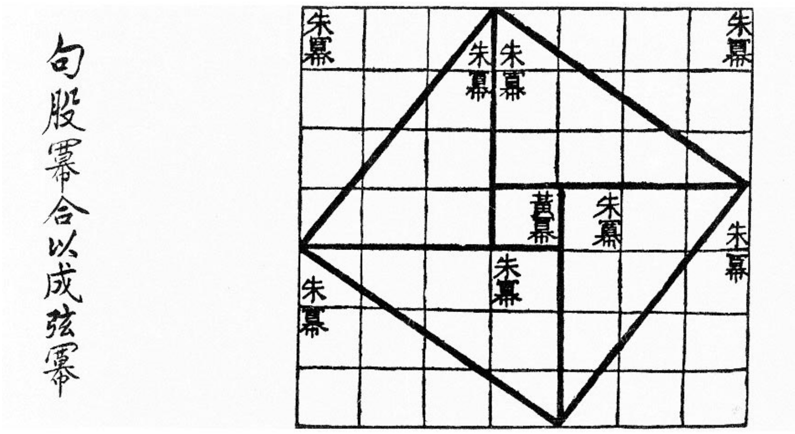
55 PROVES SENSE PARAULES

ARMENGOL GASULL

Les proves basades en figures són un recurs utilitzat sovint per molts professors a les seves classes. La seva utilitat està avalada, apart de per les pròpies experiències, pel coneixement popular recollit a la frase: "Una imatge val més que mil paraules".

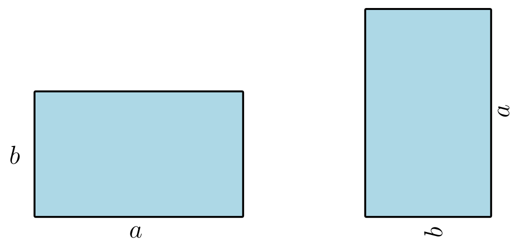
En aquest treball fem un petit recull de proves de resultats matemàtics en els que la seva demostració ve suggerida per una o varies figures. Aquest recull no és, ni molt menys exhaustiu, i està basat en les preferències de l'autor.



Demostració visual del Teorema de Pitàgores per a un triangle rectangle amb catets 3 i 4: $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Anomenem a aquestes demostracions visuals *proves sense paraules.* Les primeres amb aquestes característiques ja es troben en les civilitzacions antigues: mesopotamis, xinesos, grecs, egipcis,... Per exemple, la figura anterior presenta una demostració visual del Teorema de Pitàgores amb costats $3, 4$ i 5, que il·lustra una edició de l'any 1213 del tractat d'astronomia i càlcul conegut com *Zhou Bi Suan Jing.* Aquest llibre és un dels texts més antics de matemàtica xinesa. El nom *Zhou* fa referència a l'antiga dinastia Zhou (1046–256 aC). De fet, sense anar tan lluny, podem trobar una prova sense paraules molt senzilla d'una propietat que tots tenim ben interioritzada com és que *el producte de dos números és commutatiu,* és a dir $ab = ba$ per a qualsevol parell de números a, b. Aquest resultat és una conseqüència de dos altres fets, també molt bàsics, però de caire geomètric: (i) *l'àrea d'un rectangle es calcula multiplicant la base per l'alçada*; i (ii) *l'àrea d'un rectangle no canvia si el girem.* Resumint, la figura següent demostra que, donats dos números positius a i b, es compleix $ab = ba$.

Durant els darrers anys les proves sense paraules s'han posat de moda i n'han aparegut moltíssimes. Per exemple a les revistes *Mathematics Magazine* i *The College Mathematics Journal* han sortit més de 300 treballs amb un títol que conté una frase semblant a: "... proof without words...".



Dos rectangles amb la mateixa àrea i per tant $ab = ba$.

La major part de les proves que es presenten s'han extret dels interessants llibres [1, 11, 12, 13] de R. B. Nelsen (un d'ells en col·laboració amb C. Alsina) i de les seves múltiples referències. També s'han consultat específicament els treballs [7, 8, 10, 9, 14, 15] i una petita part són originals de l'autor.

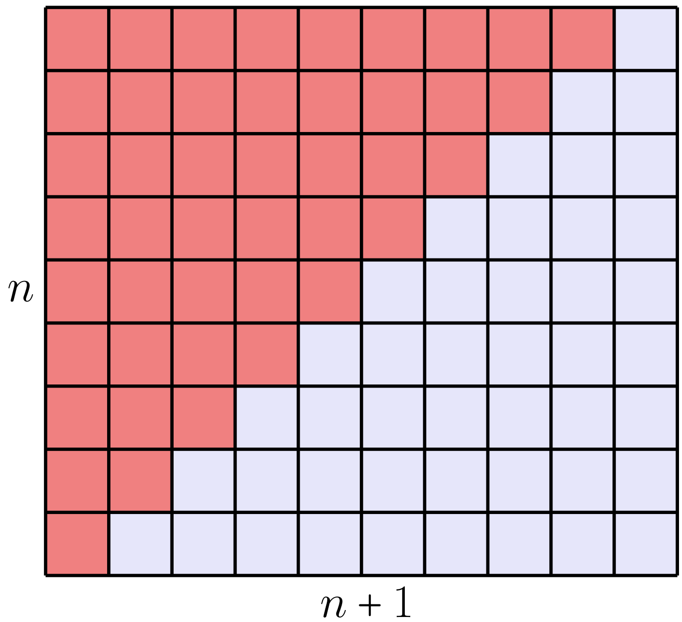
Abans de començar aquest recull, és potser convenient fer una petita reflexió sobre la següent pregunta: Són les demostracions visuals veritables demostracions? L'opinió del autor, compartida per molts més matemàtics, és que en si no són proves rigoroses, però si estan ben dissenyades, les seves il·lustracions ens proporcionen un camí clar i directe cap a la demostració del resultat al que es refereixen. Per aprofundir una mica més sobre el tema és aconsellable llegir els treballs ([2, 3, 4, 5, 6, 7]). En particular, en aquests treballs es parla de demostracions basades en figures, que semblen correctes, però que porten a un resultat fals. Una de les més famoses, deguda a Lewis Carroll, apareix al seu treball *The Lewis Carroll Picture Book (1899)* i sembla "demostrar" que tot triangle és isòsceles. Es també interessant consultar l'article [16], que té com a subtítol *El raonament numèric sembla independent del llenguatge*. El treball comença explicant una broma que solia fer en Gauss dient que ell ja podia calcular quan encara no sabia parlar.

Finalment, voldríem comentar que la sensació que tenim quan ens posem davant d'un text en un idioma totalment desconegut, és de ben segur la que pot tenir una persona que miri una d'aquestes demostracions i no tingui el bagatge matemàtic adequat per entendre-la. En aquest treball moltes de les proves són a l'abast de qualsevol persona amb una mínima formació científica, però unes poques van dirigides a persones amb coneixements matemàtics més consolidats.

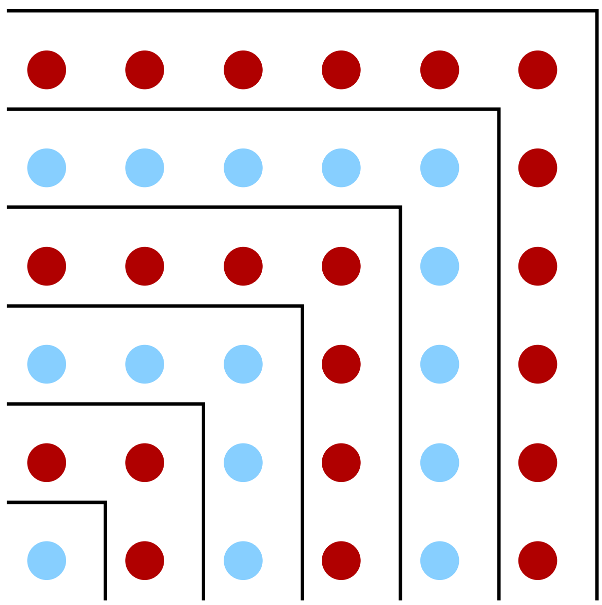
Esperem que el lector (o millor dit l'observador) gaudeixi amb aquesta aproximació a les demostracions matemàtiques.

Índex

1. Dues sumes fàcils

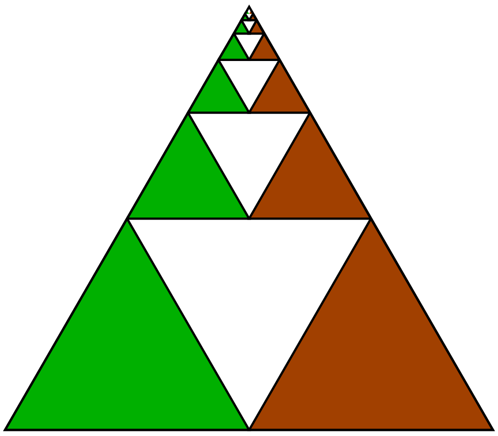


$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

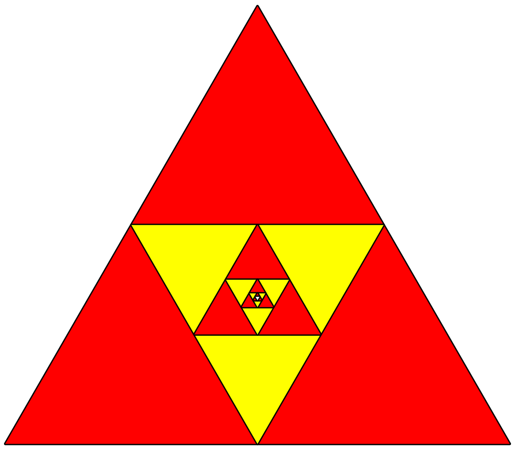


$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

2. Suma d'una sèrie geomètrica



$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots=\frac{1}{3}$$

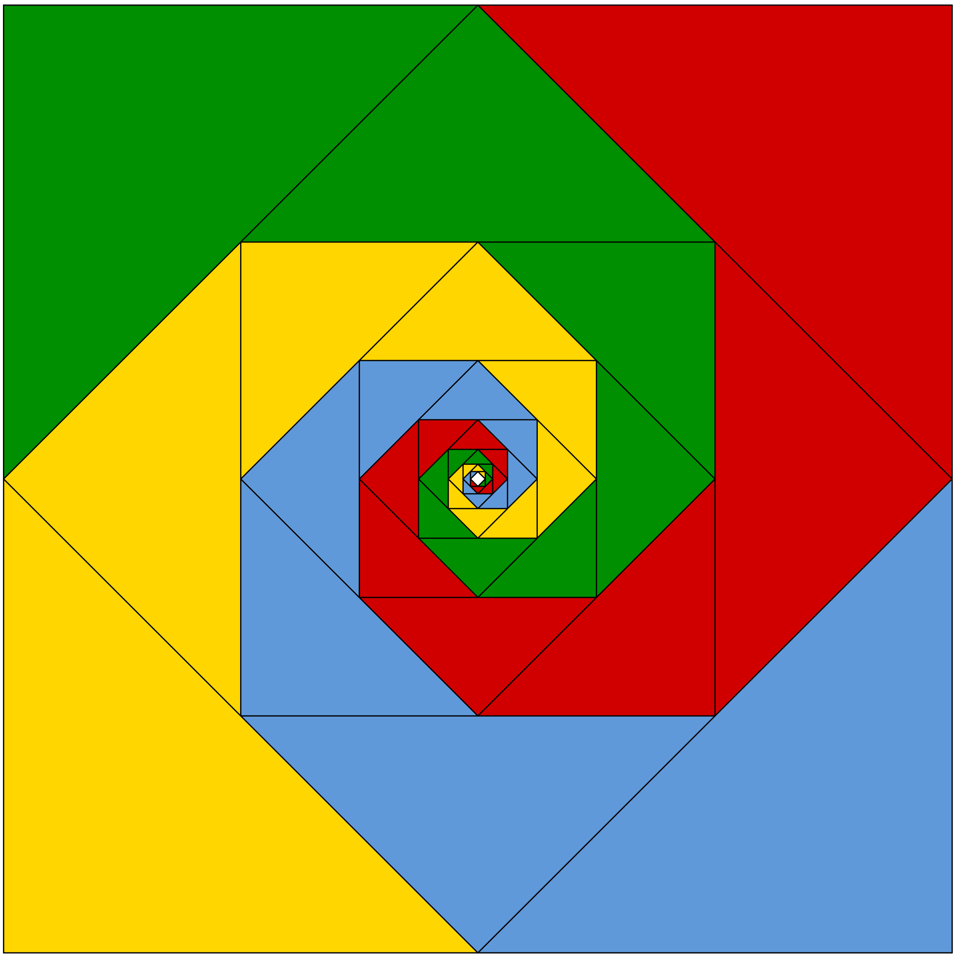


$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{4^2}+\frac{3}{4}\frac{1}{4^3}+\cdots=1$$

$$\Downarrow$$

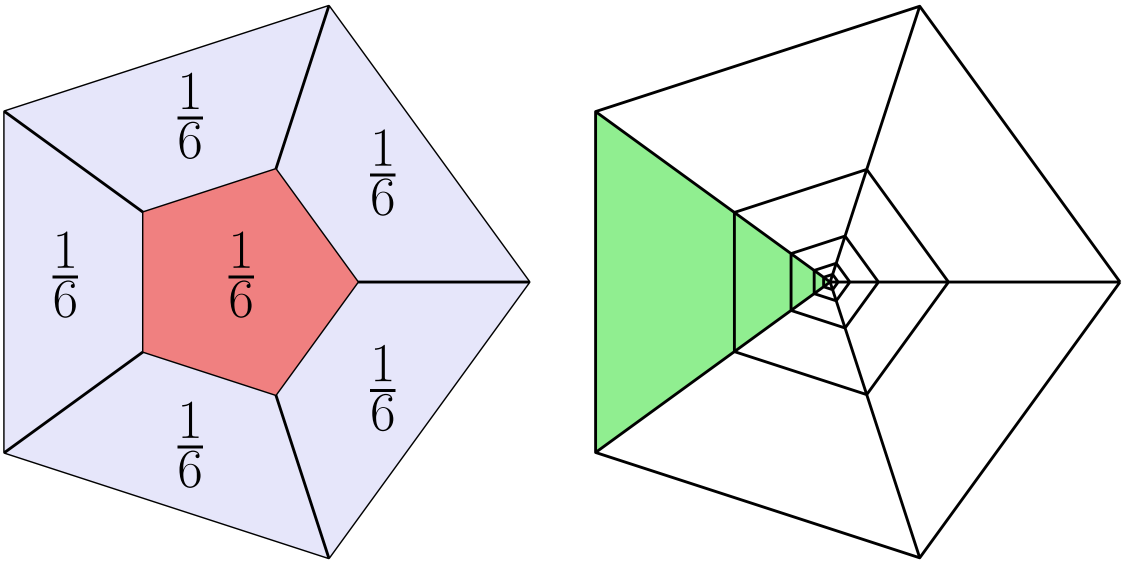
$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots=\frac{4}{3}$$

3. Suma d'una segona sèrie geomètrica

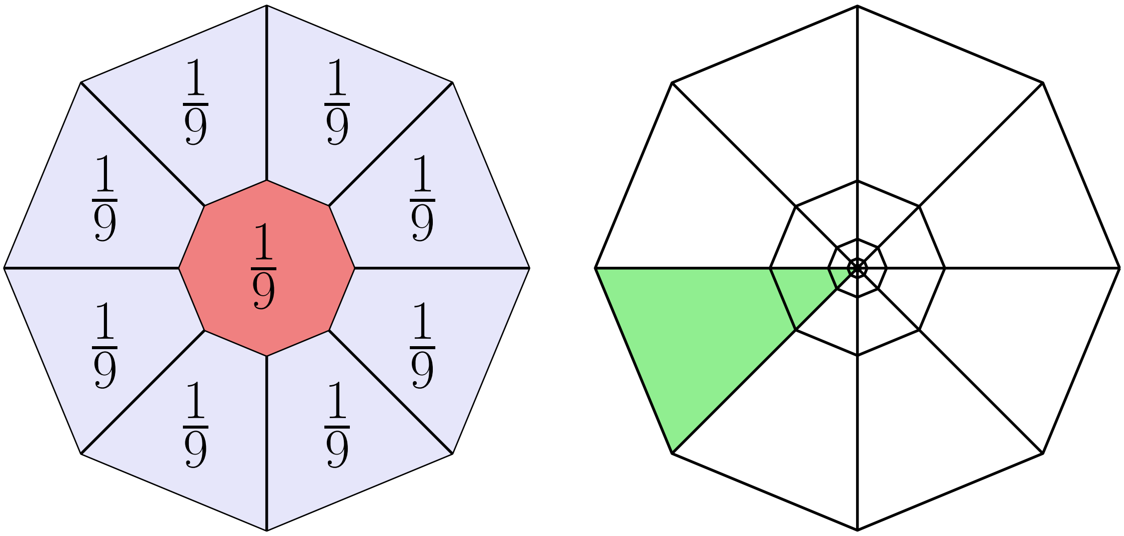


$$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{1}{4}$$

4. Suma de la sèrie geomètrica de raó $1/n$



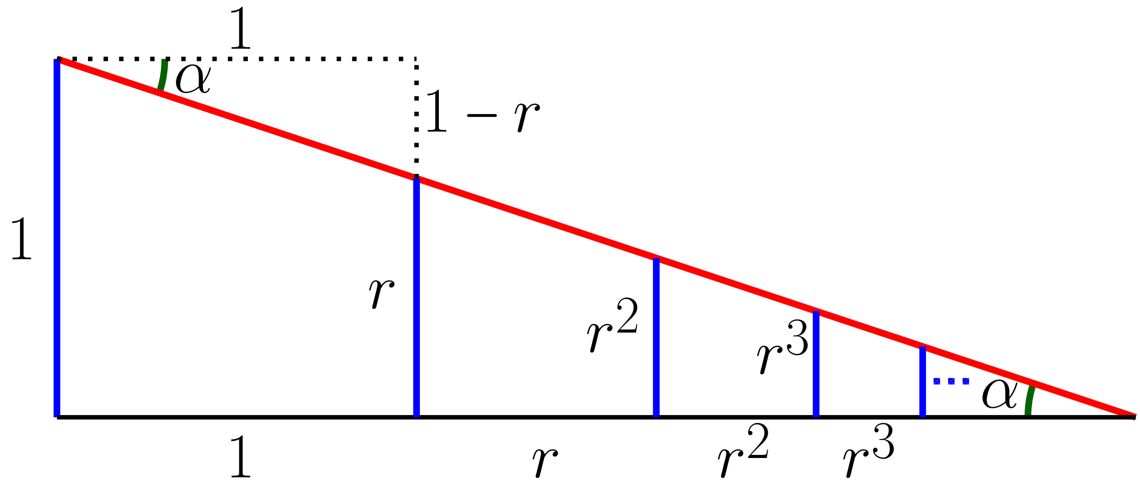
$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^4} + \cdots = \frac{1}{5}$$



$$\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^4} + \cdots = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \cdots = \frac{1}{n-1}$$

5. Suma general d'una sèrie geomètrica

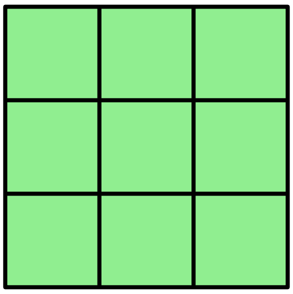


$$\cot(\alpha) = \frac{1}{1-r} = \frac{1 + r + r^2 + r^3 + \cdots}{1}$$

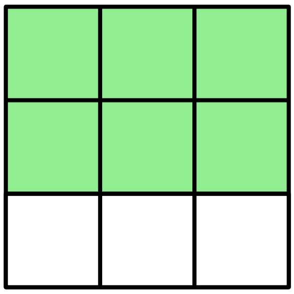
$$\Downarrow$$

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}, \quad r \in (0,1)$$

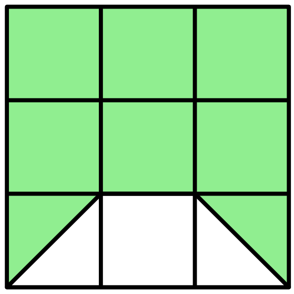
6. Suma d'una sèrie geomètrica alternada



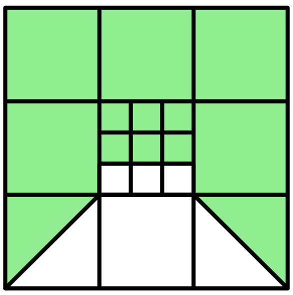
1



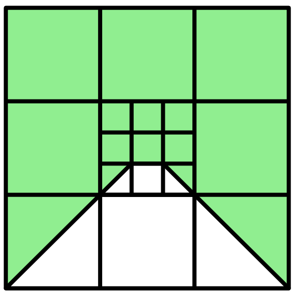
$1 - \frac{1}{3}$



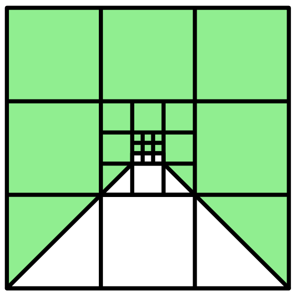
$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}$



