

Sumes harmòniques

Armengol Gasull

En aquest treball farem un petit recorregut per les propietats d'algunes sèries relacionades amb la sèrie harmònica,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots$$

Començarem veient diverses proves de la seva divergència i continuarem exposant algunes aplicacions en situacions en les quals apareix. Entre d'altres, considerarem el problema del colleccionista, els dels rècords en sèries de dades, un problema de control de qualitat, el passeig aleatori, un algorisme d'ordenació de dades i un parell de qüestions ben famoses i divertides de matemàtica recreativa.

Considerarem també les sumes de la sèrie harmònica alternada i altres reordenacions d'aquesta, reproduint els resultats clàssics de Ohm i Pringsheim. Després prendrem de nou la sèrie harmònica i estudiarem la seva convergència quan canviem els signes d'alguns dels seus termes, però sense reordenar-los. A més, en certs casos que són convergents donarem la seva suma.

Finalment estudiarem la convergència de certes sèries harmòniques aleatòries.

Aquest article és una extensió del treball [23], del mateix autor, que està dedicant exclusivament a la sèrie harmònica.

1 Introducció i resultats principals

La sèrie harmònica és l'exemple més antic i famós de successió de números positius, cada cops més petits i tendint a zero, però amb suma infinita.



Construcció basada en la sèrie harmònica (veure §4.10).