

Càlcul d'integrals usant sistemes dinàmics discrets

ARMENGOL GASULL I MIREIA LLORENS

Resum: Si per a una família d'integrals definides, dependent de paràmetres, el valor de la integral no varia quan es canvien d'una certa manera els valors dels paràmetres es diu que aquest canvi de paràmetres és una transformació de Landen. Equivalentment, en el llenguatge dels sistemes dinàmics, la integral definida és una integral primera del sistema dinàmic associat a la transformació de Landen. Aquestes transformacions existeixen, per exemple, per a determinades famílies d'integrals el·líptiques o per a famílies d'integrals racionals. En aquest treball presentarem diversos exemples de transformacions de Landen i les aplicarem al càlcul d'integrals definides. També recordarem l'algoritme de Brent-Salamin per a calcular π , ja que està basat en aquest tipus de transformacions. Com veurem, la dinàmica global d'algunes transformacions de Landen encara està lluny de ser totalment entesa.

Paraules clau: integral definida, transformació de Landen, integral el·líptica, sistema dinàmic discret, algoritme de Brent-Salamin.

Classificació MSC2010: 26B99, 33C75, 37E99.

Des del segle XVII, en què Leibniz i Newton van introduir el càlcul diferencial i integral, aquesta eina ha estat una de les bases de la ciència i la tecnologia. Ara bé, així com el càlcul de derivades és una tasca rutinària, el càlcul d'integrals, ja siguin definides o indefinides, és un «art». Tots recordem els enginyosos canvis de variable per a calcular certes primitives, o el plaer que proporciona el fet que el mètode d'integració per parts quadri després d'aplicar-lo unes quantes vegades. A part d'aquestes tècniques ben establertes, i que serveixen tant per a calcular primitives com per a calcular integrals definides, n'hi ha d'altres que serveixen només per a resoldre aquesta segona qüestió.

Sense ànim de ser exhaustius, en aquest segon bloc podem considerar el mètode de derivació d'integrals respecte de paràmetres, que canvia el problema pel de resoldre determinades equacions diferencials, o l'ús del teorema de Cauchy per a funcions meromorfs, que redueixen el càlcul a una suma de residus, vegeu [10]. L'exemple paradigmàtic d'integral definida avaluable per a

la qual el càlcul de primitives no funciona¹ és la relacionada amb l'àrea sota la campana de Gauss

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Podeu consultar [12] per a diverses demostracions, totes maquiússimes, d'aquest fet.

L'objectiu d'aquest treball és donar a conèixer un mètode no tan popular que serveix per al mateix objectiu. Concretament, mostrarem diferents exemples d'aplicació de les anomenades *transformacions de Landen* al càlcul d'algunes integrals definides. Com veurem, aquestes transformacions associen a una certa família d'integrals que depenen de paràmetres un sistema dinàmic discret (SDD), de manera que les integrals buscades són *integrals primeres o invariants* de l'SDD. Usant aquesta propietat, sovint les integrals es poden calcular o aproximar estudiant els comportaments límit de l'SDD.

En lloc de donar totes les definicions en general, preferim fer-ho en l'exemple paradigmàtic del mètode, que, com veurem, és el que li ha donat nom.

Considerem, per $a > 0$, $b > 0$, la integral el·líptica

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}}. \quad (1)$$

Com veurem a la secció 1, es compleix que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2 \theta + ab \sin^2 \theta}}. \quad (2)$$

En altres paraules, si considerem l'aplicació

$$F(a, b) = \left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab} \right), \quad (3)$$

aleshores tenim que $I(a, b) = I(F(a, b))$. Aquesta és precisament la definició que I és una *integral primera*, o un *invariant*, de l'SDD generat per l'aplicació F .² Això ens diu que tots els punts d'una òrbita de F , $\mathcal{O}_{(a_0, b_0)} := \{F^n(a_0, b_0) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ són dins de la mateixa corba de nivell de I , $I(a, b) = I(a_0, b_0)$, i també hi són els seus punts d'acumulació. Aquests punts formen el que s'anomena conjunt ω -límit de l'òrbita. Aquí $F^n = (F_1^n, F_2^n)$ denota la composició de $F = (F_1, F_2)$ amb si mateixa n cops, on $F^0 = \text{Id}$.