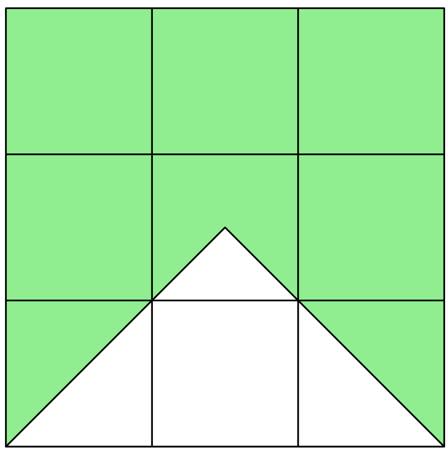
$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3}$



$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4}$

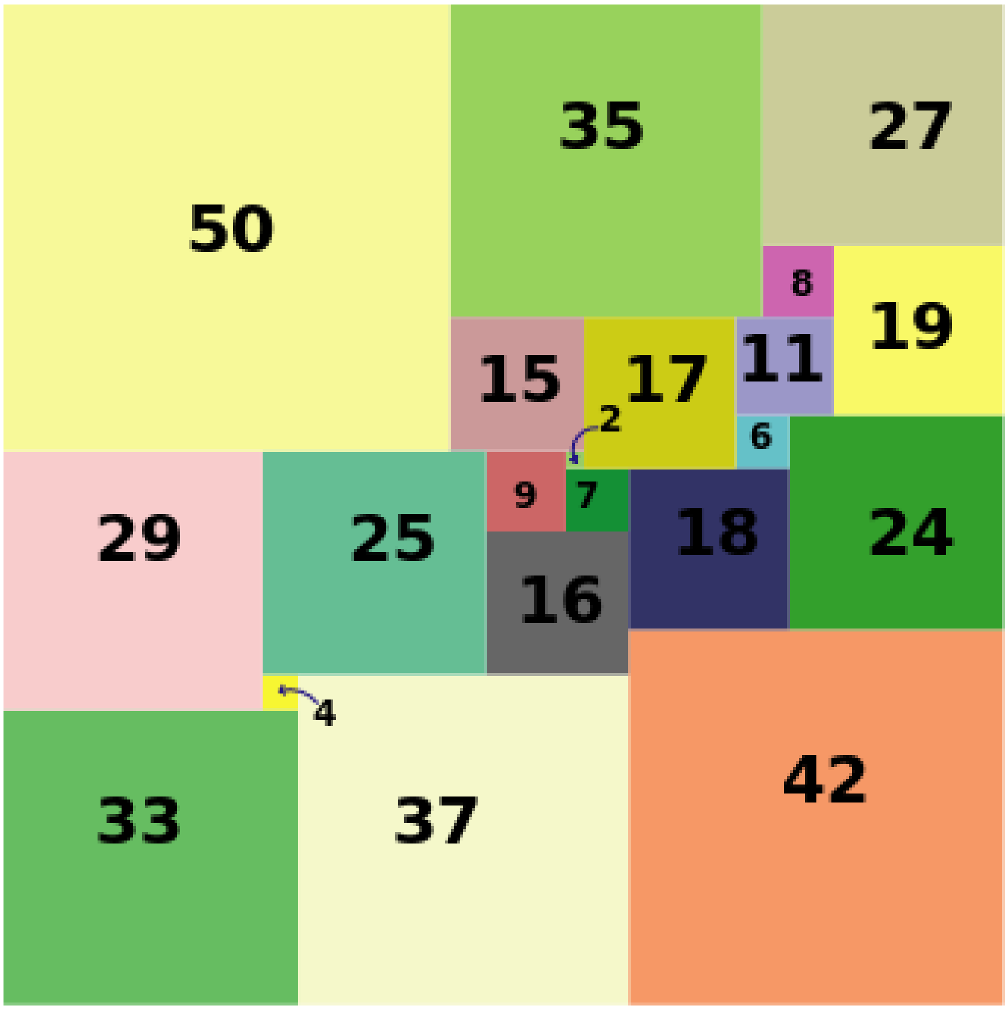


$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5}$



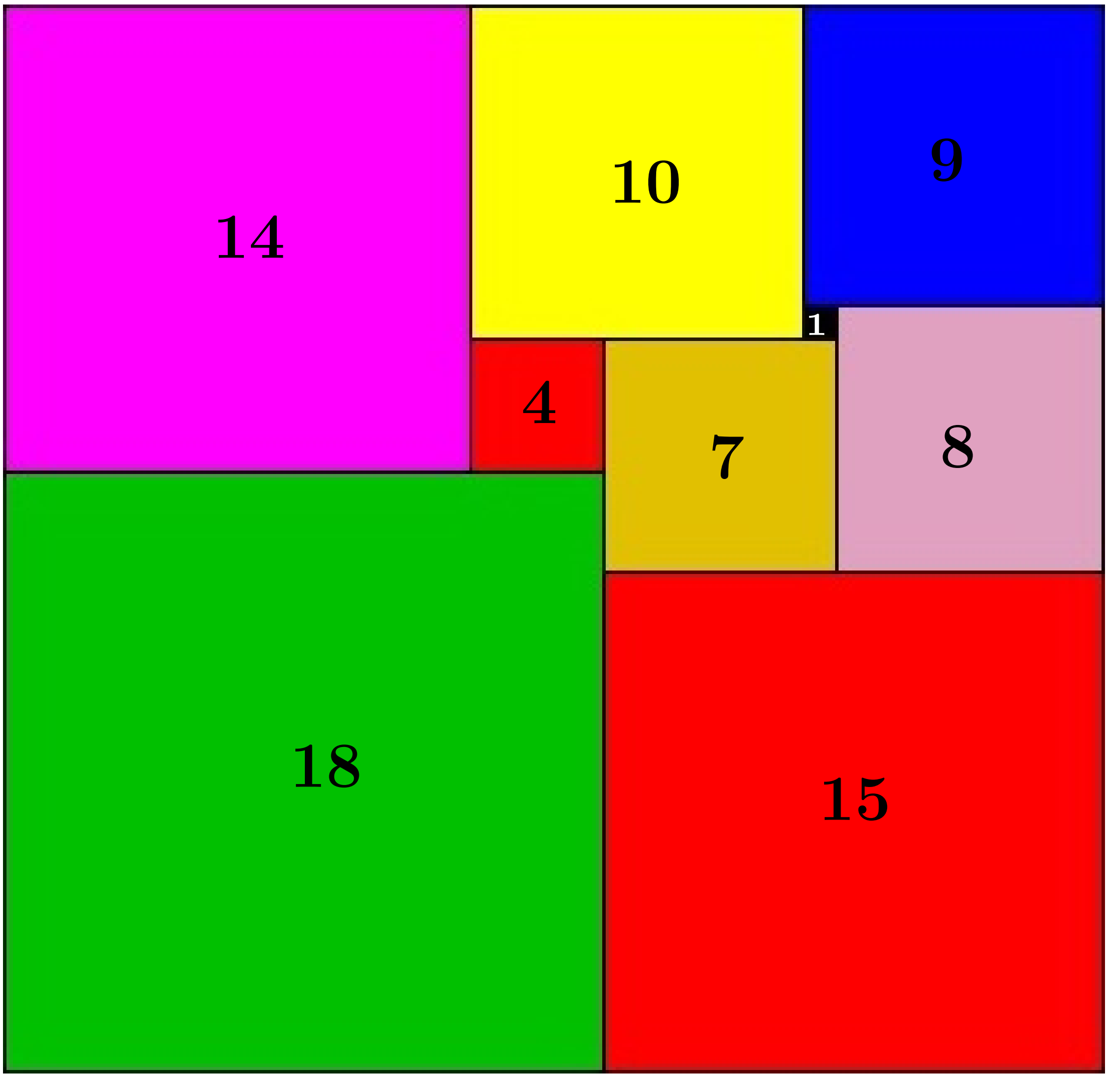
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \cdots = \frac{3}{4}$$

7. Partició d'un quadrat en quadrats diferents



$$112^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 11^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2 + 18^2 + 19^2 + 24^2 + 25^2 + 27^2 + 29^2 + 33^2 + 35^2 + 37^2 + 42^2 + 50^2$$

8. Partició d'un rectangle en quadrats diferents



$$33 \cdot 32 = 1^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 14^2 + 15^2 + 18^2$$

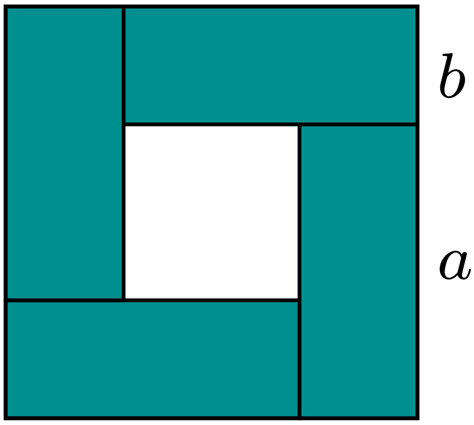
9. Dues desigualtats

Mitjanes aritmètica i geomètrica

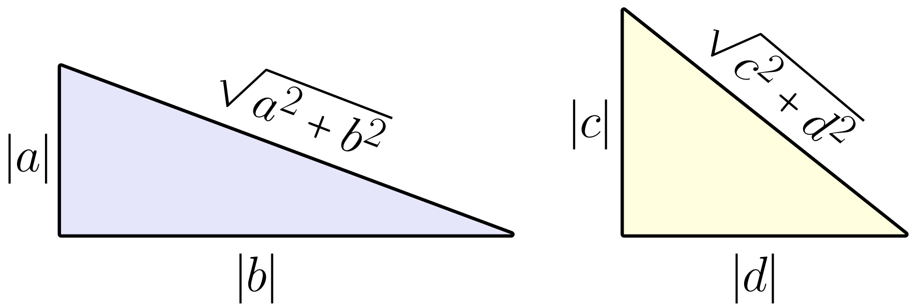
$$(a+b)^2 \geqslant 4ab$$

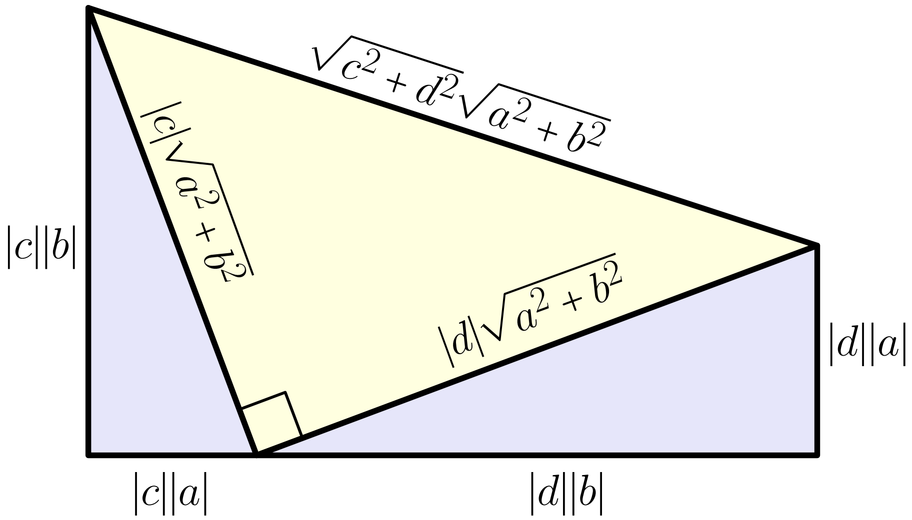
$$\Downarrow$$

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a\,b}$$



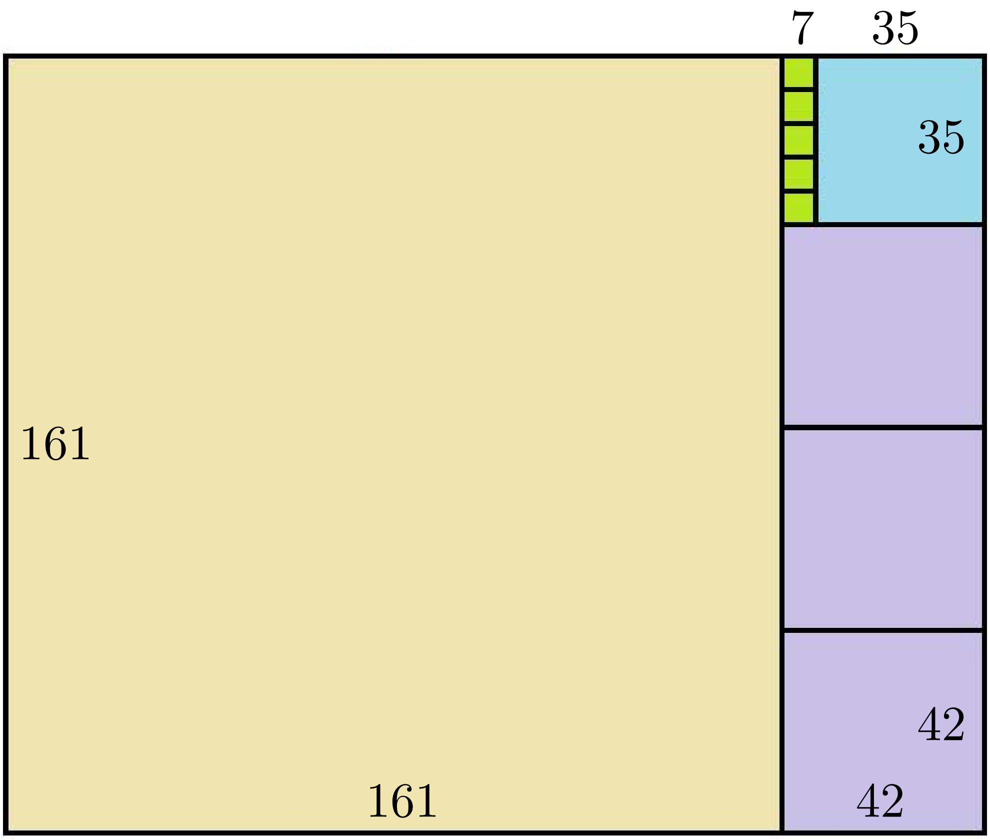
Desigualtat de Cauchy-Schwarz





$$|ac+bd| \leq |a||c| + |b||d| \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$$

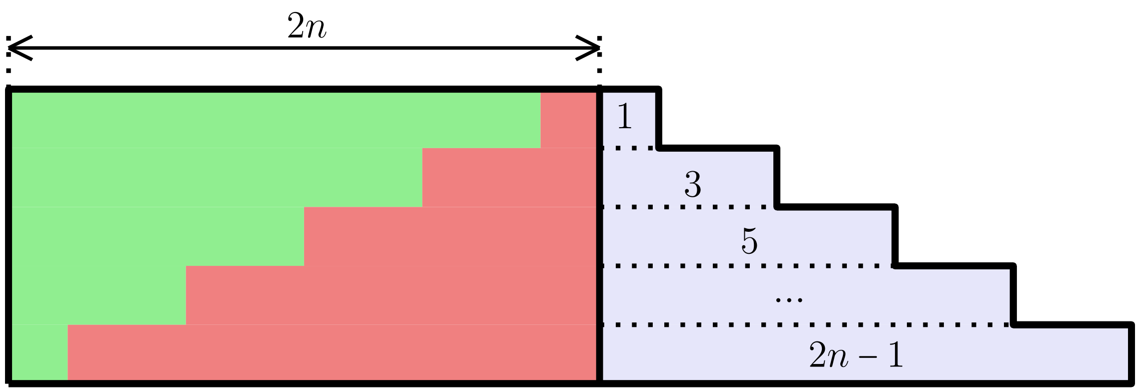
10. Màxim comú divisor



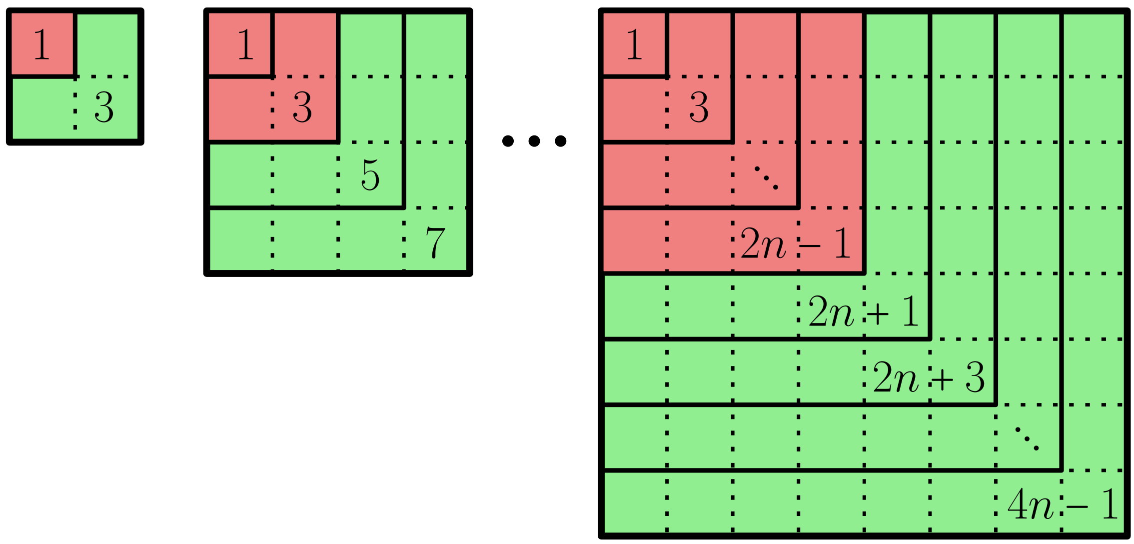
Algoritme d'Euclides

$$203 - 161 \cdot 1 = 42$$
$$161 - 42 \cdot 3 = 35$$
$$42 - 35 \cdot 1 = 7$$
$$35 - 7 \cdot 5 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\mathrm{mcd}(203, 161) = 7$$

11. Quocients de Galileu

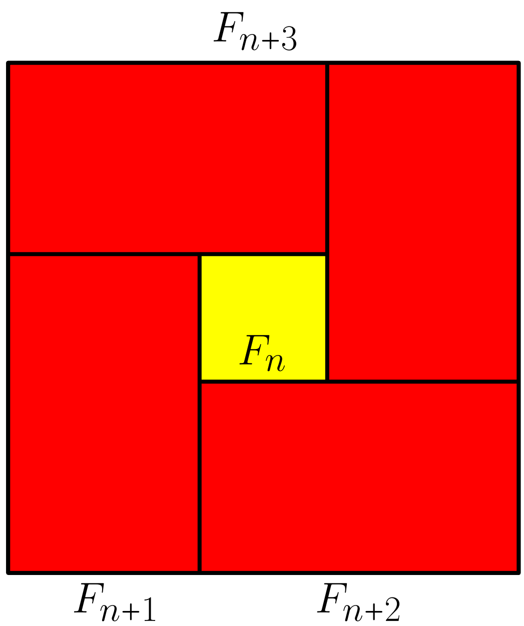


$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \cdots$$
$$= \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\cdots+(2n+2n-1)}$$
$$= \frac{n^2}{(2n)^2-n^2} = \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3}$$

