Linealización en sistemas dinámicos holomorfos

Una de las herramientas usuales para estudiar un sistemas dinámico (SD) cerca de un equilibrio es ver si éste se puede transformar, mediante un cambio de variables local, en un nuevo SD lineal. Demostraremos dos resultados de linealización, uno para SD continuos y otro para SD discretos, ambos holomorfos y en dimensión 1.

El resultado (i) es una versión 1-dimensional del teorema de linealización de Hartman-Grobman con una prueba especialmente simple. Además esta prueba es fácilmente adaptable al caso 1-dimensional real, para funciones de clase $\mathcal{C}^2$. El apartado (ii) corresponde al Teorema de Koenigs (1884) y la prueba incluida es la del clásico libro de L. Carleson y T. W. Gamelin, “Complex dynamics”. Sin pérdida de generalidad, supondremos que el equilibrio está en el origen.

Teorema. *Sea $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ holomorfa en 0, tal que $f(0)=0$ y sea $\lambda=f'(0)$.*

(i) Si $\lambda\neq 0$, existe un biholomorfismo local φ, tal que $\varphi(0)=0$, de manera que tomando $w=\varphi(z)$ la ecuación diferencial $z'=f(z)$ se transforma en $w'=\lambda w$.

(ii) Si $|\lambda|\notin\{0,1\}$, existe un biholomorfismo local ψ, tal que $\psi(0)=0$, de manera que tomando $w=\psi(z)$ el SD discreto $z_{n+1}=f(z_n)$ se transforma en $w_{n+1}=\lambda w_n$.

Demostración. (i) En un entorno de $z=0$, escribimos $f(z)=z/g(z)$, con g holomorfa y tal que $g(0)=1/\lambda\neq 0$. Definimos el biholomorfismo local

$$w=\varphi(z)=z\exp\left(\int_0^z\frac{g(s)-g(0)}{g(0)s}\,\mathrm{d}s\right)=z+O(z^2).$$

Entonces $w'=\left(\dfrac{w}{z}+z\dfrac{w}{z}\dfrac{(g(z)-g(0))}{g(0)z}\right)z'=w\dfrac{g(z)}{g(0)z}\dfrac{z}{g(z)}=\dfrac{w}{g(0)}=\lambda w.$

(ii) Supongamos que $0<|\lambda|<1$. El caso $|\lambda|>1$ se estudia de manera similar considerando f^{-1} en lugar de f. Definiendo $\psi_n(z)=\lambda^{-n}f^n(z)=z+O(z^2)$, donde $f^k=f^{k-1}\circ f$, se cumple que $\psi_n(f(z))=\lambda^{-n}f^{n+1}(z)=\lambda\psi_{n+1}(z)$. Si demostramos que ψ_n converge uniformemente sobre compactos hacia ψ, entonces usando resultados de Weierstrass, se sabe ψ es holomorfa. Además $\psi(z)=z+O(z^2)$ y por tanto es un biholomorfismo. Así, $\psi(f(z))=\lambda\psi(z)$. Como consecuencia, tomando $w_k=\psi(z_k)$, $k\in\mathbb{N}$, se llega al resultado deseado: $w_{n+1}=\psi(z_{n+1})=\psi(f(z_n))=\lambda\psi(z_n)=\lambda w_n$.

Para demostrar esa convergencia uniforme, en primer lugar observamos que existen $\delta>0$ y $C>0$, tales que para $|z|\leq\delta$, $|f(z)-\lambda z|\leq C|z|^2$. Entonces, $|f(z)|\leq|\lambda||z|+C|z|^2\leq(|\lambda|+C\delta)|z|$ y usando inducción, $|f^n(z)|\leq(|\lambda|+C\delta)^n|z|$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Así, si escogemos $\delta>0$ tal que $\rho=(|\lambda|+C\delta)^2/|\lambda|<1$, obtenemos

$$|\psi_{n+1}(z)-\psi_n(z)|=\left|\frac{f(f^n(z))-\lambda f^n(z)}{\lambda^{n+1}}\right|\leq\frac{C|f^n(z)|^2}{|\lambda|^{n+1}}\leq\frac{\rho^nC|z|^2}{|\lambda|},$$

para $|z|<\delta$, hecho que implica la convergencia deseada. $\square$

Armengol Gasull, Dep. de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona y CRM.
Correo electrónico: `gasull@mat.uab.cat`