Gauss va provar l'any 1799 la igualtat (2), però un resultat més general que aquest ja havia estat demostrat per Landen, l'any 1775, vegeu [2, 13, 16, 19]. John Landen (1719-1790) va ser un matemàtic anglès aficionat que va treballar

¹ La teoria diferencial de Galois demostra que cap primitiva de la funció e^{-x^2} és expressable amb un nombre finit d'operacions bàsiques amb funcions elementals.

² Si la F no és invertible, hauríem de parlar més pròpiament de semisistemes dinàmics discrets, però, com es fa sovint, ometrem el prefix *semi*.

com a topògraf i com a agent immobiliari; vegeu més detalls de la seva obra a [2, 28].

De fet, les relacions entre funcions el·líptiques trobades per Landen són conegudes com a *transformacions de Landen*. Sense entrar en cap formalisme i parlant en general, avui en dia una transformació de Landen és una relació entre dues integrals definides de funcions del «mateix tipus» i que depenen de paràmetres. En les integrals, tant els paràmetres, com els límits d'integració, no han de ser necessàriament els mateixos, però aquests valors satisfan relacions funcionals entre ells (vegeu de nou [2, 28] per a més detalls). En el cas estudiat per Gauss, els límits d'integració són els mateixos, els paràmetres venen relacionats via F , les integrals són clarament del mateix tipus i la relació entre elles és que són exactament iguals. En aquest treball veurem diversos exemples de transformacions de Landen.

Vegem com es pot usar (2) per a calcular (aproximar) $I(a, b)$. Com veurem, no és difícil demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a, b) = (\text{MAG}(a, b), \text{MAG}(a, b)),$$

on $\text{MAG}(a, b)$ és un número entre a i b . De fet, aquest número s'anomena *mitjana aritmeticogeomètrica de a i b* . Sovint també es denota aquest valor com $\text{AGM}(a, b)$ degut al seu nom en anglès. A continuació provem que

$$I(a, b) = \frac{1}{\text{MAG}(a, b)} \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

En efecte, com que $I(a, b)$ és invariant, en aplicar F , obtenim per a tot $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(F_1^n(a, b))^2 \cos^2 \theta + (F_2^n(a, b))^2 \sin^2 \theta}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(F_1^n(a, b))^2 \cos^2 \theta + (F_2^n(a, b))^2 \sin^2 \theta}} = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\text{MAG}^2(a, b) \cos^2 \theta + \text{MAG}^2(a, b) \sin^2 \theta}} = \\ &= \frac{1}{\text{MAG}(a, b)} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} = \frac{1}{\text{MAG}(a, b)} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Per tant, el càlcul de $I(a, b)$ es pot fer a partir del càlcul de $\text{MAG}(a, b)$. Tot i que la fórmula explícita per a aquesta mitjana és la integral, que és el que volíem calcular, el resultat obtingut proporciona un procés iteratiu fàcilment programable, que consisteix a calcular la successió $F^n(a, b)$, que permet aproximar quadràticament $I(a, b)$. Recordem que es diu que la convergència és quadràtica, si l'error absolut de l'iterat $n + 1$ és, aproximadament, una constant

multiplicada pel quadrat de l'error absolut de l'iterat n . De fet, és amb el procés descrit com es calculen els valors aproximats de les integrals el·líptiques. És més, la mitjana aritmeticogeomètrica pot ser usada per a calcular amb precisió els valors de moltes funcions elementals com ara $\log(x)$, e^x , $\dots$, vegeu [5, 7].

Com veurem més endavant, per a d'altres integrals definides les transformacions de Landen associades sí que permeten calcular exactament els seus valors.