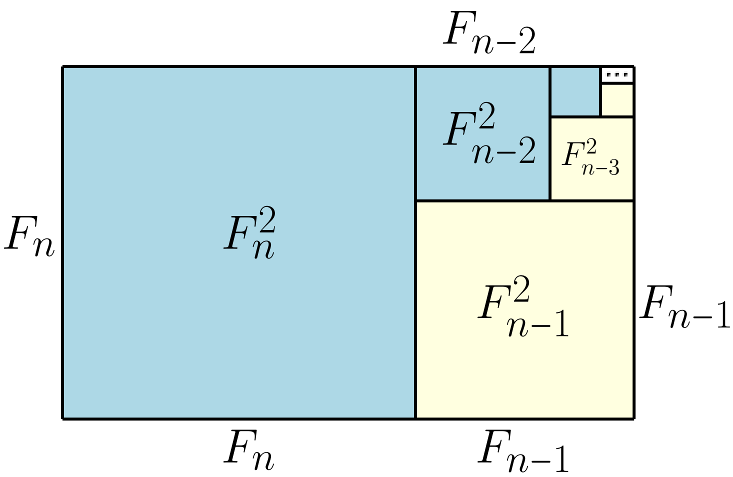


12. Números de Fibonacci

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1},\ n \geq 0$$



$$F_{n+3}^2 = 4F_{n+2}F_{n+1} + F_n^2$$

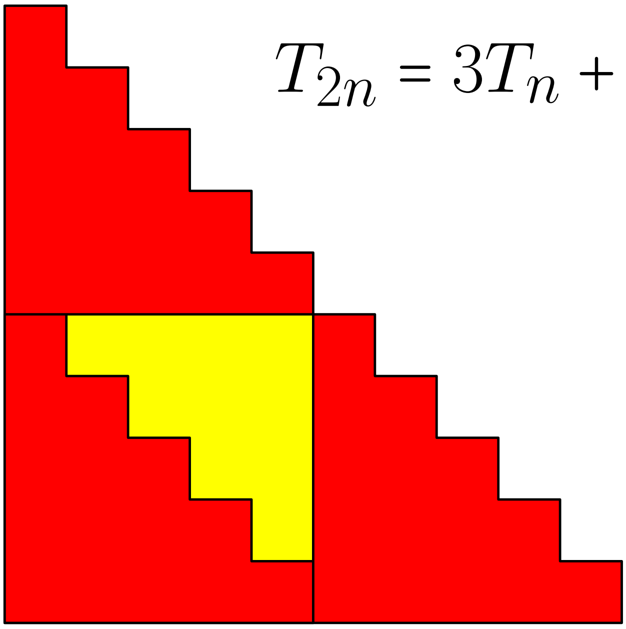


$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$$

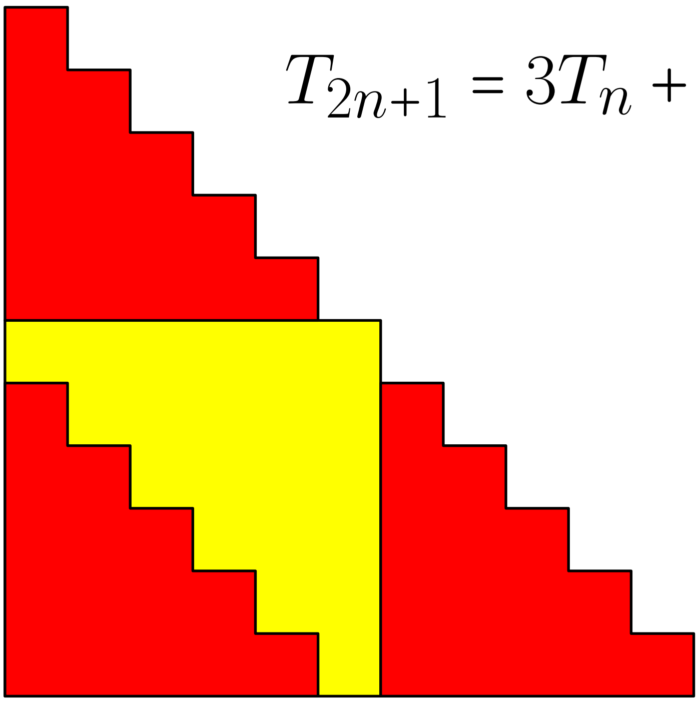
13. Números triangulars

$$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n$$

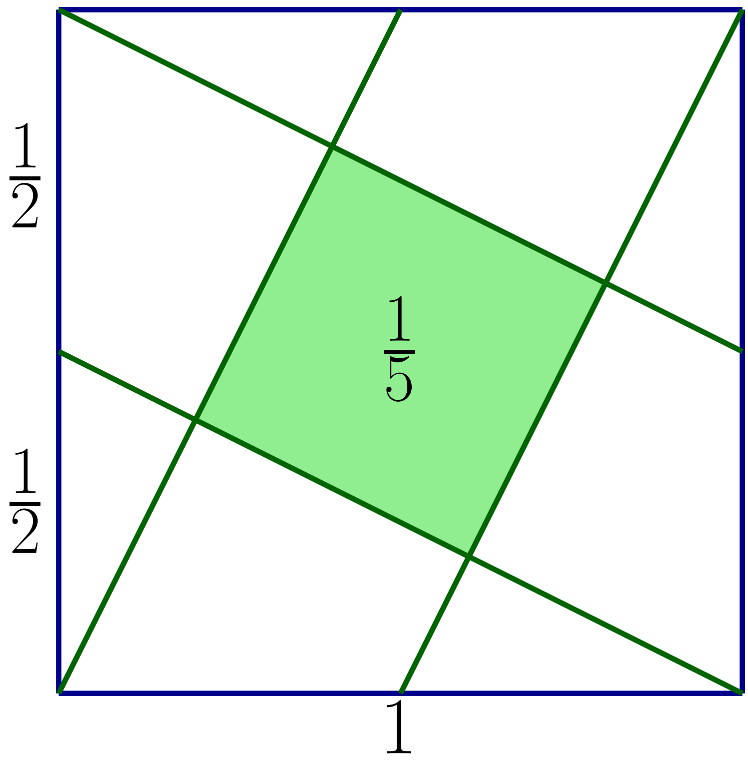
$$T_{2n} = 3T_n + T_{n-1}$$



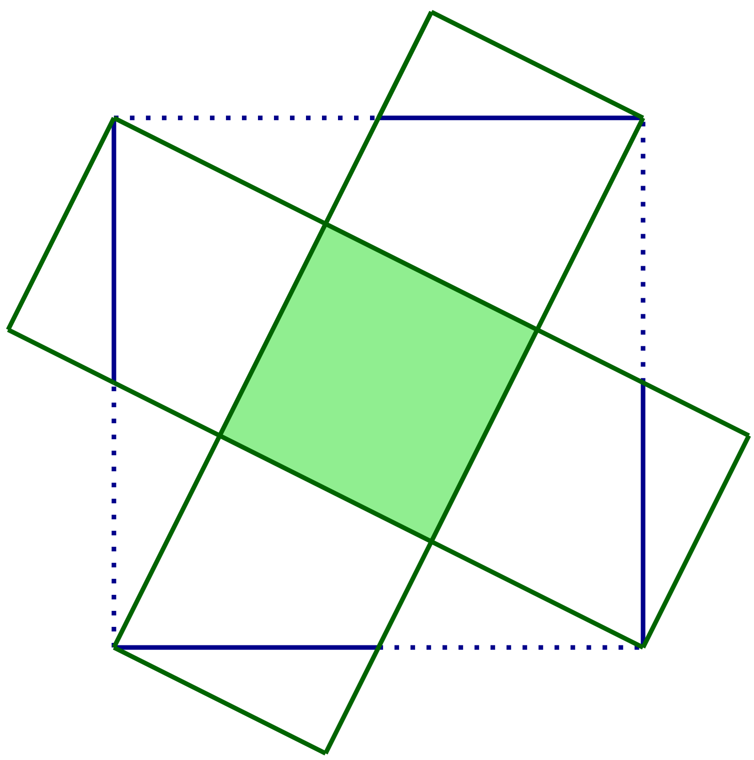
$$T_{2n+1} = 3T_n + T_{n+1}$$



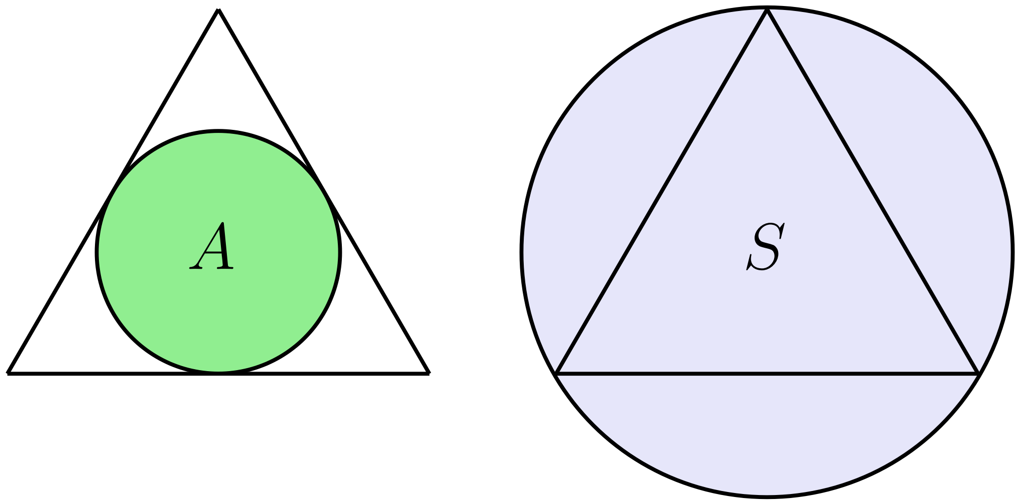
14. Àrea d'un quadrat

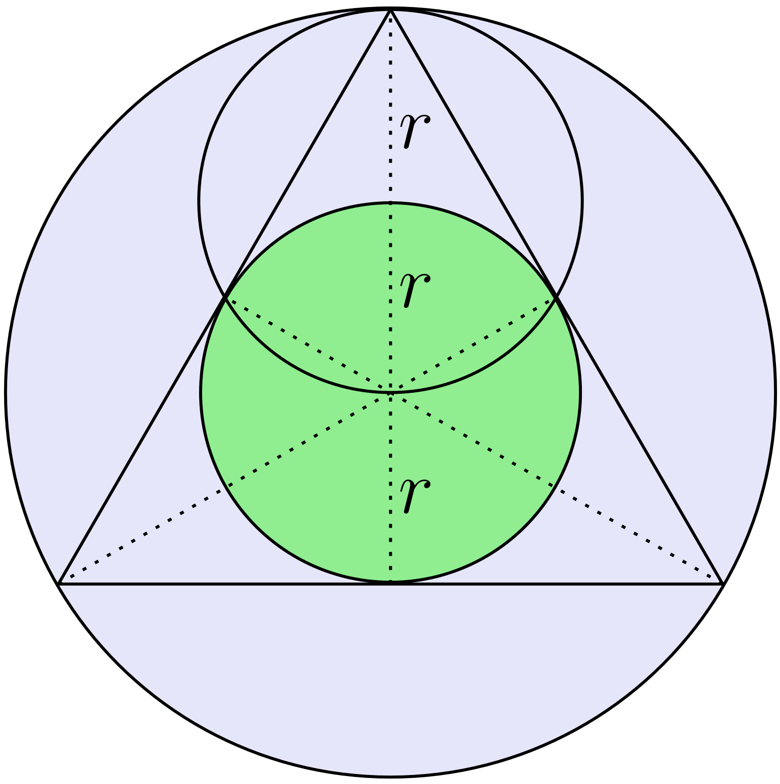


Prova:



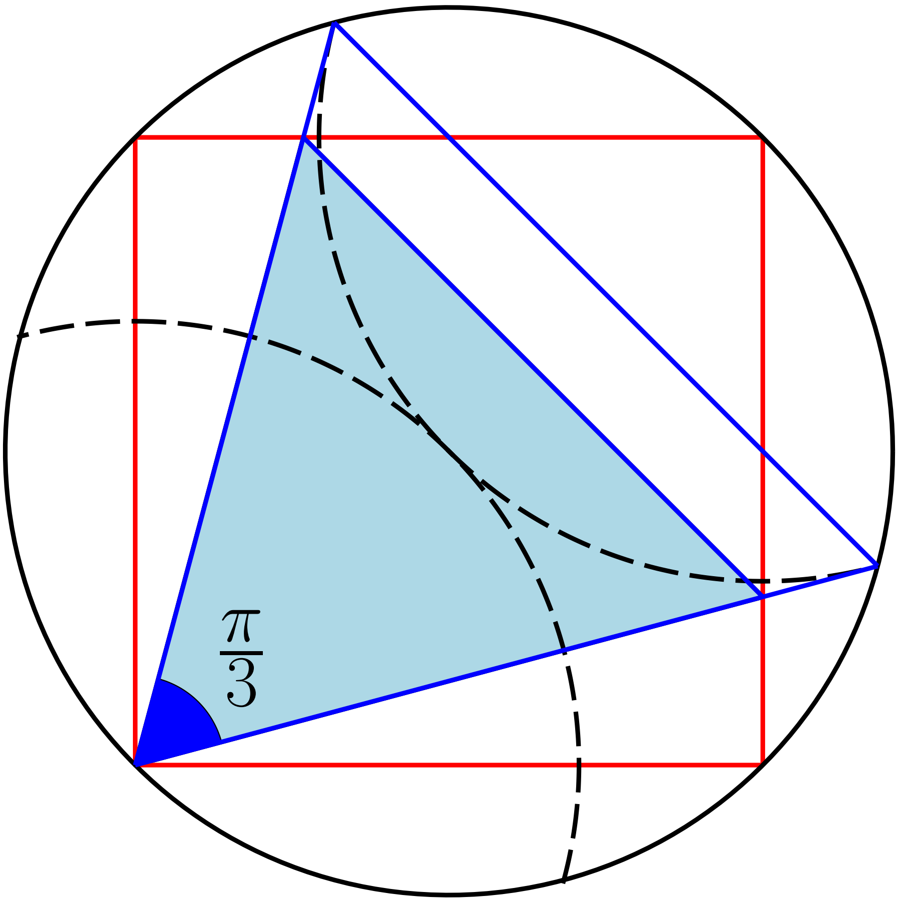
15. Cercles inscrit i circumscrit



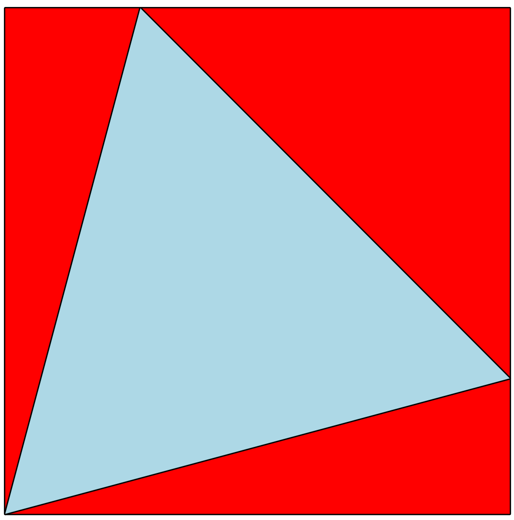


$$A = \pi r^2,\ S = \pi(2r)^2 \Longrightarrow S = 4A$$

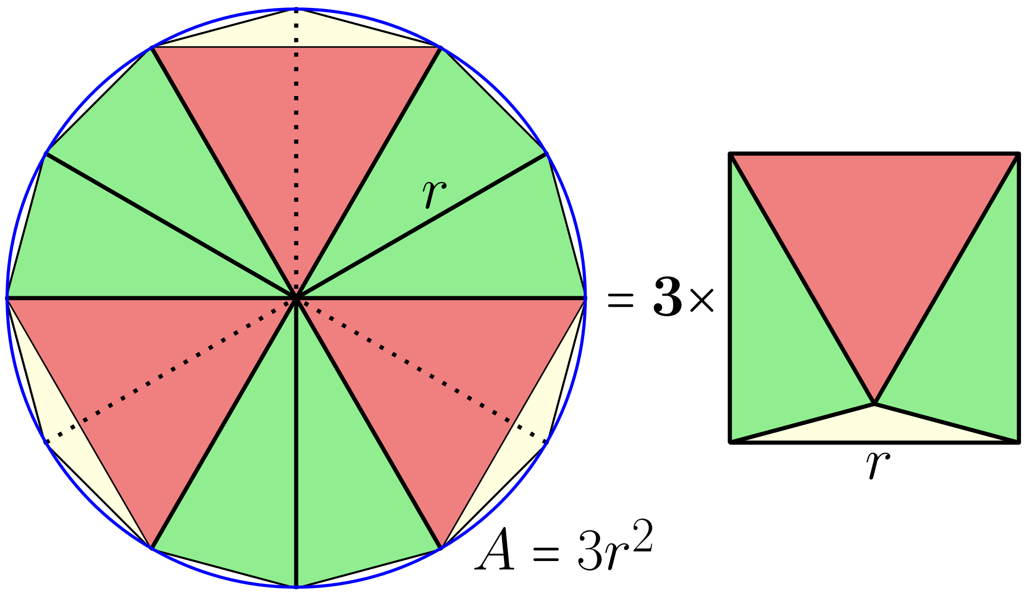
16. Triangle equilàter inscrit en un quadrat



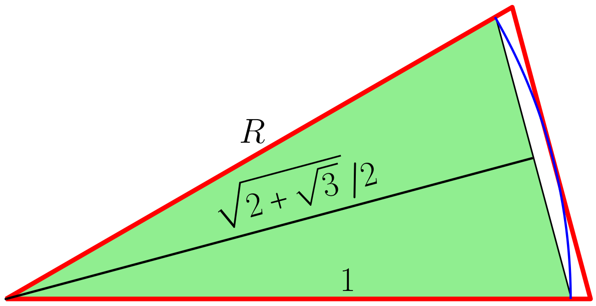
Construcció basada en la donada per Abu-l-Wafà (940-998)



17. Dodecagons i π



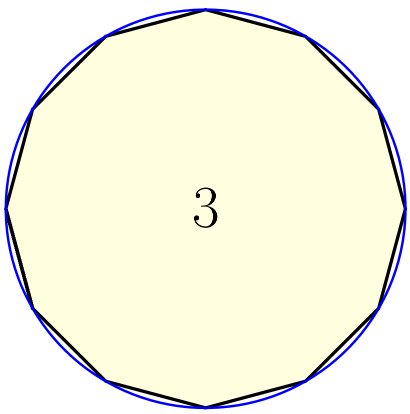
Fites per π prenent $r = 1$:



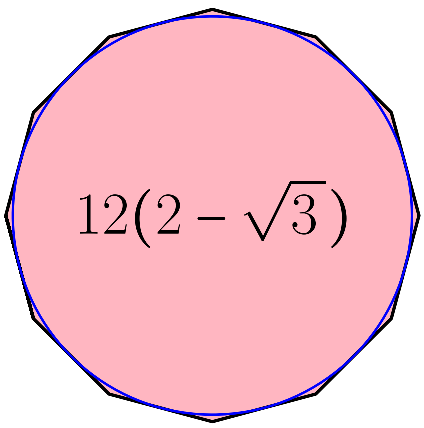
$$\frac{R}{1} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}/2}$$

$$\Downarrow$$

$$R = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$$



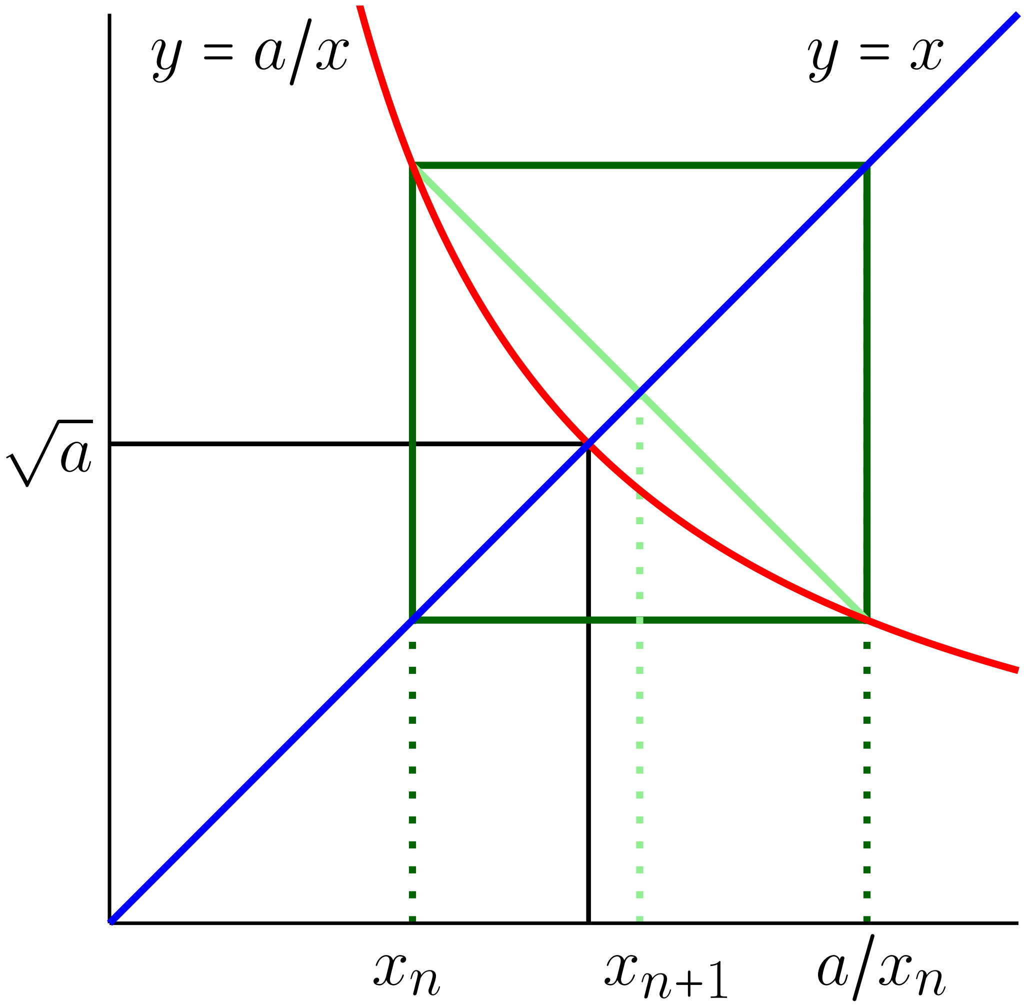
$< \pi <$



$$\Downarrow$$

$$3 < \pi < 3.22$$

18. Mètode de Newton per a calcular $\sqrt{a}$



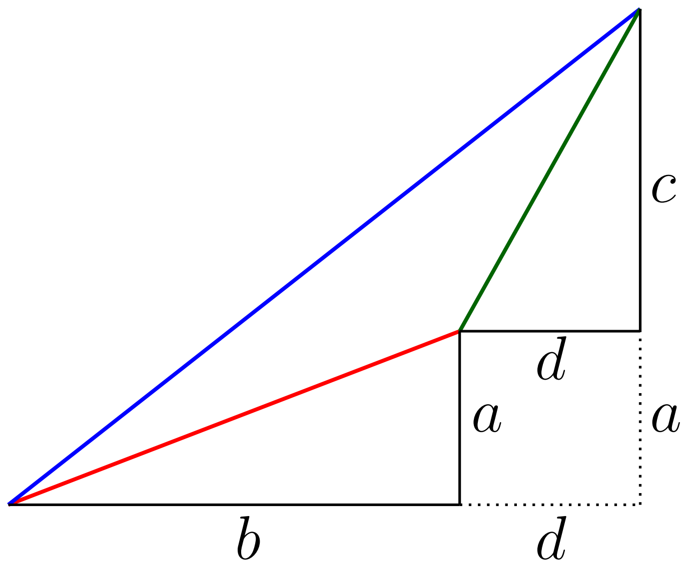
$$x_{n+1} = \frac{x_n + a/x_n}{2} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$

