

Càlcul d'integrals usant sistemes dinàmics discrets

ARMENGOL GASULL I MIREIA LLORENS

Resum: Si per a una família d'integrals definides, dependent de paràmetres, el valor de la integral no varia quan es canvien d'una certa manera els valors dels paràmetres es diu que aquest canvi de paràmetres és una transformació de Landen. Equivalentment, en el llenguatge dels sistemes dinàmics, la integral definida és una integral primera del sistema dinàmic associat a la transformació de Landen. Aquestes transformacions existeixen, per exemple, per a determinades famílies d'integrals el·líptiques o per a famílies d'integrals racionals. En aquest treball presentarem diversos exemples de transformacions de Landen i les aplicarem al càlcul d'integrals definides. També recordarem l'algoritme de Brent-Salamin per a calcular π , ja que està basat en aquest tipus de transformacions. Com veurem, la dinàmica global d'algunes transformacions de Landen encara està lluny de ser totalment entesa.

Paraules clau: integral definida, transformació de Landen, integral el·líptica, sistema dinàmic discret, algoritme de Brent-Salamin.

Classificació MSC2010: 26B99, 33C75, 37E99.

Des del segle XVII, en què Leibniz i Newton van introduir el càlcul diferencial i integral, aquesta eina ha estat una de les bases de la ciència i la tecnologia. Ara bé, així com el càlcul de derivades és una tasca rutinària, el càlcul d'integrals, ja siguin definides o indefinides, és un «art». Tots recordem els enginyosos canvis de variable per a calcular certes primitives, o el plaer que proporciona el fet que el mètode d'integració per parts quadri després d'aplicar-lo unes quantes vegades. A part d'aquestes tècniques ben establertes, i que serveixen tant per a calcular primitives com per a calcular integrals definides, n'hi ha d'altres que serveixen només per a resoldre aquesta segona qüestió.

Sense ànim de ser exhaustius, en aquest segon bloc podem considerar el mètode de derivació d'integrals respecte de paràmetres, que canvia el problema pel de resoldre determinades equacions diferencials, o l'ús del teorema de Cauchy per a funcions meromorfe, que redueixen el càlcul a una suma de residus, vegeu [10]. L'exemple paradigmàtic d'integral definida avaluable per a