Seguint [5, 13] i com a aplicació del resultat anterior, es pot relacionar la longitud $\mathcal{L}$ de la lemniscata que en coordenades polars s'escriu com $r^2 = \cos(2\theta)$, amb la integral definida

$$\varpi = 2 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}},$$

i amb una mitjana aritmeticogeomètrica. De fet, aquesta integral ja apareix l'any 1691 en documents de Jacob Bernoulli i era força coneguda al segle XVIII. Va ser Gauss qui la va denotar per ϖ . Com veurem a la subsecció 1.2, fent dos canvis de variable diferents per a calcular $\mathcal{L}$ arribem a $\mathcal{L} = 2\varpi = 4I(\sqrt{2}, 1)$. Com que ja hem vist que $2I(\sqrt{2}, 1) = \pi / \text{MAG}(\sqrt{2}, 1)$, obtenim que

$$\text{MAG}(\sqrt{2}, 1) = \frac{\pi}{\varpi}.$$

Gauss va conjecturar aquesta relació abans de provar-la, basant-se en càlculs numèrics, tal com va afirmar en la nota 98 (30 de maig de 1799) en el seu diari [17], on va escriure:

He demostrat fins a l'onzena xifra decimal, que el límit de la mitjana aritmeticogeomètrica entre els números $\sqrt{2}$ i 1 és igual a π/ϖ ; aquesta demostració obrirà segurament una àrea totalment nova en l'anàlisi.

Com no podia ser d'altra manera, Gauss la va encertar. Es referia a la teoria de les funcions el·líptiques.

Com a segona aplicació distingida d'aquesta transformació de Landen, deduirem a la subsecció 1.4 l'algoritme de Brent-Salamin (vegeu [3, 5, 14]), que serveix per a calcular π . Aquest algoritme es basa en la construcció d'una successió $\{z_n\}_n$ que convergeix quadràticament cap a π , definida com a

$$z_n = \frac{(a_n + b_n)^2}{1 - \sum_{j=1}^n 2^{j+1}(a_j^2 - b_j^2)},$$

on a_j i b_j venen definits per la transformació (3), és a dir, $(a_{j+1}, b_{j+1}) = F(a_j, b_j) = ((a_j + b_j)/2, \sqrt{a_j b_j})$, amb $a_0 = 1$ i $b_0 = 1/\sqrt{2}$. Vegem els primers iterats de l'algoritme

n	a_n	b_n
0	1	0.707 106 781 186 547 524 400...
1	0.853 553 390 593 273 762 20...	0.840 896 415 253 714 543 03...
2	0.847 224 902 923 494 152 61...	0.847 201 266 746 891 460 40...
3	0.847 213 084 835 192 806 50...	0.847 213 084 752 765 366 70...
4	0.847 213 084 793 979 086 60...	0.847 213 084 793 979 086 60...

i també,

n	z_n	$ z_n - \pi $
1	3.140 579 250 522 168 248 311 331 268 975 823 311 773 440 237 5122...	2×10^{-3}
2	3.141 592 646 213 542 282 149 344 431 982 695 774 314 437 223 3448...	8×10^{-9}
3	3.141 592 653 589 793 238 279 512 774 801 863 974 381 225 504 8349...	2×10^{-19}
4	3.141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 114 678 2804...	6×10^{-41}

En aquesta darrera taula es pot apreciar clarament la convergència quadràtica del mètode.

Per acabar aquesta primera part centrada en integrals el·líptiques, considerarem altres integrals que donen lloc a funcions especials i dedicarem la subsecció 2.2 a les relacions entre altres SDD del pla donats per aplicacions de Landen similars a F i les seves respectives integrals primeres. En particular veurem com es pot calcular la mitjana harmonicogeomètrica.

Canviant una mica el tipus de funcions que volem integrar, a la secció 3, seguint [4, 11, 21, 24], estudiarem diverses transformacions de Landen que ens permetran calcular certes integrals definides impròpies donades per quocients de polinomis. Com a exemple senzill, i que també pot ser calculat sense gaire dificultat usant els mètodes tradicionals, en aquesta introducció donem en primer lloc el resultat que permet calcular per aquest procediment la integral

$$I(a, b, c) = \int_0^\infty \frac{bx^2 + c}{x^4 + ax^2 + 1} dx, \quad a > -2.$$

Considerem

$$F(a, b, c) = \left(2, \frac{b+c}{\sqrt{a+2}}, \frac{b+c}{\sqrt{a+2}}\right).$$

A la subsecció 3.1 provem que

$$I(a, b, c) = I(F(a, b, c)). \quad (5)$$

Per tant,

$$\begin{aligned} I(a, b, c) &= I(F(a, b, c)) = \frac{b+c}{\sqrt{a+2}} \int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+2x^2+1} dx = \\ &= \frac{b+c}{\sqrt{a+2}} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \frac{(b+c)\pi}{2\sqrt{a+2}}. \end{aligned}$$

Observem que en aquest cas no ha calgut anar al límit per a fer el càlcul, ja que tots els punts (a, b, c) són pre-fixos (la seva imatge és un punt fix) per l'SDD generat per F . Un altre exemple racional senzill s'estudia a [23].