Convergència quadràtica:

$$2x_n x_{n+1} = x_n^2 + a \Rightarrow 2x_n\left(x_{n+1} - \sqrt{a}\right) = \left(x_n - \sqrt{a}\right)^2$$

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2}{2x_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$$

19. La fracció mediant de dues fraccions



$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Identitat de Cassini pels números de Fibonacci:

$$F_{2n}^2 - F_{2n+1}F_{2n-1} = -1 < 0 \Rightarrow \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} < \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}$$

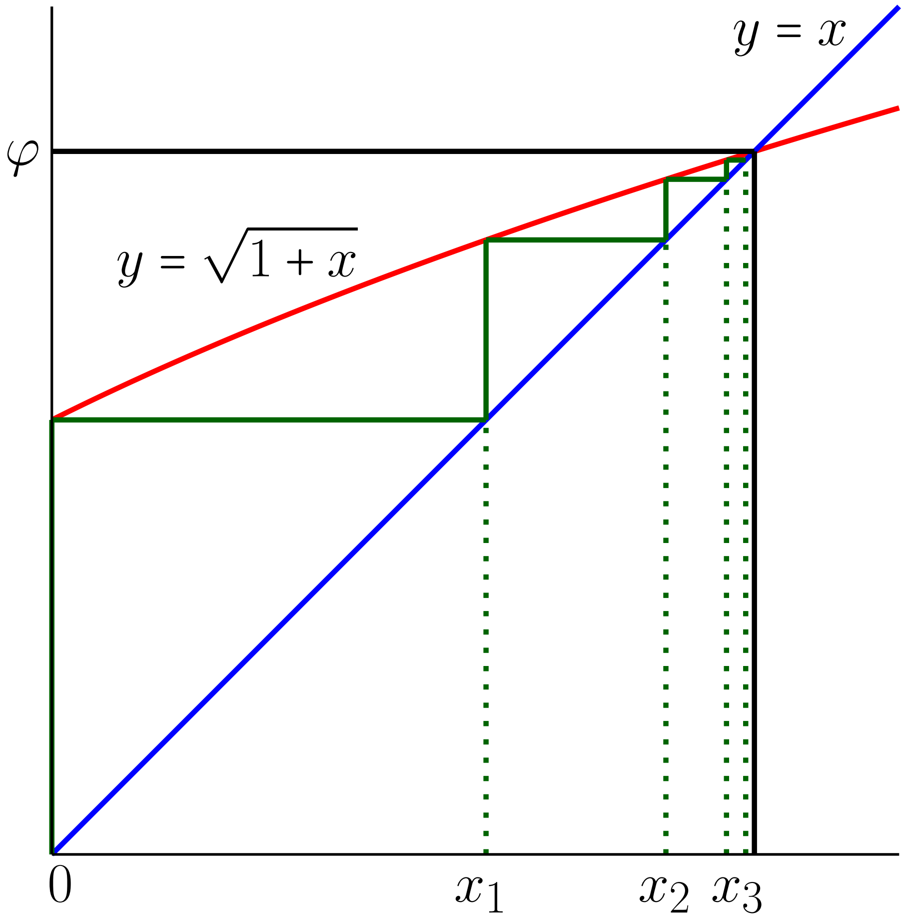
$$\Downarrow$$

$$\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} < \frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}} < \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} < \frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}} < \cdots < \frac{F_{2n+3}}{F_{2n+2}} < \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}$$

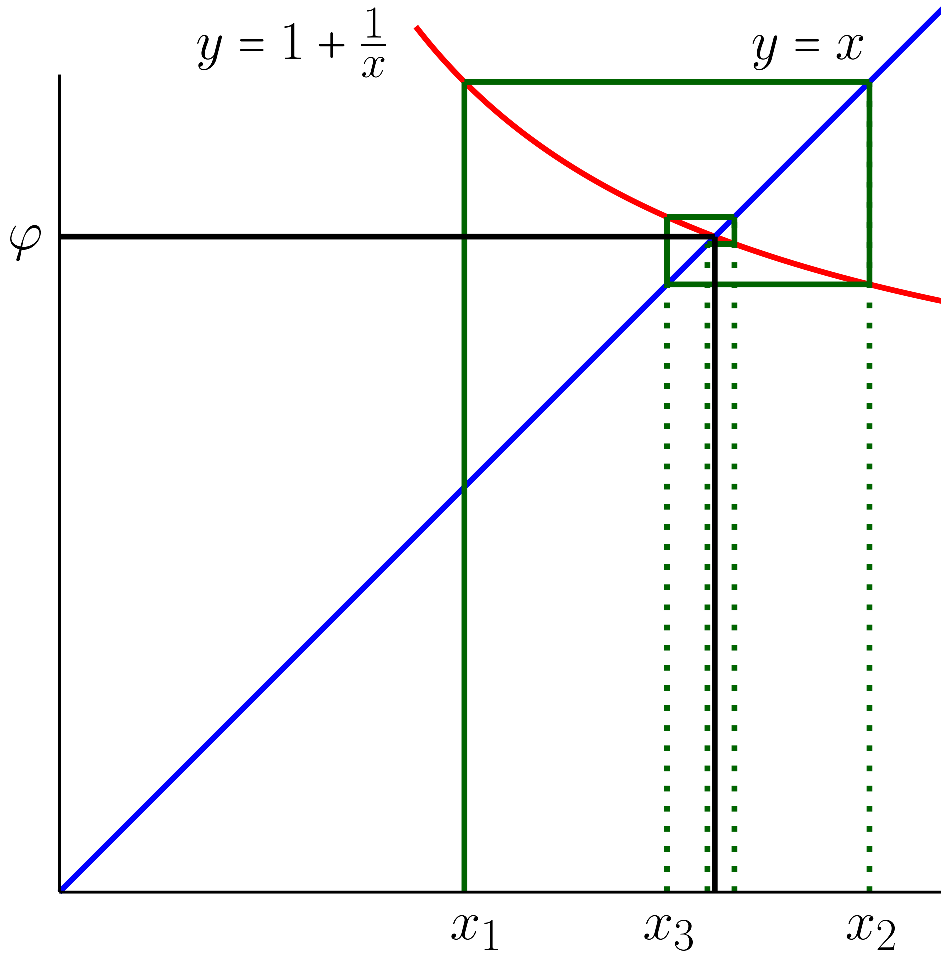
20. La raó àuria-I



$$x_1 = \sqrt{1},\ x_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}},\ x_2 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},$$
$$x_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}},\ldots$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

21. La raó àuria-II

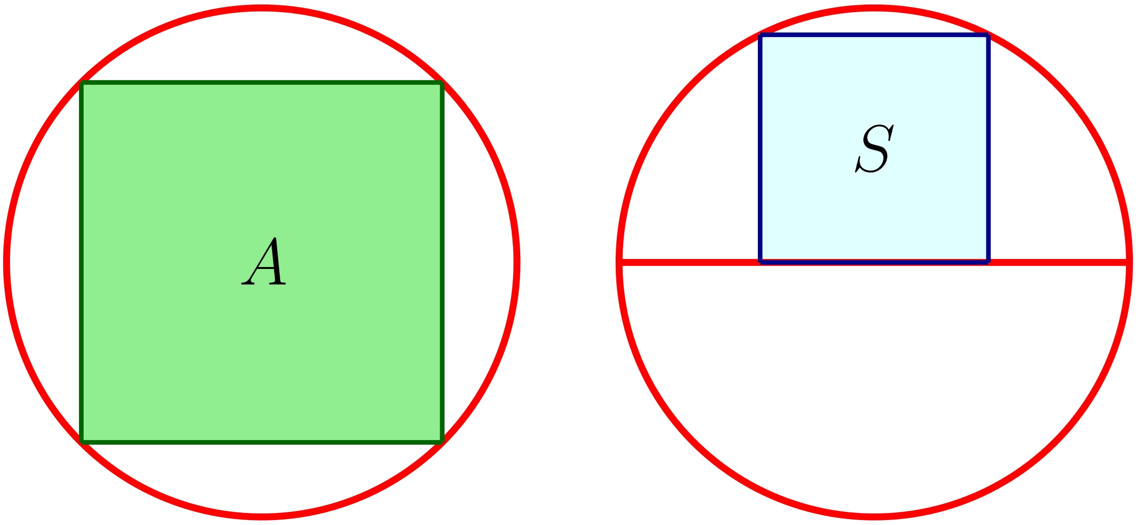


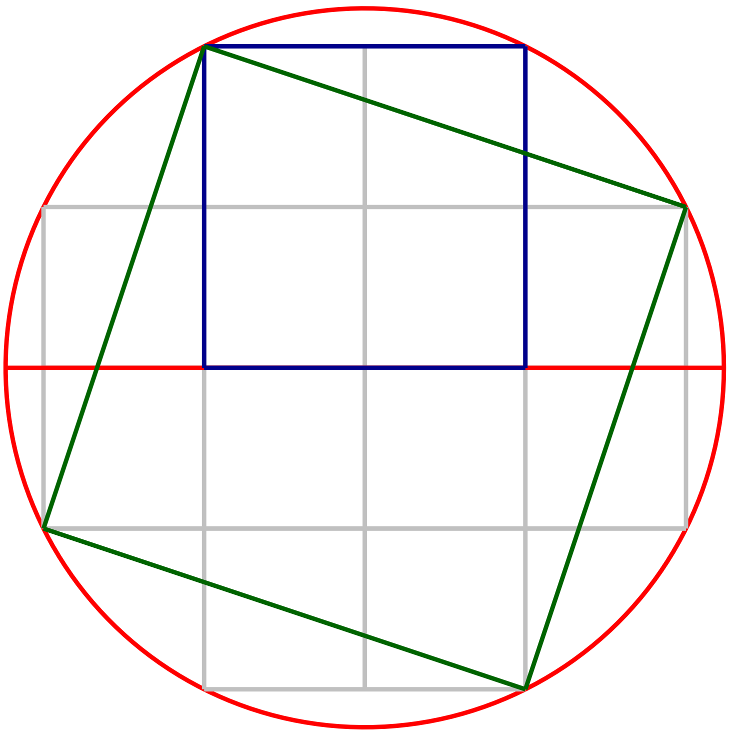
$$x_1 = 1,\ \ x_2 = 1 + \frac{1}{1},\ \ x_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}},$$

$$x_4 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}}, \dots$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}$$

22. Dos quadrats

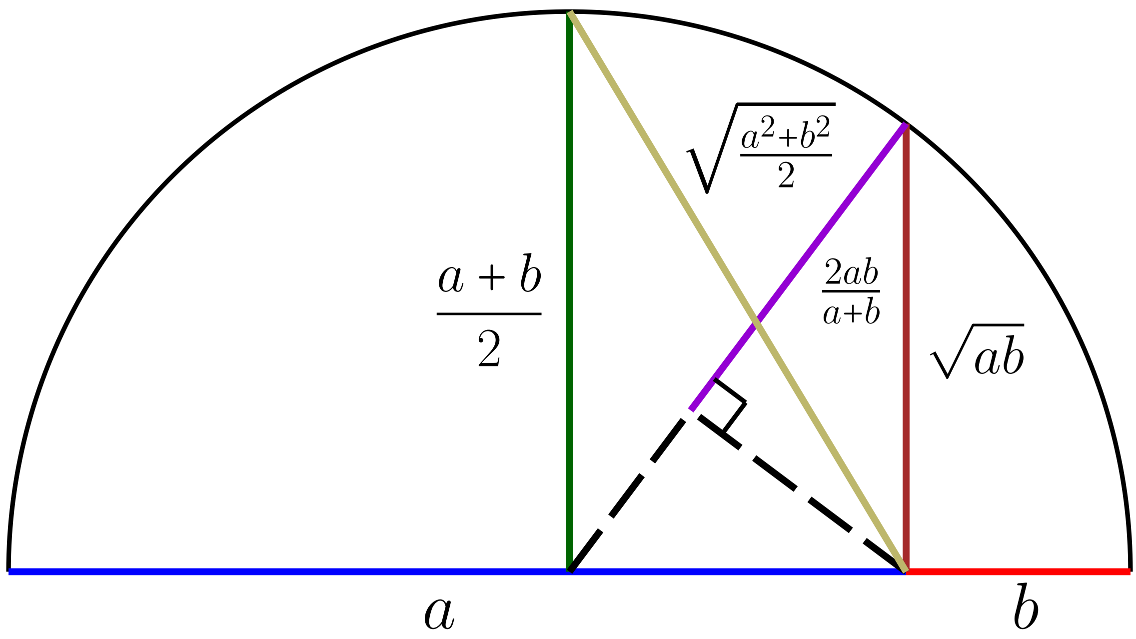




$$\Downarrow$$

$$S = \frac{2A}{5}$$

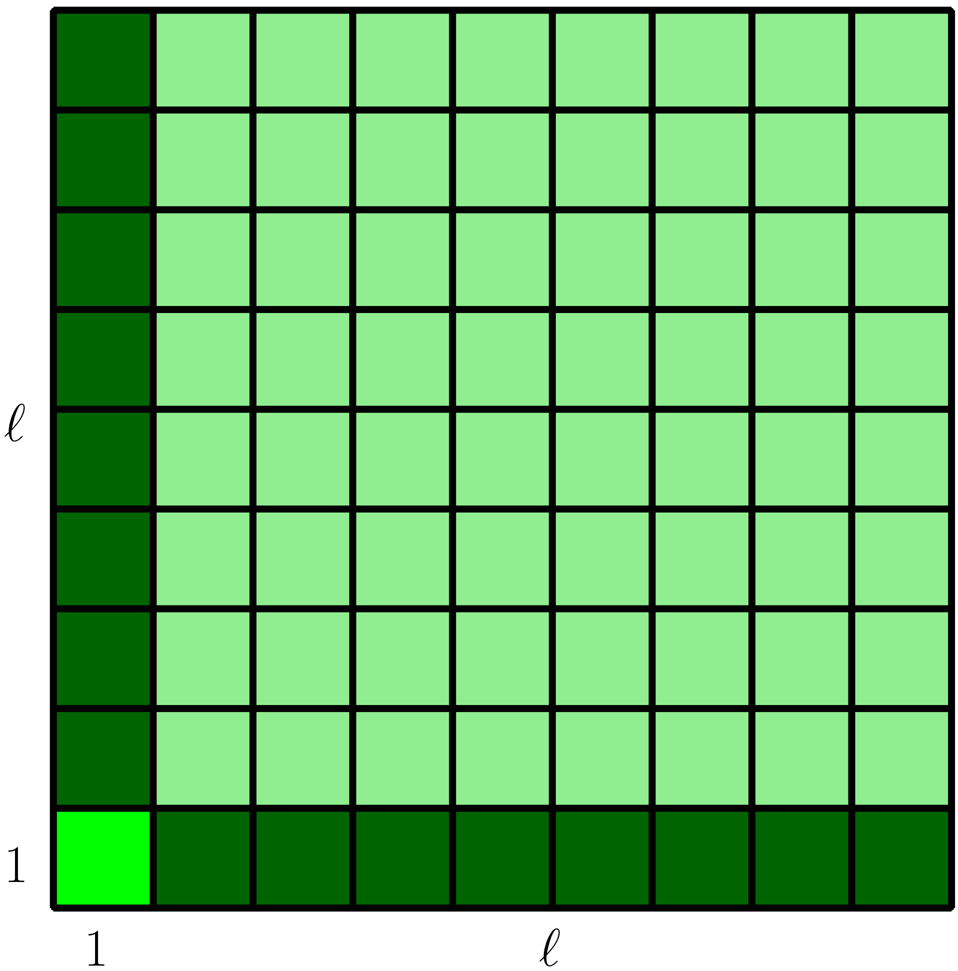
23. Relacions entre quatre mitjanes



$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$\frac{2ab}{a+b} = \sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Longleftrightarrow a = b$$

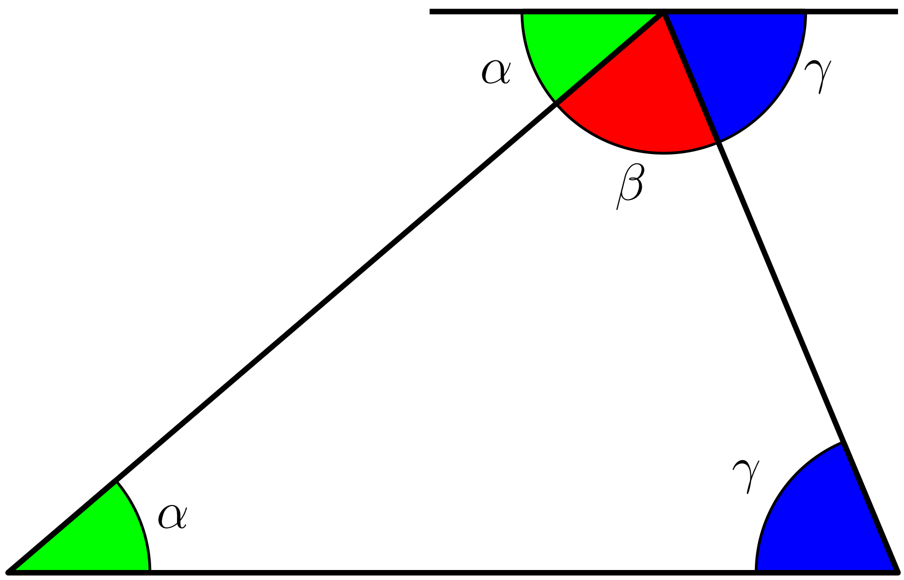
24. Infinites ternes Pitagòriques



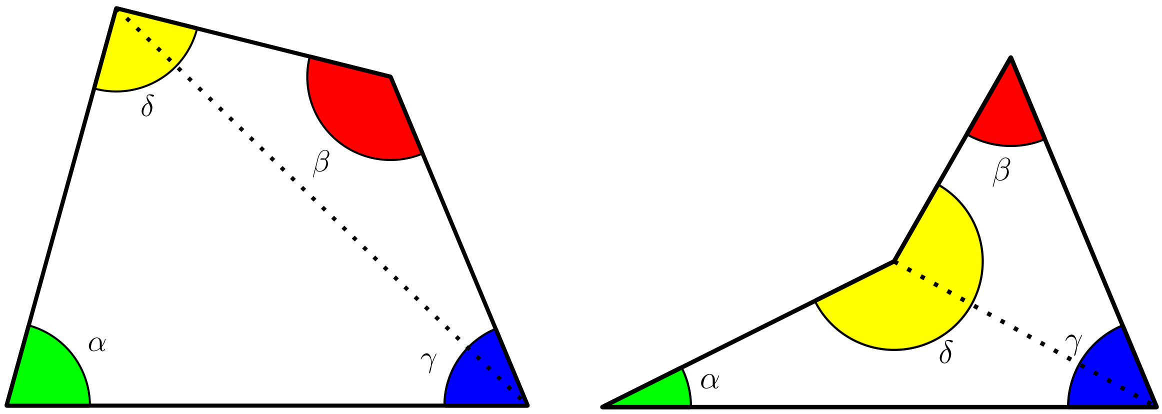
$$(\ell+1)^2 = \ell^2 + 2\ell + 1$$

$$\ell = 2m \Rightarrow (2m+1)^2 = 2k+1,\ k = 2m(m+1)$$
$$\ell = k \Rightarrow (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$$
$$\Downarrow$$
$$\big(2m(m+1)+1\big)^2 = \big(2m(m+1)\big)^2 + (2m+1)^2$$

25. Suma dels angles d'un triangle o d'un quadrilàter

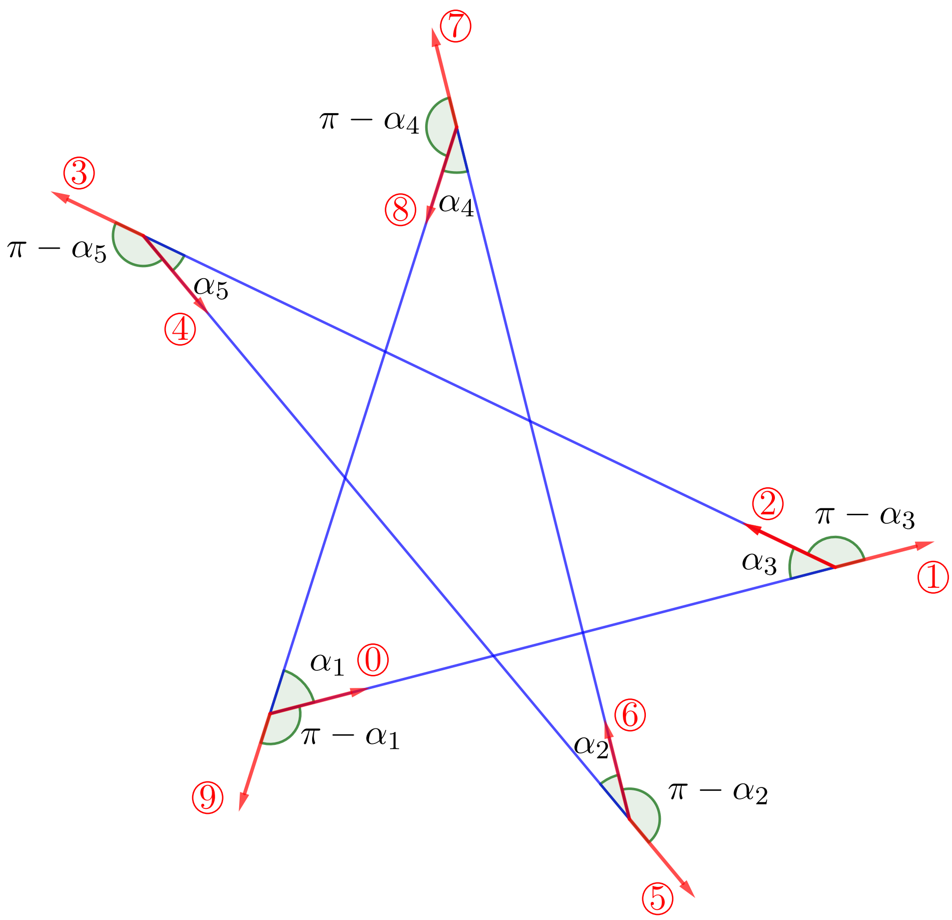


$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$



$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$$

26. Suma dels angles d'una estrella de 5 puntes



$$⓪ \longrightarrow ① \longrightarrow ② \longrightarrow \cdots \longrightarrow ⑧ \longrightarrow ⑨ \longrightarrow ⓪$$

