Mina, i V. Voinea. Image Processing in Biology Based on the Fractal Analysis in *Image processing*, Chap. **18** p. 323–344, December 2009, INTECH, Croatia.
- [25] B. J. West. Fractal physiology and chaos in medicine. Studies of Nonlinear Phenomena in Life Science, 1. World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1990.
- [26] Varis autors. Les fractales. Art, Nature et Modélisation. *Bibliothèque Tangente HS* **18**, ÉD. POLE, Paris 2004.



DEPT. DE MATEMÀTIQUES, UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA, EDIFICI C, 08193
BELLATERRA, BARCELONA (SPAIN)

E-mail address: `gasull@mat.uab.cat`