Quan considerem la integral més complicada

$$I(a, b, c, d, e) = \int_0^\infty \frac{cx^4 + dx^2 + e}{x^6 + ax^4 + bx^2 + 1} dx,$$

també es pot construir una transformació de Landen associada; vegeu la subsecció 3.2. Si prenem l'aplicació amb estructura triangular, $F(a, b, c, d, e) = (G(a, b), H(a, b, c, d, e))$, on

$$G(a, b) = \left(\frac{5a + 5b + ab + 9}{\sqrt[3]{(a+b+2)^4}}, \frac{a+b+6}{\sqrt[3]{(a+b+2)^2}} \right), \quad (6)$$

$$H(a, b, c, d, e) = \left(\frac{c+d+e}{\sqrt[3]{(a+b+2)^2}}, \frac{(b+3)c + (a+3)e + 2d}{a+b+2}, \frac{c+e}{\sqrt[3]{a+b+2}} \right), \quad (7)$$

aleshores $I(a, b, c, d, e) = I(F(a, b, c, d, e))$.

Com es demostra a [11, 20] per als valors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tals que $I(a, b, c, d, e)$ és finita, es compleix que $\lim_{n \rightarrow \infty} G^n(a, b) = (3, 3)$. Per acabar aquest treball, a la secció 4 mostrarem la complexitat de la transformació G quan se la considera definida a tot el pla real. Aquest fet és conegut i ja es descriu a [20] i al llibre [22, capítol 15].

1 Transformacions de Landen per a integrals el·líptiques

1.1 Dues proves de la igualtat de Gauss

Començarem aquesta secció amb dues demostracions de la igualtat (2). La primera és la que va fer Gauss i la segona, deguda a Newman, és la més curta coneguda.

PROVA DE GAUSS. L'any 1816, Gauss va provar la igualtat que ens ocupa usant únicament el canvi de variables següent (vegeu també [27])

$$\sin \theta = \frac{2a \sin \varphi}{a + b + (a - b) \sin^2 \varphi},$$

on $\theta \in (0, \pi/2)$, per tant, $0 < \sin \theta < 1$ i, també, $\varphi \in (0, \pi/2)$. Notem que aquest és un bon canvi, ja que la funció $f(x) = \frac{2ax}{(a+b)+(a-b)x^2}$ és creixent a $[0, 1]$,

$f(0) = 0$ i $f(1) = 1$. Amb aquest canvi obtenim

$$\cos \theta \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{2a(a+b-(a-b)\sin^2 \varphi) \cos \varphi}{(a+b+(a-b)\sin^2 \varphi)^2}.$$

Per altra banda,

$$\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} = \frac{a(a+b-(a-b)\sin^2 \varphi)}{a+b+(a-b)\sin^2 \varphi}.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \int_0^{\pi/2} \frac{a+b+(a-b)\sin^2 \varphi}{a(a+b-(a-b)\sin^2 \varphi)} \cdot \frac{2a(a+b-(a-b)\sin^2 \varphi) \cos \varphi}{(a+b+(a-b)\sin^2 \varphi)^2 \cos \theta} d\varphi = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(a+b+(a-b)\sin^2 \varphi) \cos \theta}. \end{aligned}$$

Observem també que

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{(a+b+(a-b)\sin^2 \varphi)^2 - 4a^2 \sin^2 \varphi}}{a+b+(a-b)\sin^2 \varphi}.$$

Així doncs,

$$\begin{aligned} I(a,b) &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{(a+b+(a-b)\sin^2 \varphi)^2 - 4a^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi ((b-a)^2 \cos^2 \varphi + 4ab)}} = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{(b-a)^2 \cos^2 \varphi + 4ab}}. \end{aligned}$$