(el vector ha fet en total 2 voltes)

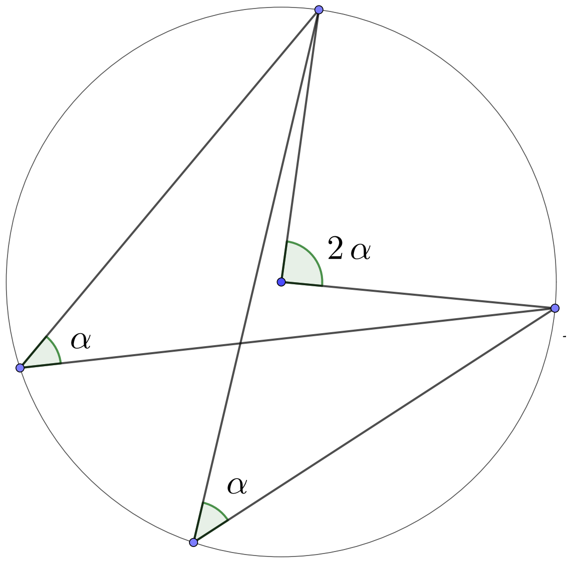
$$(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + (\pi - \alpha_3) \\ + (\pi - \alpha_4) + (\pi - \alpha_5) = 4\pi$$

$$\Downarrow$$

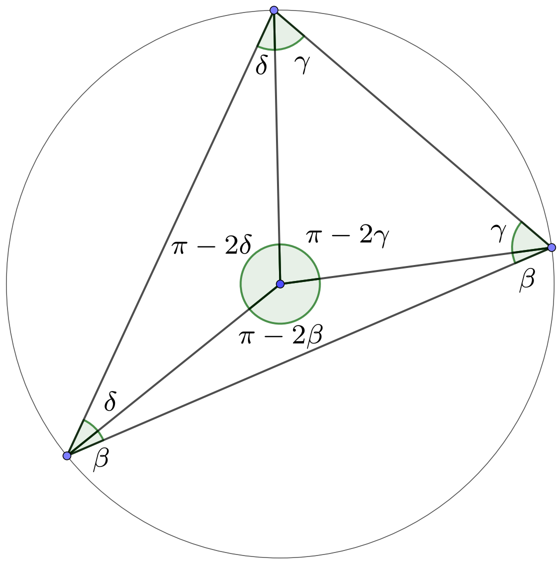
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \pi$$

NOTA: Usant la mateixa idea obtenim que la suma de tots els angles interiors d'un polígon de n costats és $(n-2)\pi$

27. Arc capaç



Prova:

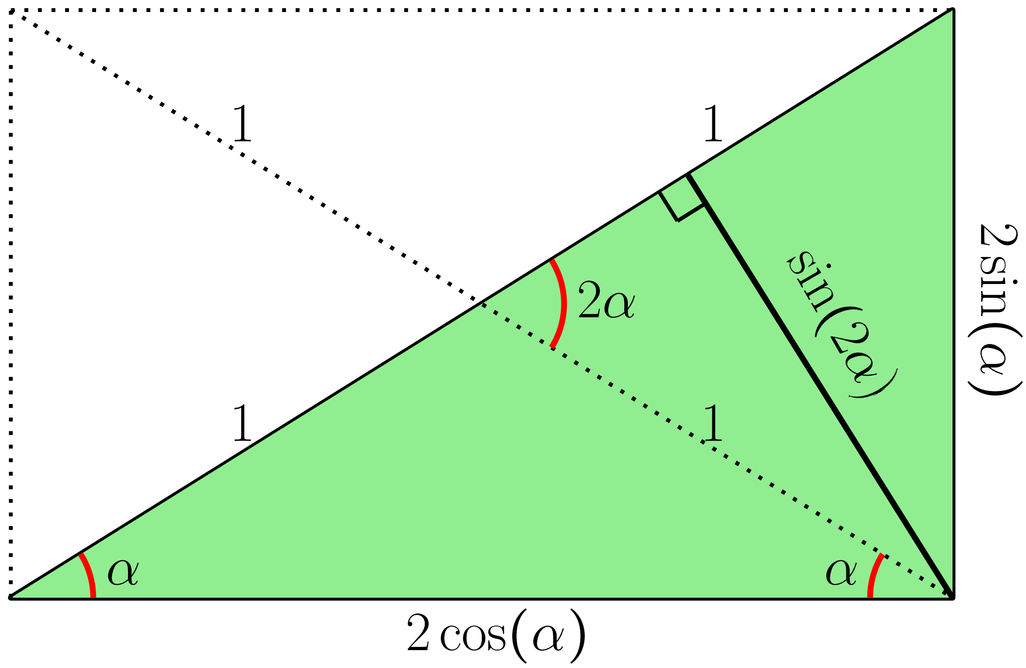


$$2\pi = (\pi - 2\beta) + (\pi - 2\gamma) + (\pi - 2\delta)$$

$$\Downarrow$$

$$\pi - 2\gamma = 2(\beta + \delta)$$

28. Sinus de l'angle doble



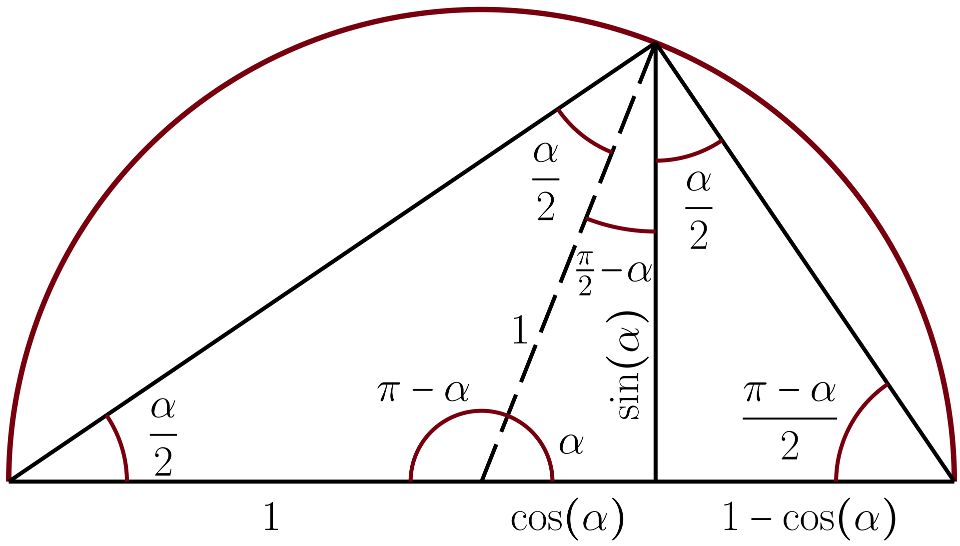
$$A = \frac{2\cos(\alpha)\cdot 2\sin(\alpha)}{2}$$

$$A = \frac{2\cdot \sin(2\alpha)}{2}$$

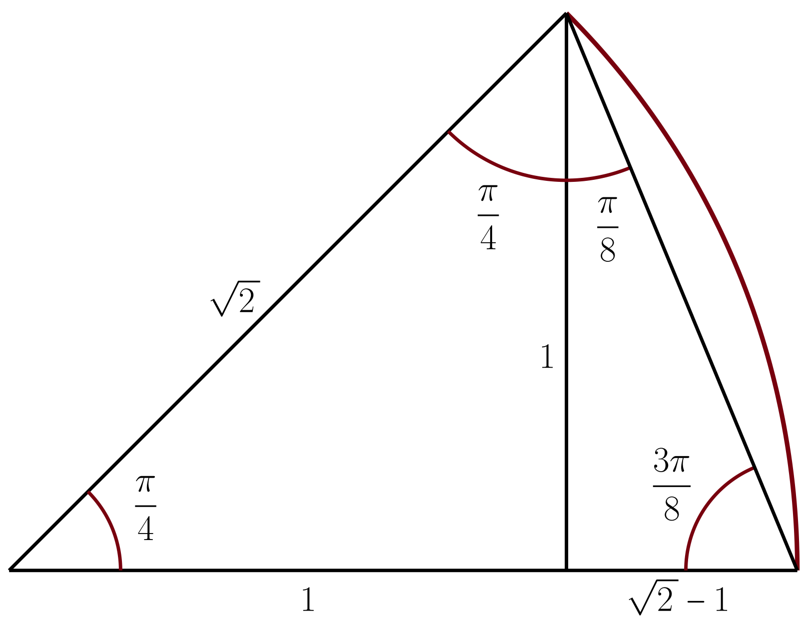
$$\Downarrow$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

29. Tangent de l'angle meitat

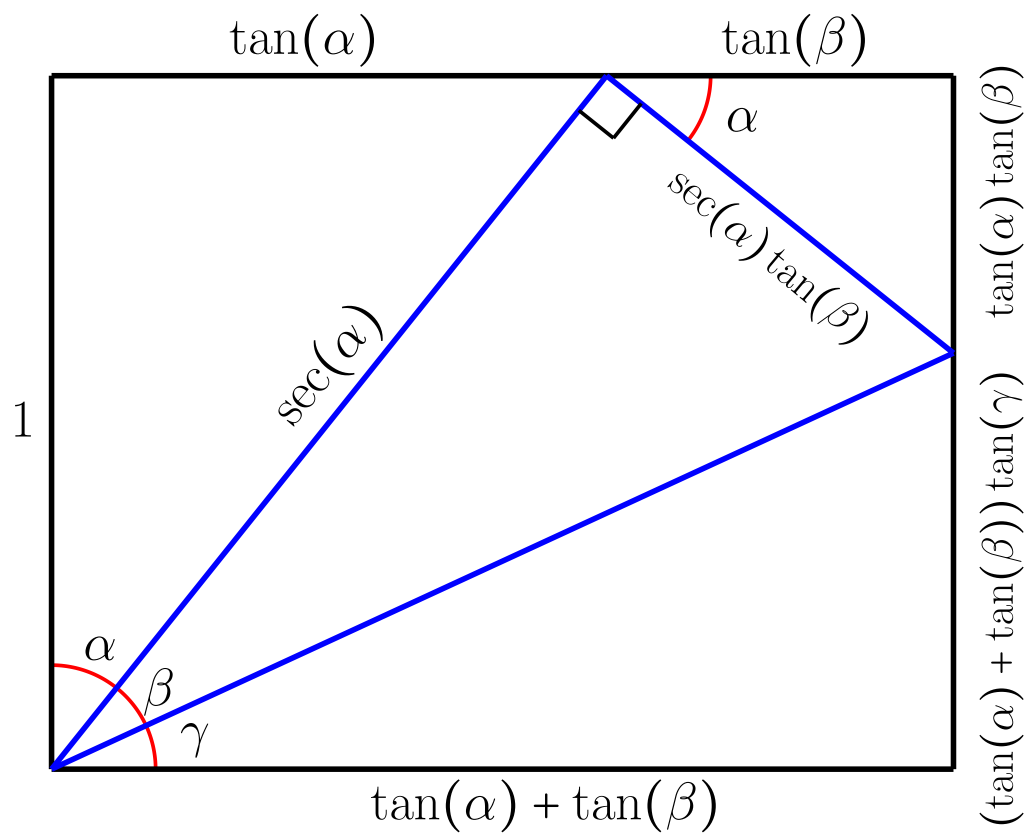


$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$



$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$$

30. Una relació entre tangents

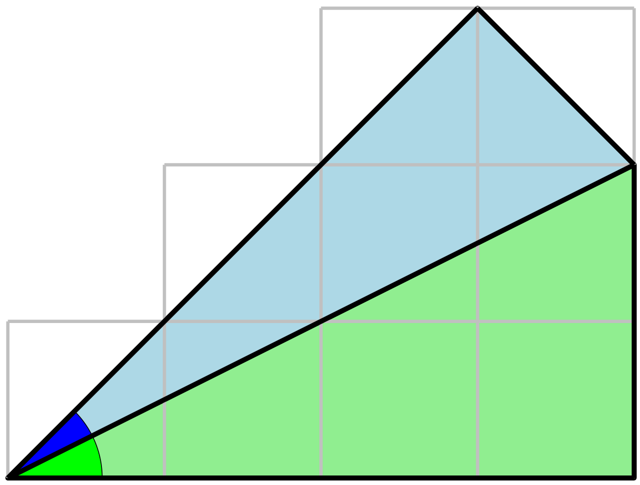


$$\alpha, \beta, \gamma > 0 \quad \& \quad \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

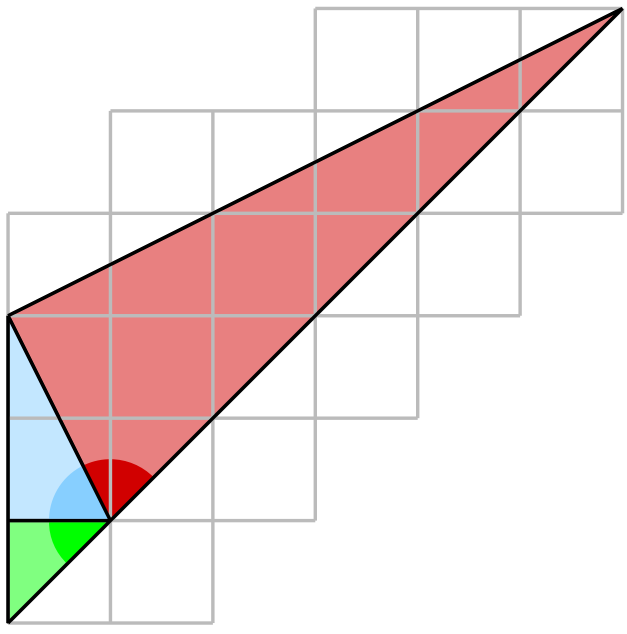
$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \tan(\alpha)\tan(\beta) + \tan(\beta)\tan(\gamma) \\ + \tan(\gamma)\tan(\alpha) = 1 \end{aligned}$$

31. Dues fórmules de tipus Machin

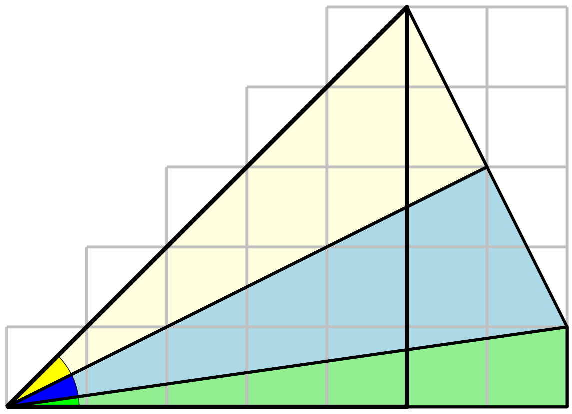


$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$



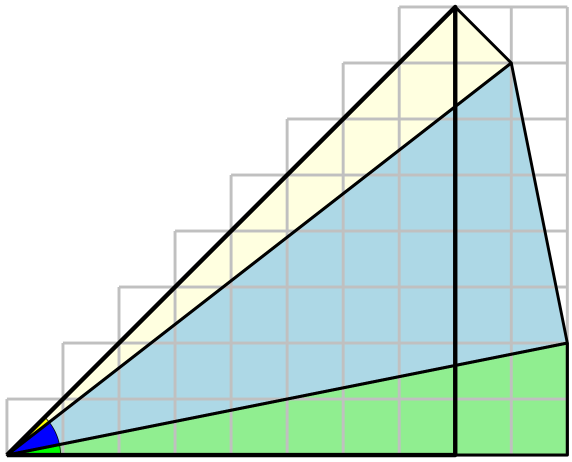
$$\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi$$

32. Fórmules de Hutton i Strassnitzky



Hutton (1776):

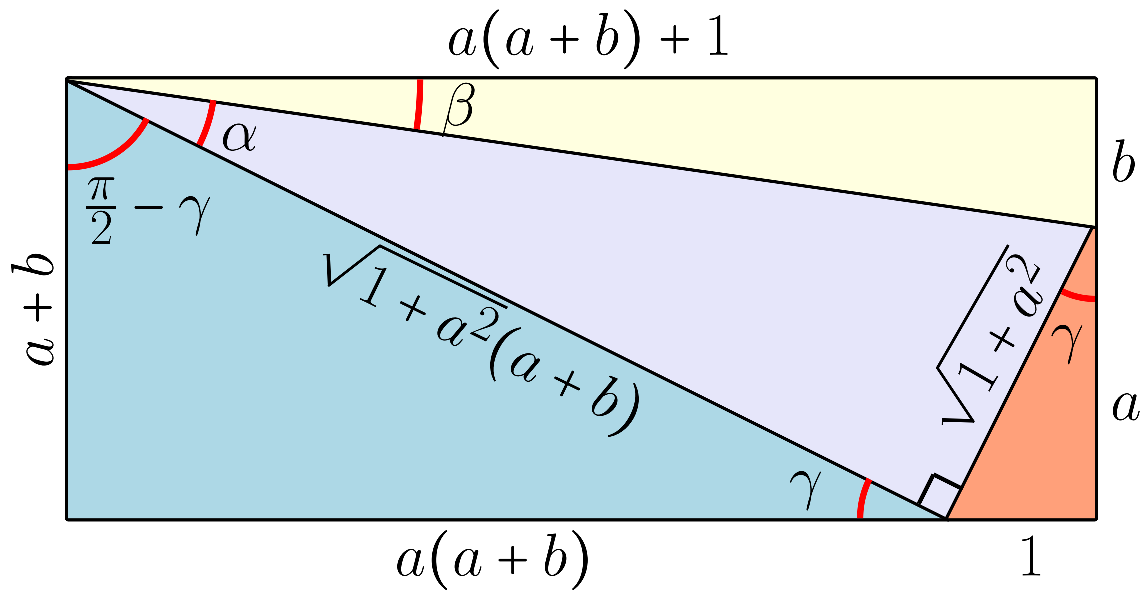
$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$$



Strassnitzky(1844):

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$$

33. Identitat d'Euler per a arctangents



$$\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}(a+b)} = \frac{1}{a+b}$$

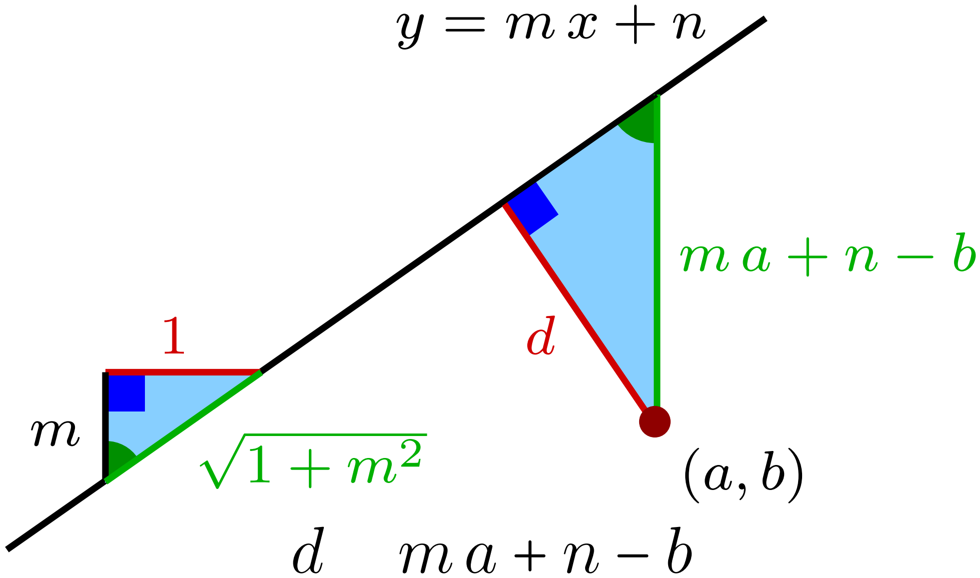
$$\tan(\beta) = \frac{b}{a^2+ab+1}, \quad \tan(\gamma) = \frac{1}{a}$$

$$\gamma = \alpha + \beta$$

$$\Downarrow$$

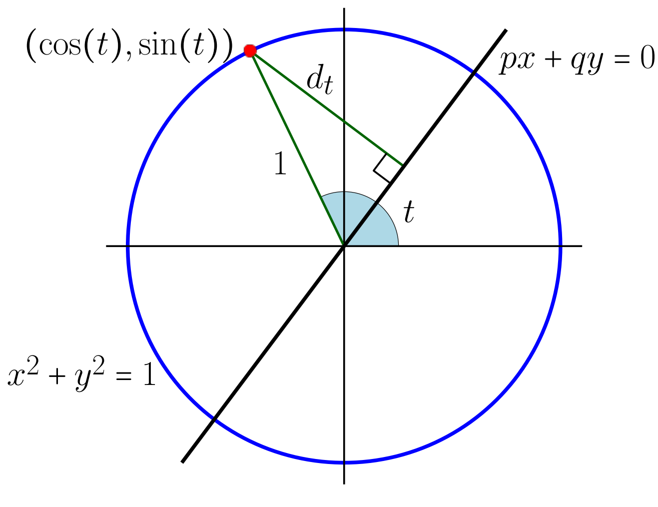
$$\arctan\left(\frac{1}{a}\right) = \arctan\left(\frac{1}{a+b}\right) + \arctan\left(\frac{b}{a^2+ab+1}\right)$$