Ara bé, usant que $(b-a)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ tenim que

$$(b-a)^2 \cos^2 \varphi + 4ab = 4 \left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \cos^2 \varphi + (\sqrt{ab})^2 \sin^2 \varphi \right),$$

i substituint aquesta igualtat al denominador de l'expressió anterior obtenim

$$I(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \cos^2 \varphi + (\sqrt{ab})^2 \sin^2 \varphi \right)}} = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right). \quad \square$$

PROVA DE NEWMAN ([26]). Usant el canvi de variables $u = \tan(\theta)$ obtenim

$$I(a, b) = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2 + u^2)(b^2 + u^2)}}.$$

A continuació, apliquem el segon canvi de variables, $v = \frac{u}{2} - \frac{ab}{2u}$. És fàcil comprovar que és bijectiu i que transforma la integral anterior en

$$I(a, b) = \int_0^\infty \frac{dv}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + v^2\right)(ab + v^2)}}.$$

Finalment fem el tercer canvi $v = \sqrt{ab} \tan \theta$, amb el qual arribem de nou a

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2 \theta + ab \sin^2 \theta}} = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right). \quad \square$$

La prova de Newman ens mostra que l'ús dels canvis de variable és tot un art.

1.2 La longitud de la lemniscata

En aquesta secció demostrarem, seguint [13] i aplicant la igualtat (2), que si $\mathcal{L}$ és la longitud de la lemniscata, amb equació polar $r^2 = \cos(2\theta)$ i equació cartesiana $(x^2 + y^2)^2 + y^2 - x^2 = 0$, es compleix que

$$\mathcal{L} = 2\varpi = 4I(\sqrt{2}, 1) = \frac{2\pi}{\text{MAG}(\sqrt{2}, 1)}. \quad (8)$$

PROVA DE (8). És ben conegut que la longitud d'una corba $\rho = R(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, en coordenades polars ve donada per

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{R^2(\theta) + (R'(\theta))^2} d\theta.$$

En el nostre cas, degut a la doble simetria de la lemniscata, tenim

$$\mathcal{L} = 4 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos(2\theta) + \frac{\sin^2(2\theta)}{\cos(2\theta)}} d\theta = 4 \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}}.$$

Amb el canvi de variable $\cos(2\theta) = \cos^2 \phi$, la integral anterior es transforma en

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \phi}{\sin(2\theta)} d\phi = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \phi d\phi}{\sqrt{1 - \cos^4 \phi}} = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 + \cos^2 \phi}} = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{2 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi}} = 4I(\sqrt{2}, 1) = \frac{2\pi}{\text{MAG}(\sqrt{2}, 1)}. \end{aligned}$$

Observem que en el darrer pas s'ha fet servir la igualtat (4).

Per a provar la darrera igualtat de (8) que ens falta aplicarem el canvi de variable $z = \cos \phi$ en la penúltima expressió integral de $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{L} = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 + \cos^2 \phi}} = 4 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2} \sqrt{1 - z^2}} = 4 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}},$$

tal com volíem veure. $\square$

1.3 Mitjana aritmeticogeomètrica i un exemple de càlcul

Com ja hem comentat, la mitjana aritmeticogeomètrica de $a > 0$ i $b > 0$, $\text{MAG}(a, b)$, és el límit comú de les successions $\{a_n\}_n$ i $\{b_n\}_n$ determinades per l'algoritme següent

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$

prenent $a_0 = a$ i $b_0 = b$. Sembla ser que aquest algoritme va aparèixer primer en un document de Lagrange (1784–1785), però va ser Gauss qui el va estudiar amb més profunditat. De fet, Gauss va redescobrir la mitjana aritmeticogeomètrica l'any 1771, quan tenia catorze anys. Després amb vint-i-dos o vint-i-tres anys (1799–1800) va escriure un llarg treball [16] en què explicava els seus descobriments, però que no va ser publicat fins bastant més tard; vegeu [2, secció 2].