34. Distància d'un punt a una recta



$$\frac{d}{1} = \frac{m\,a + n - b}{\sqrt{1+m^2}}$$

Aplicació: fites d'una funció



$$d_t \leq 1$$

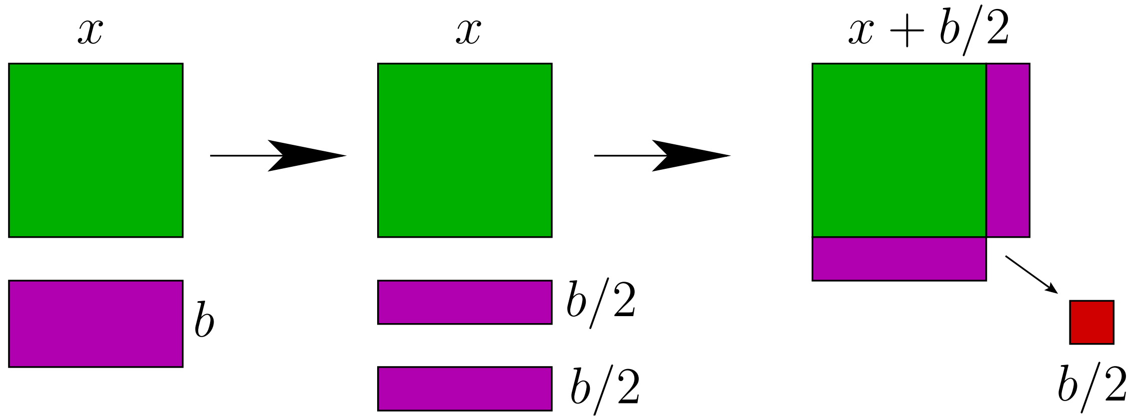
$$\Downarrow$$

$$\frac{|p\cos(t)+q\sin(t)|}{\sqrt{p^2+q^2}} \leq 1$$

$$\Downarrow$$

$$-\sqrt{p^2+q^2} \leq p\cos(t) + q\sin(t) \leq \sqrt{p^2+q^2}$$

35. Equació de segon grau



$$x^2 + bx + c = (x + b/2)^2 - (b/2)^2 + c$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow (x + b/2)^2 = (b/2)^2 - c$$

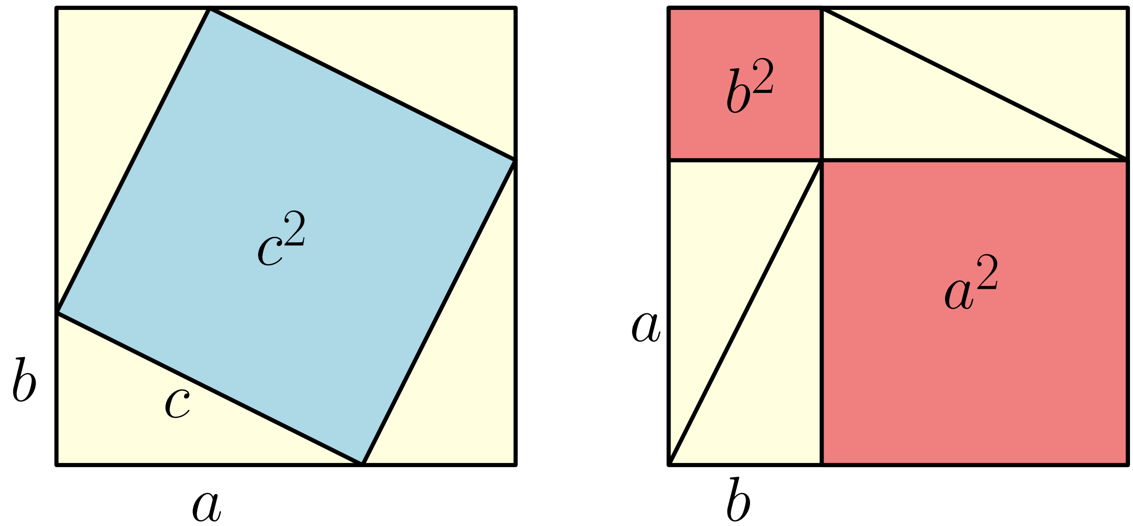
$$\Downarrow$$

$$x + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

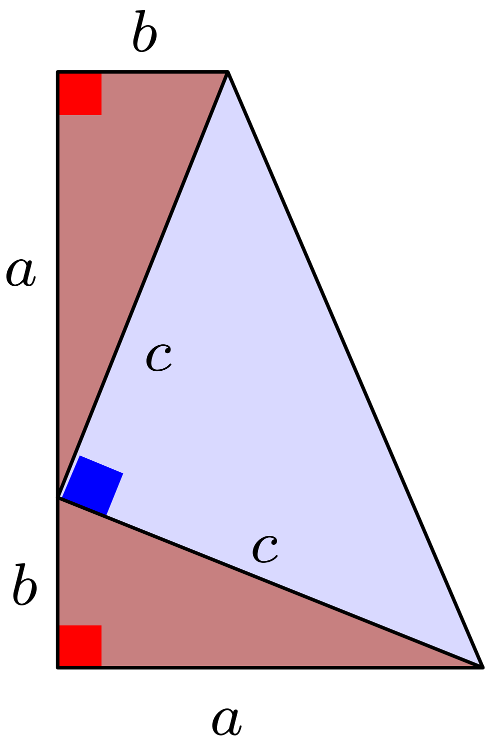
$$\Downarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

36. Proves del Teorema de Pitàgores



$$4\,\frac{ab}{2} + c^2 = 4\,\frac{ab}{2} + a^2 + b^2 \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 = c^2$$



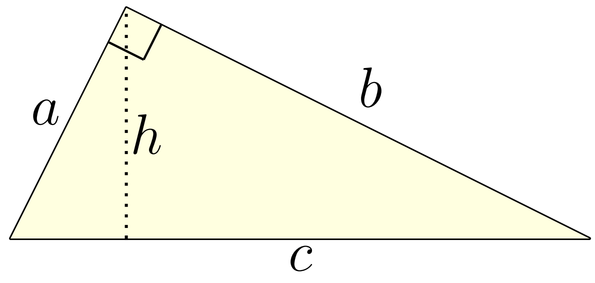
$$\frac{(a+b)}{2}\cdot(a+b)$$

$$= 2\,\frac{(a\,b)}{2} + \frac{c^2}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

37. Un "Teorema de Pitàgores" per inversos

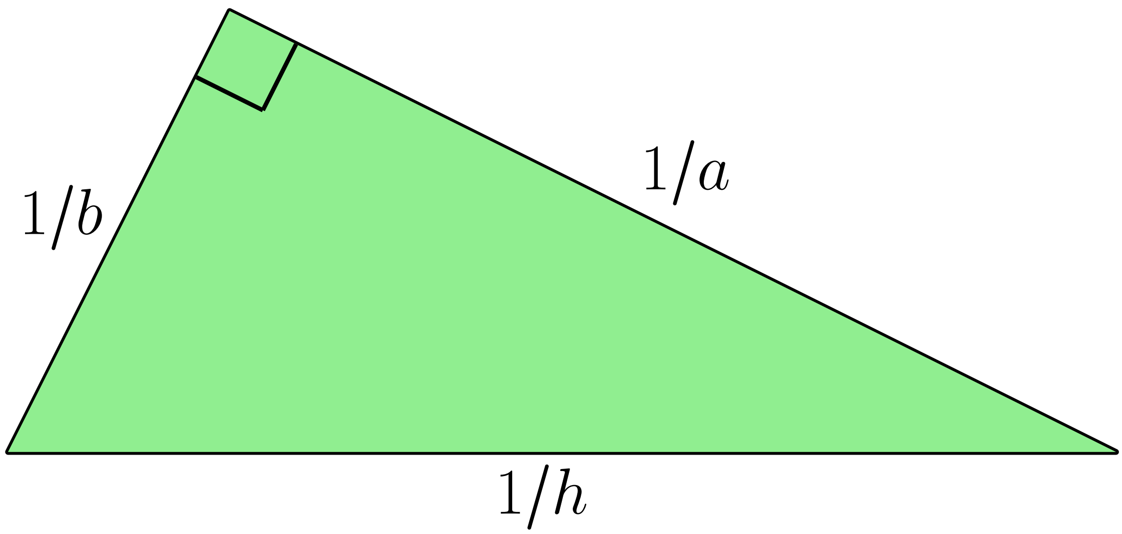


$$\frac{c\,h}{2} = \frac{a\,b}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$h = \frac{a\,b}{c}$$

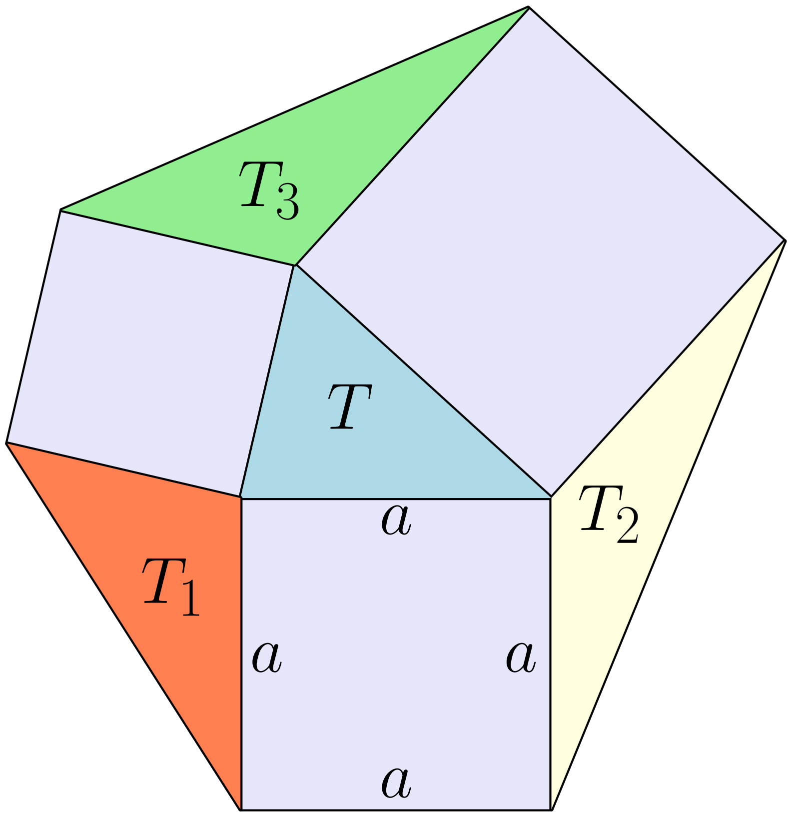
$$\Big\downarrow \times \frac{1}{a\,b}$$

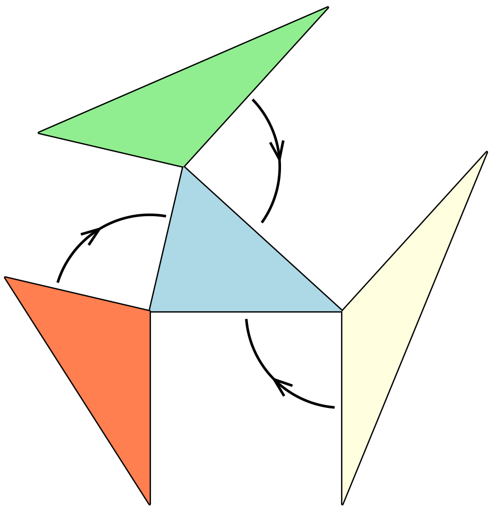


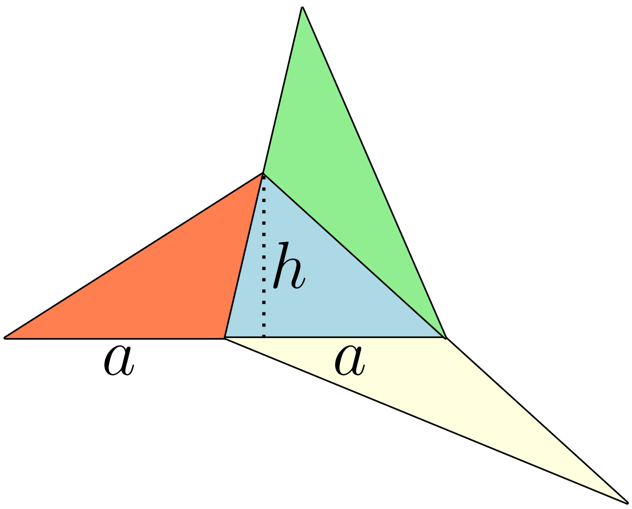
$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 = \left(\frac{1}{h}\right)^2$$

38. Quatre triangles amb la mateixa àrea

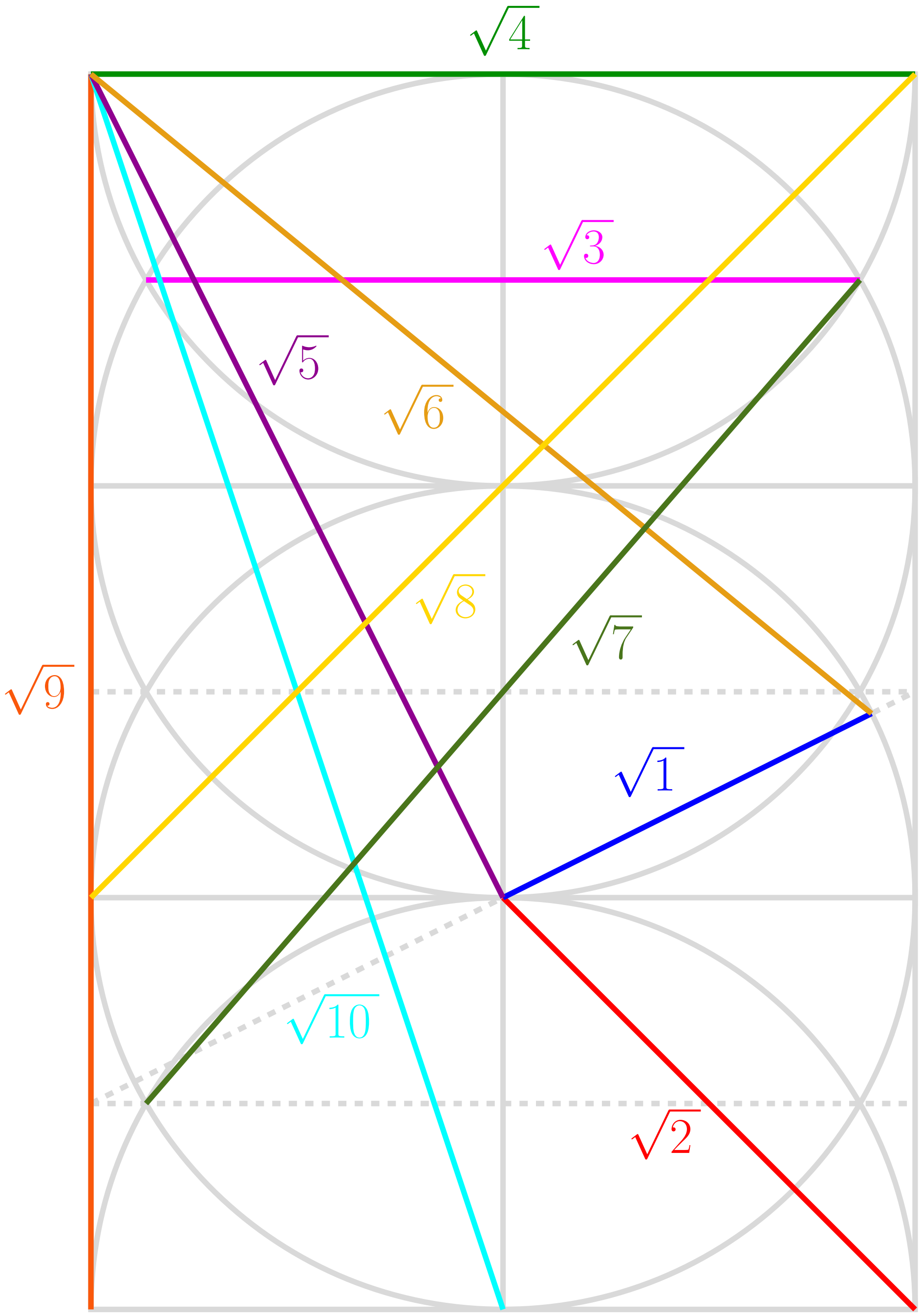




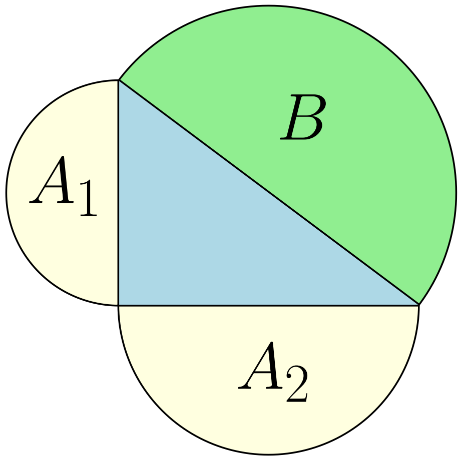


$$T = \frac{ah}{2} = T_1 \Longrightarrow T = T_1 = T_2 = T_3$$

39. Un divertiment



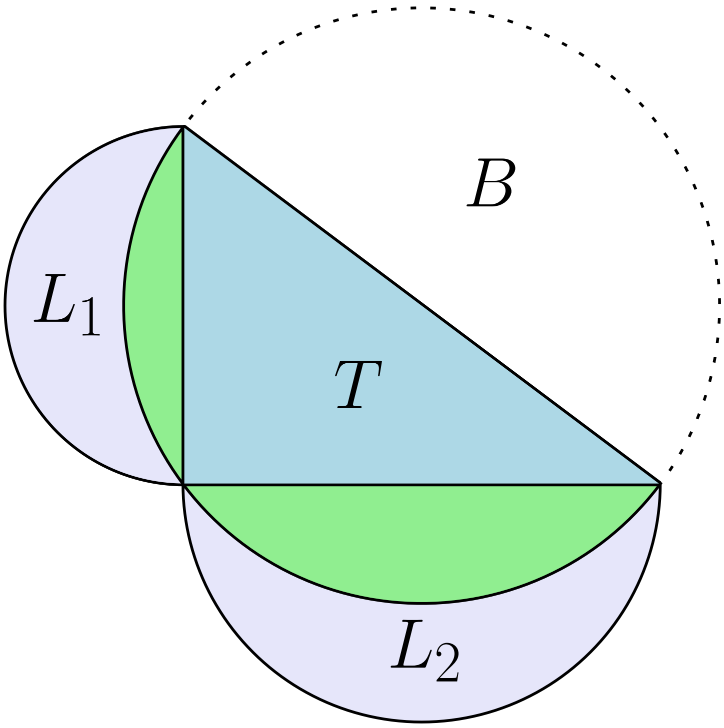
40. Lúnules d'Hipòcrates



T. de Pitàgores

$$\Downarrow$$

$$A_1 + A_2 = B$$

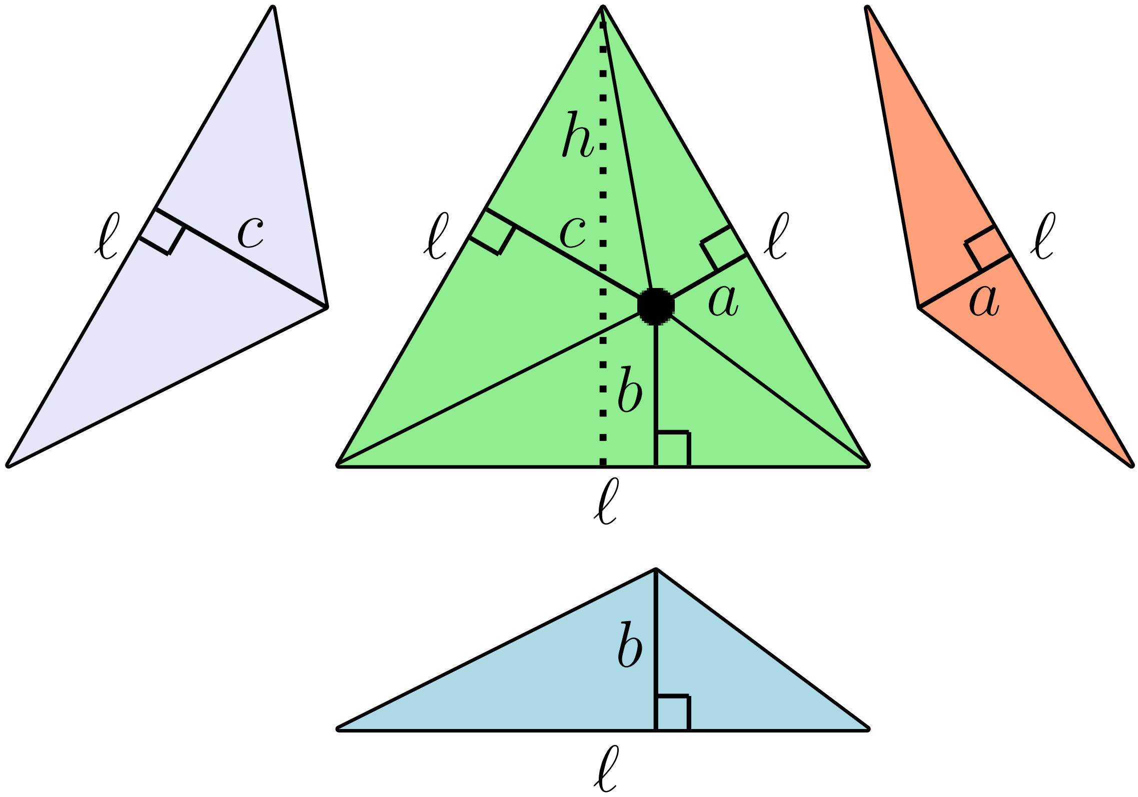


$$L_1 + L_2 + (B - T) = A_1 + A_2 = B$$

$$\Downarrow$$

$$L_1 + L_2 = T$$

41. Teorema de Viviani

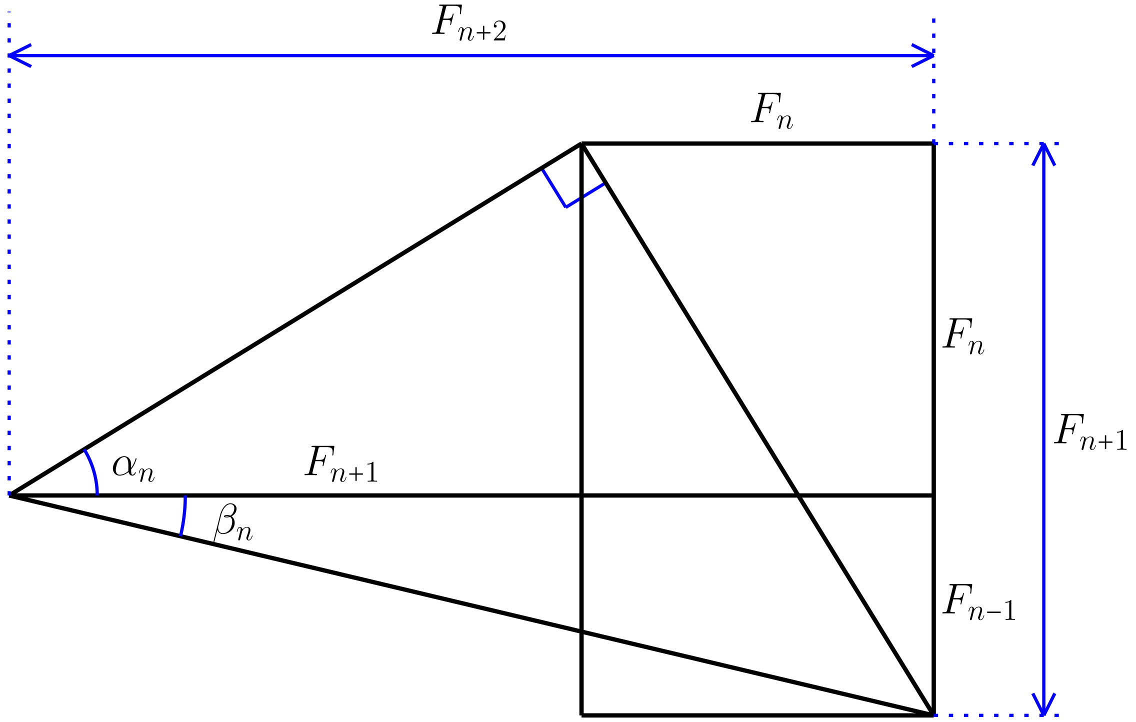


$$\frac{\ell h}{2} = \frac{\ell a}{2} + \frac{\ell b}{2} + \frac{\ell c}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$h = a + b + c$$

42. Números de Fibonacci, π i la raó àuria



$$\frac{\pi}{4} = \alpha_n + \beta_n = \arctan\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}\right) + \arctan\left(\frac{F_{n-1}}{F_{n+2}}\right)$$

$$\begin{array}{l} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_{m+2} = F_m + F_{m+1},\ m \geq 0, \\ \varphi = (1+\sqrt{5})/2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} F_m = \dfrac{\varphi^m - (-\varphi)^{-m}}{\sqrt{5}} \\ \lim_{m\to\infty} F_{m+1}/F_m = \varphi \end{cases}$$

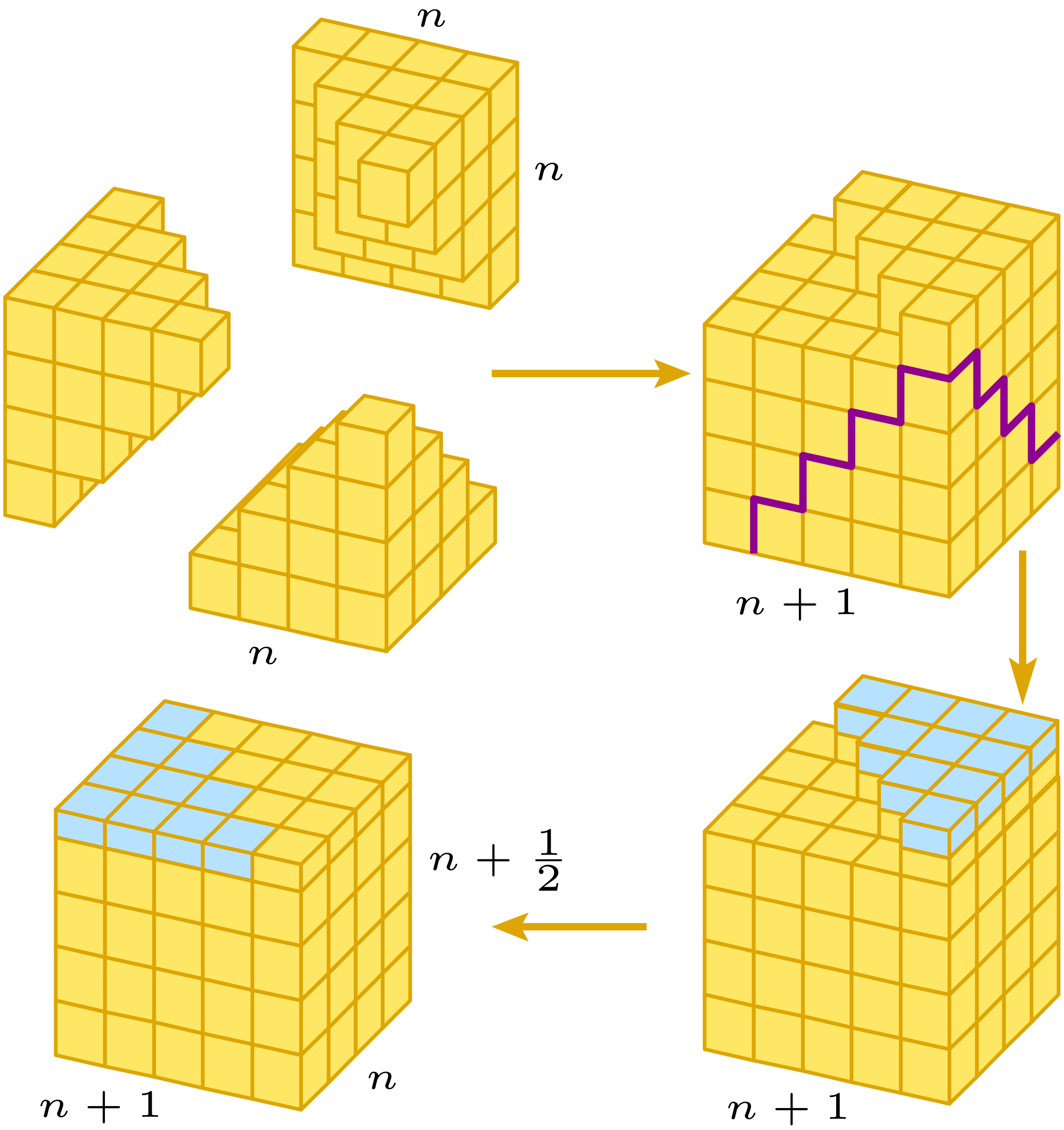
$$\Downarrow \quad (n \longrightarrow \infty)$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{\varphi}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\varphi^3}\right)$$

$$\Updownarrow$$

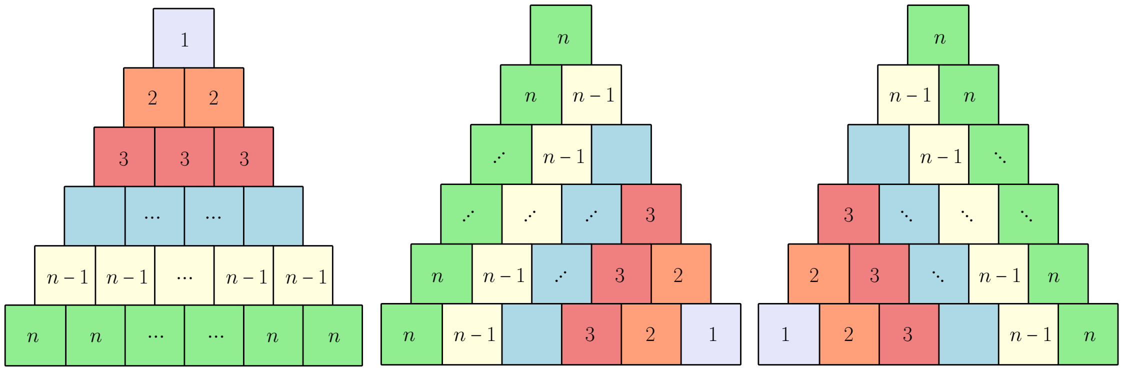
$$\frac{3\pi}{4} = \arctan(\varphi) + \arctan\left(\varphi^3\right)$$

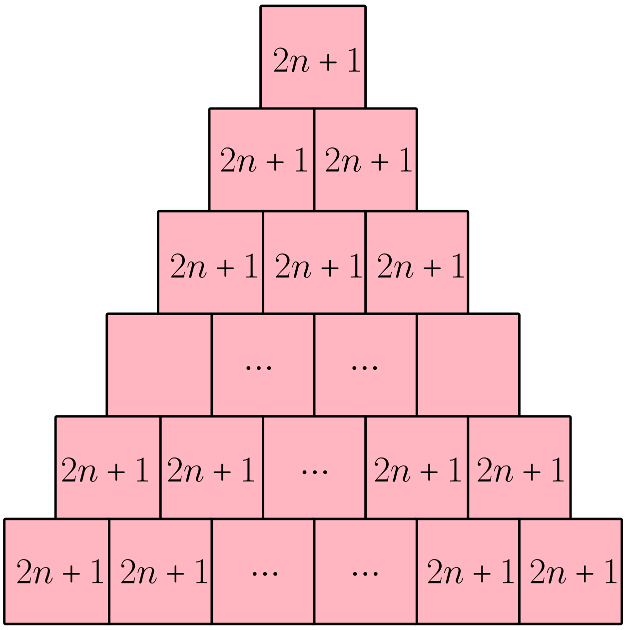
43. Suma de quadrats-I



$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+1/2)}{3}$$

44. Suma de quadrats-II





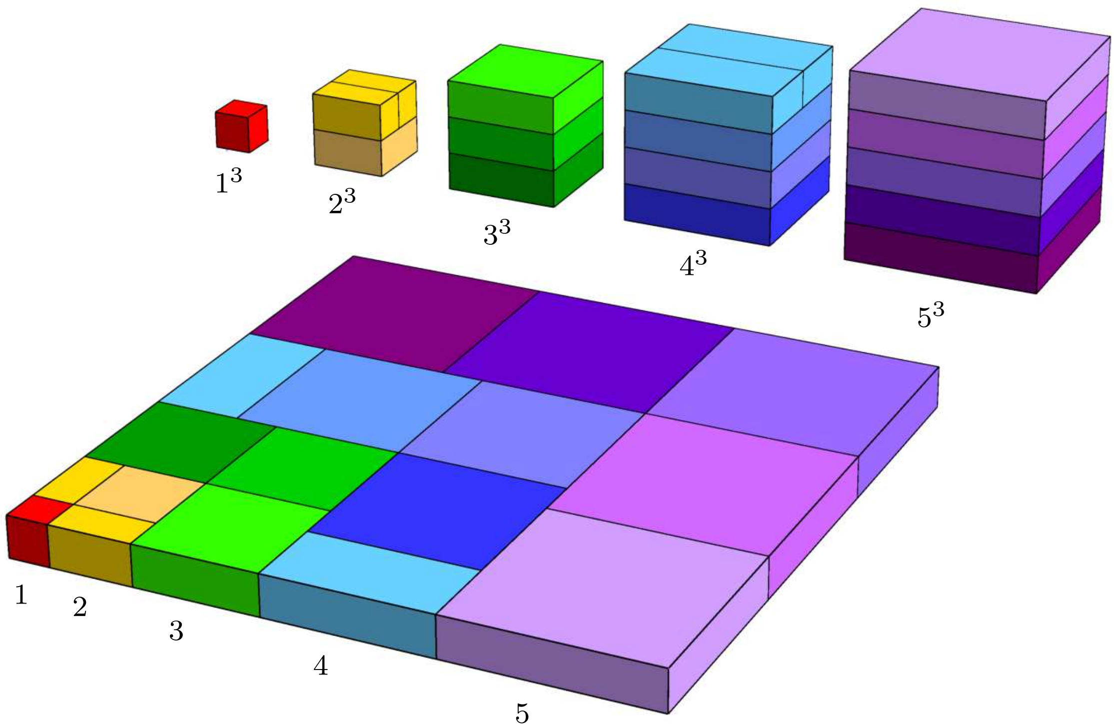
$$3\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right)$$

$$= (2n+1)(1+2+3+\cdots+n) = (2n+1)\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Downarrow$$

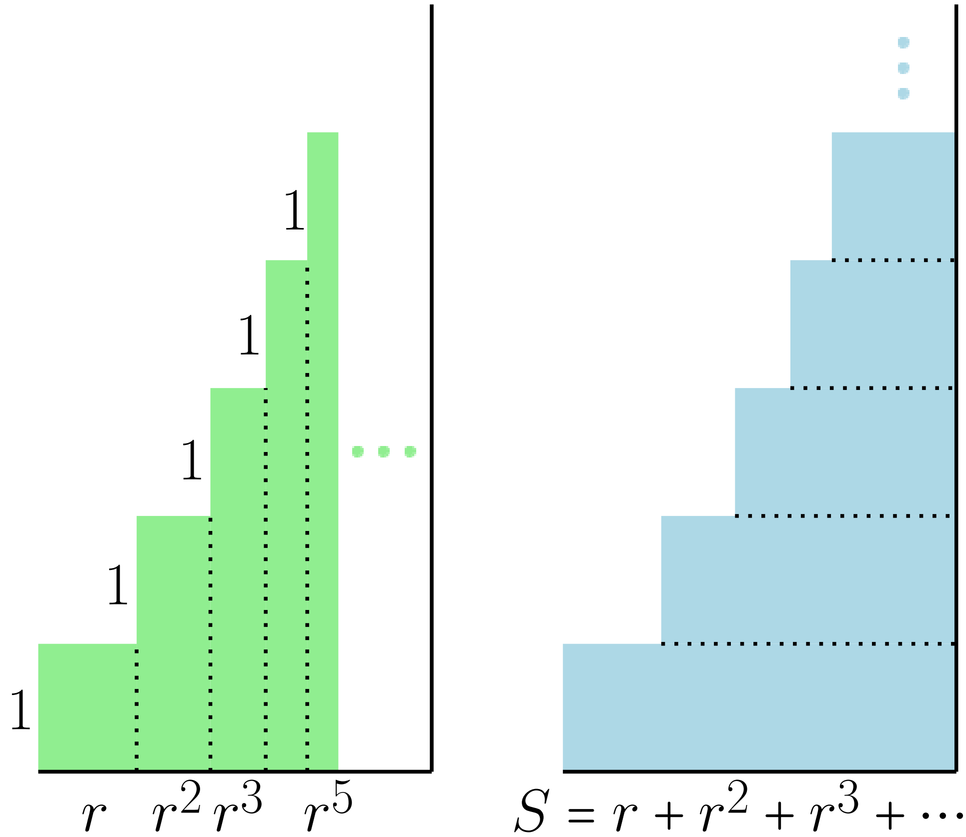
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

45. Suma de cubs



$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(1 + 2 + \cdots + n\right)^2$$
$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

46. Suma de la derivada d'una sèrie geomètrica



.

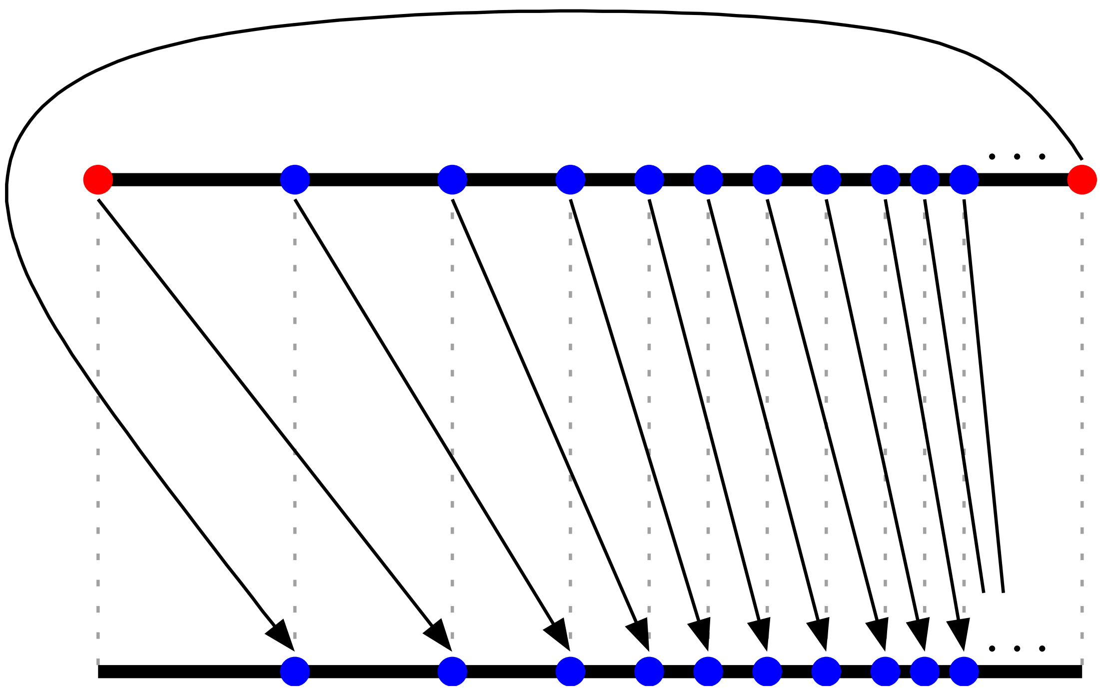
$$S = \sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m=k}^{\infty} r^m \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(\sum_{j=0}^{\infty} r^j \right) = \frac{r}{1-r} \cdot \frac{1}{1-r} = \frac{r}{(1-r)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \frac{r}{(1-r)^2}, \quad k \in (0,1)$$

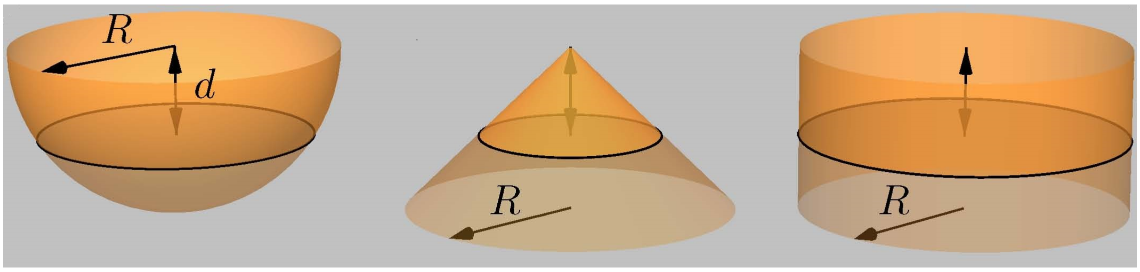
47. Bijecció entre $[0,1]$ i $(0,1)$



$$f : [0,1] \longrightarrow (0,1)$$

$$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots < 1, \;\; \lim_{n\to\infty} x_n = 1$$
$$f(1) = x_1, f(0) = x_2, f(x_n) = x_{n+2}, n \geq 2$$
$$f(x) = x \quad \text{si} \quad x \notin \{0, 1, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$$

48. Volum d'una esfera



$$\pi\left(R^2 - d^2\right) + \pi d^2 = \pi R^2$$

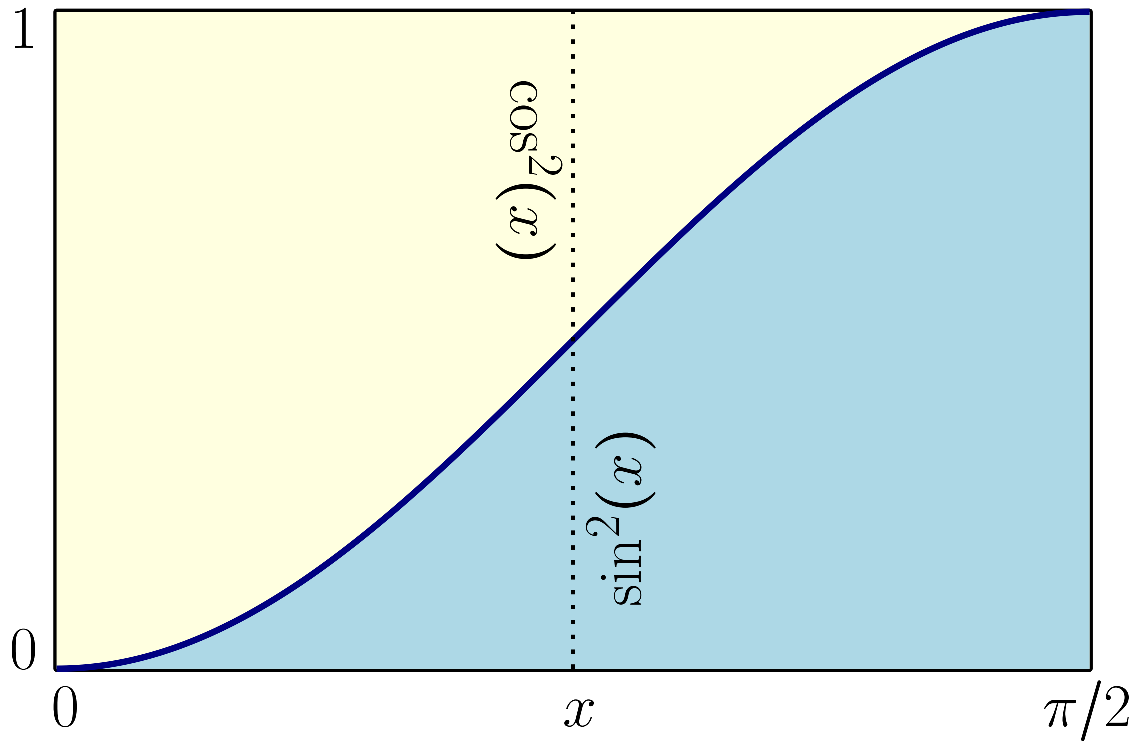
$$\Downarrow$$

$$\frac{V}{2} + \frac{\pi R^2 \cdot R}{3} = \pi R^2 \cdot R$$

$$\Downarrow$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

49. Dues integrals trigonomètriques

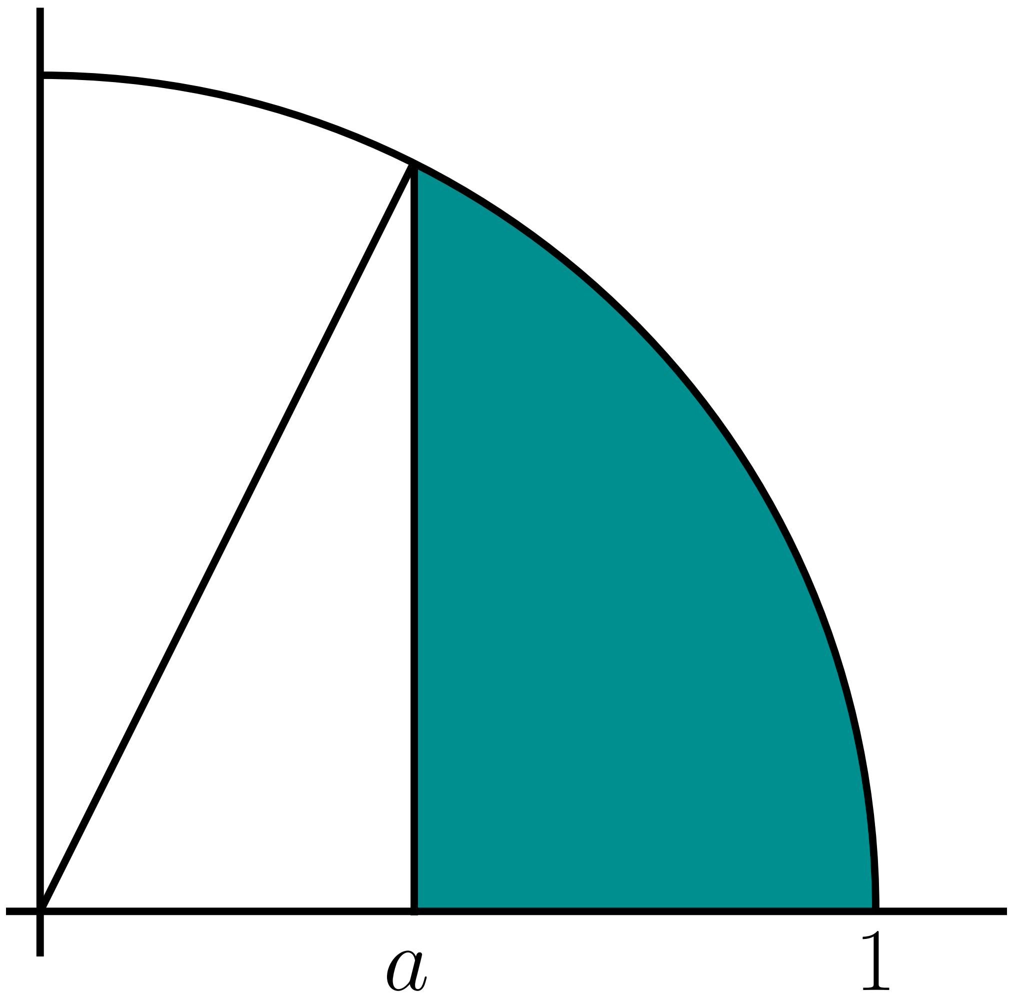


$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

$$(\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)) \qquad \Downarrow$$

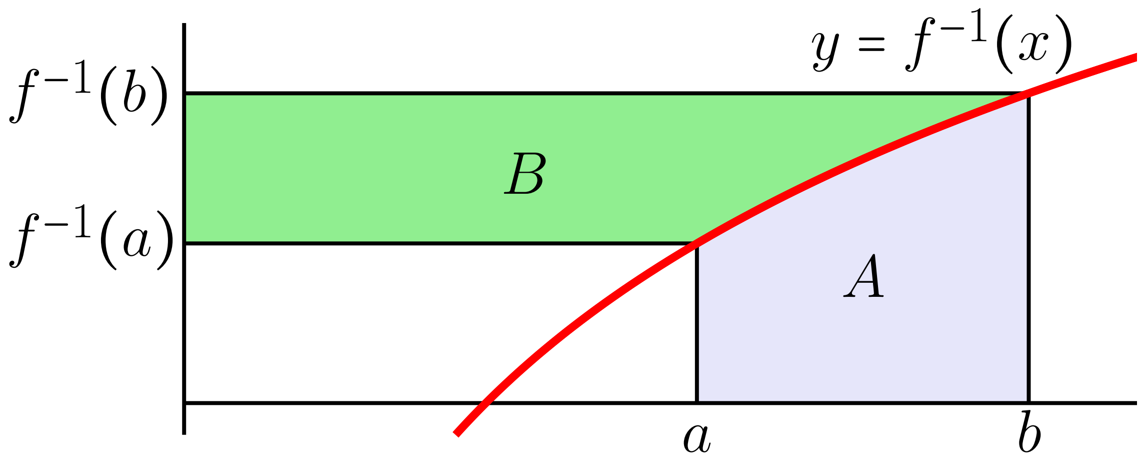
$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

50. Una integral definida



$$\int_a^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\arccos(a)}{2} - \frac{a\sqrt{1-a^2}}{2}$$

51. Primitiva de la funció inversa



$$A = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - B$$

$$\int_a^b f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = xf^{-1}(x)\Big|_a^b - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(y)\,\mathrm{d}y$$
$$= \Big(xf^{-1}(x) - F\big(f^{-1}(x)\big)\Big)\Big|_a^b$$

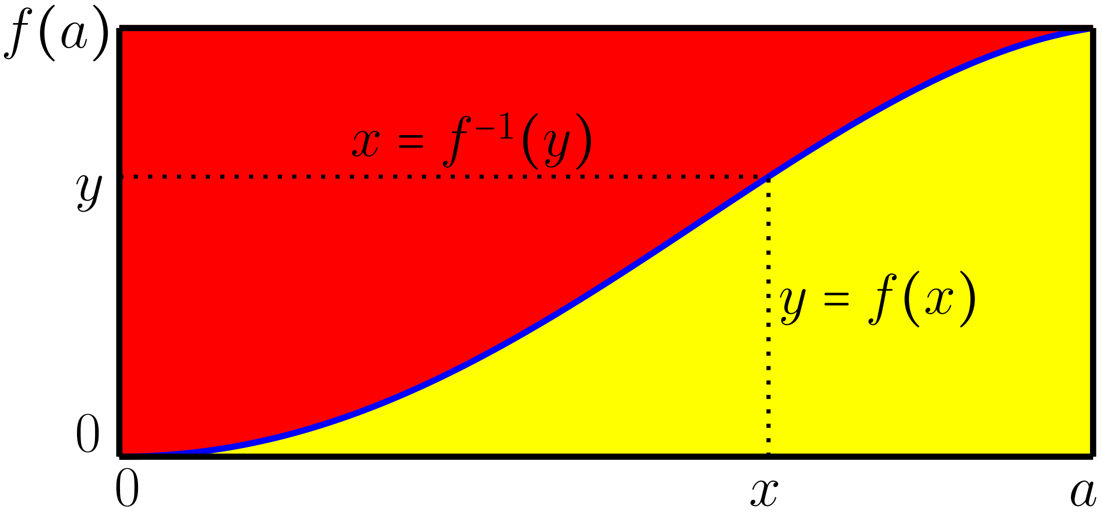
on $F'(x) = f(x)$

Aplicacions

$$\int_a^b \ln(x)\,\mathrm{d}x = (x\ln(x) - \mathrm{e}^{\ln(x)})\Big|_a^b = (x\ln(x) - x)\Big|_a^b$$

$$\int_a^b \arctan(x)\,\mathrm{d}x = \Big(x\arctan(x) - \ln(|\cos(\arctan(x))|)\Big)\Big|_a^b$$
$$= \Big(x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big)\Big|_a^b$$

52. Relacions entre integrals



$$a > 0,\ f(0) = 0\ \ \&\ \ f \text{ continua i creixent}$$

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(a)} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = a f(a)$$

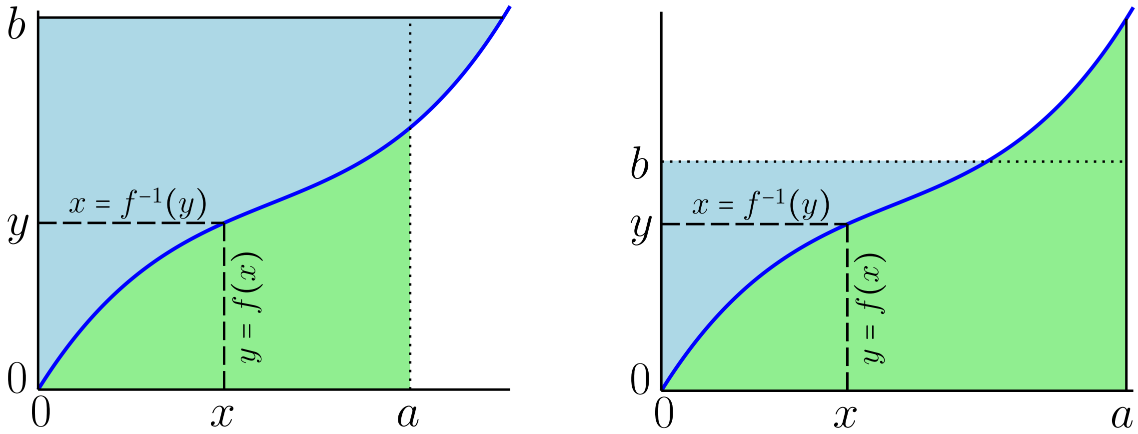
$$\Downarrow$$

$$\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^{1/\alpha}\,\mathrm{d}x = 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \arcsin(x)\,\mathrm{d}x = \pi/2$$

$$\int_0^1 \left(\mathrm{e}^x - 1\right)\mathrm{d}x + \int_0^{\mathrm{e}-1} \log(1+x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}-1$$

53. Desigualtat de Young



$b \geq f(a)$ $\qquad$ $b \leq f(a)$

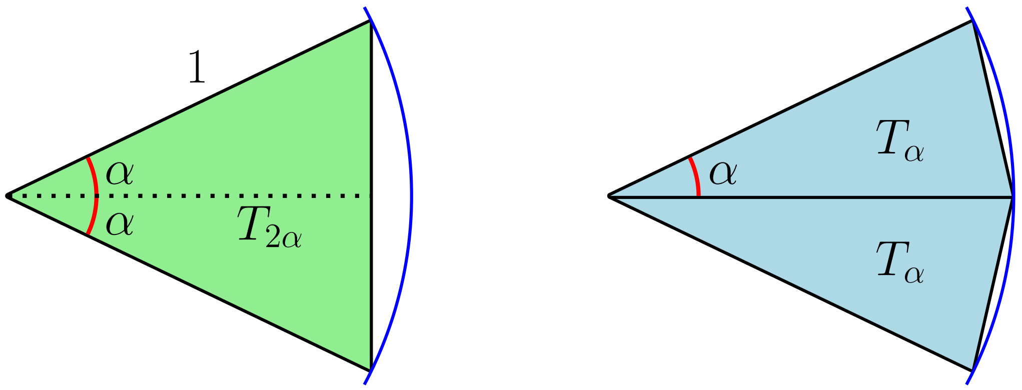
$$a, b > 0,\ f(0) = 0\ \ \&\ \ f \text{ continua i creixent}$$

$$\Downarrow$$

$$ab \leq \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$ab = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow b = f(a)$$

54. Fórmula de Viète



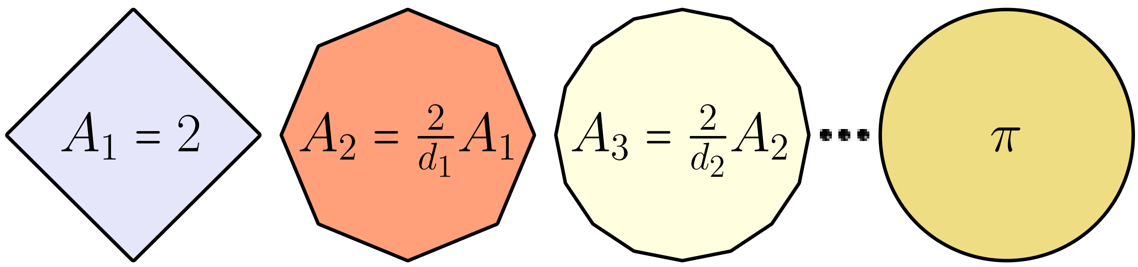
$$T_{2\alpha} = \sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(2\alpha)/2, \quad 0 < \alpha < \pi/2$$

A_n = àrea del polígon inscrit de 2^{n+1} costats, $A_1 = 2$

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{T_{2\alpha}}{2T_\alpha} = \frac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \cos(\alpha), \quad \alpha = \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$\begin{cases} d_n = 2\cos\left(\pi/2^{n+1}\right) \\ 2\cos(x/2) = \sqrt{2 + 2\cos(x)} \end{cases} \Longrightarrow d_{n+1} = \sqrt{2 + d_n}$$

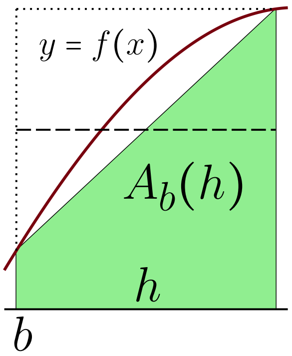
$$d_1 = \sqrt{2},\ d_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}},\ d_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \ldots$$

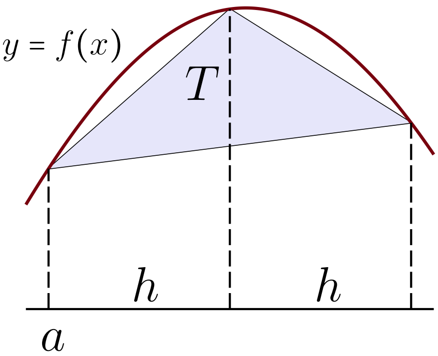


$$A_{n+1} = \frac{2}{d_n}A_n \Longrightarrow A_n = A_1 \prod_{j=1}^{n-1} \frac{2}{d_j} \Longrightarrow 2\prod_{j=1}^{\infty} \frac{2}{d_j} = \pi$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \cdots$$

55. Àrea del segment parabòlic segons Arquimedes

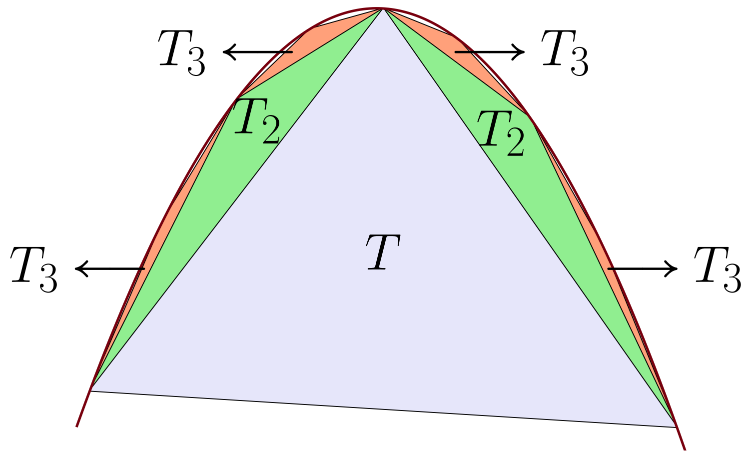




$$A_b(h) = \frac{f(b) + f(b+h)}{2} h$$

$$\begin{aligned} T = T_a(h) &= A_a(h) + A_{a+h}(h) - A_a(2h) \\ &= \frac{2f(a+h) - f(a) - f(a+2h)}{2} h \end{aligned}$$

$$f(x) = -px^2 + qx + r \implies T_a(h) = ph^3$$



$$T = ph^3,\ T_2 = p(h/2)^3 = T/8,\ T_3 = T/8^2,\ T_4 = T/8^3, \ldots$$

$$P = T + 2\frac{T}{8} + 2^2\frac{T}{8^2} + 2^3\frac{T}{8^3} + \cdots = T\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) = \frac{4}{3}T$$

Agraïments. L'autor vol agrair Gregori Guasp la seva ajuda en la preparació d'algunes de les il·lustracions que conté aquest treball. L'autor està recolzat pels projectes PID2019-104658GB-I00, el programa Severo Ochoa y María de Maeztu per centres i unitats d'excelencia en R&D (CEX2020-001084-M) i per la Generalitat de Catalunya, projecte 2017SGR1617.

Referències

[1] C. Alsina, R. B. Nelsen, Charming Proofs: A Journey into Elegant Mathematics, Dolciani Mathematical Expositions 42, AMS/MAA Press, 2010.

[2] J. R. Brown, Proof and Pictures, British Journal for the Philosophy of Science 48 (1997), 161–180.

[3] B. Casselman, Images et preuves, Gaz. Math., Soc. Math. Fr. 88 (2001), 35–52.

[4] B. Casselman, Pictures and proofs, Notices Am. Math. Soc. 47 (2000), 1257–1266.

[5] J.-P. Delahaye, Les preuves sans mots, Pour la Science 244 (1998), 100–105.

[6] J.-P. Delahaye, Preuves sans mots, Acromαth 3 (2008), 14–17.

[7] T. Doyle, L. Kutler, R. Miller i A. Schueller, Proofs Without Words and Beyond. Convergence (August 2014), Mathematical Association of America.

[8] P. Lafourcade. Plana web: Preuves sans mots.

[9] P. Levrie, Proof by Rotation, The Mathematical Intelligencer 37 (2015), 4–5.

[10] R. L. Miller. On Proofs Without Words. Preprint del Whitman College, 2012.

[11] R. B. Nelsen, Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking, Mathematical Association of America, 1997.

[12] R. B. Nelsen, Proofs without Words II: More Exercises in Visual Thinking, Mathematical Association of America, 2000.

[13] R. B. Nelsen, Proofs without Words III: Further Exercises in Visual Thinking, Mathematical Association of America, 2016.

[14] R. C. S. Ortega i M. Sano, Provas sem palavras: uma ponte entre a intuição e a linguagem matemática, Professor de matemática online 8 (2020), 440–461.

[15] A. Plaza, Identidades de tipo Machin con π y dos arcotangentes. Gac. R. Soc. Mat. Esp. 21 (2018), 608.

[16] P. E. Ross, Math without Words, Scientific American 292 (juny 2005), 28–30.

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Cerdanyola del Vallès (Barcelona), Spain

Centre de Recerca Matemàtica, Edifici Cc, Campus de Bellaterra, 08193 Cerdanyola del Vallès (Barcelona), Spain.

E-mail address: `gasull@mat.uab.cat`