Vegem, en primer lloc, que ambdós límits existeixen i són iguals, degut al fet que les dues successions són monòtones i fitades. No és restrictiu suposar que $a \geq b$, i així ho farem d'ara en endavant. La desigualtat següent entre ambdues mitjanes és de tots prou coneguda $(a + b)/2 \geq \sqrt{ab}$, i implica que $a_n \geq b_n$ per a tot $n \geq 0$. Així,

$$a_n \geq \frac{a_n + b_n}{2} = a_{n+1} \geq b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq b_n.$$

Disposem, doncs, d'una successió $\{a_n\}_n$ decreixent i fitada inferiorment per b i, d'una successió $\{b_n\}_n$ creixent i fitada superiorment per a ,

$$a = a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq b_n \geq \dots \geq b_1 \geq b_0 = b.$$

Per tant, ambdues tenen límit. Siguin $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ i $B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Prenent límits, per exemple, a $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$, tenim que $A = (A + B)/2$ i, per tant, $A = B := \text{MAG}(a, b)$, tal com volíem veure.

Estudiarem ara la velocitat de convergència de les dues successions. Per fer-ho, observem en primer lloc que

$$\begin{aligned} 0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}}{2} = \\ &= \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2} = \frac{((\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}))^2}{2(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2} = \frac{1}{2} \frac{(a_n - b_n)^2}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2}. \end{aligned}$$

Per tant, si introduïm la successió auxiliar $\ell_n = (a_n - b_n)/2$, obtenim

$$\begin{aligned} 2\ell_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{1}{2} \frac{(a_n - b_n)^2}{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{4\ell_n^2}{(a_n + b_n + 2\sqrt{a_nb_n})} = \frac{\ell_n^2}{a_{n+1} + b_{n+1}} \leq \frac{\ell_n^2}{2b}. \end{aligned}$$

Per tant, $\ell_{n+1} \leq \ell_n^2/(4b)$. Aquesta desigualtat ens diu que la longitud dels intervals $[a_n, b_n]$, que contenen el límit $\text{MAG}(a, b)$, decreix quadràticament.

Notem a continuació algunes de les propietats que compleix aquesta mitjana i que són ben fàcils de demostrar:

- $\text{MAG}(a, b) = \text{MAG}(a_1, b_1) = \text{MAG}(a_2, b_2) = \dots = \text{MAG}(a_n, b_n) = \dots$,
- $\text{MAG}(ca, cb) = c \text{MAG}(a, b)$ per a tot $c \in \mathbb{R}, c > 0$,
- $\text{MAG}(a, a) = a$ i $\text{MAG}(a, b) = \text{MAG}(b, a)$,
- si $b < a$, llavors $b < \text{MAG}(a, b) < a$.

De fet, quan un operador $\mathcal{M}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ compleix les tres últimes propietats es diu que és una «mitjana». Veurem exemples d'altres mitjanes a les subseccions 2.1 i 2.2.

Com a il·lustració de la seva convergència quadràtica i per obtenir aproximacions de la longitud de la lemniscata de la secció anterior i d'una integral el·líptica, calcularem les primeres xifres significatives de $\text{MAG}(\sqrt{2}, 1)$. Obtenim:

n	a_n	b_n
0	1.414 213 562 373 095 048 802	1
1	1.207 106 781 186 547 524 401	1.189 207 115 002 721 066 718
2	1.198 156 948 094 634 295 560	1.198 123 521 493 120 122 607
3	1.198 140 234 793 877 209 084	1.198 140 234 677 307 205 799
4	1.198 140 234 735 592 207 442	1.198 140 234 735 592 207 440
5	1.198 140 234 735 592 207 441	1.198 140 234 735 592 207 441

Per tant, $\text{MAG}(\sqrt{2}, 1) \approx 1.198\,140\,2347$. A partir d'aquest resultat tenim

$$I(\sqrt{2}, 1) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\text{MAG}(\sqrt{2}, 1)} \approx 1.311\,028\,78 \quad \text{i} \quad \mathcal{L} = \frac{2\pi}{\text{MAG}(\sqrt{2}, 1)} \approx 5.244\,1151.$$

1.4 L'algoritme de Brent-Salamin

El 1973 i de manera independent, Eugène Salamin i Richard Brent van trobar un mètode per a aproximar π amb gran velocitat (vegeu [3, 14]). La demostració de la convergència està basada en la teoria de les integrals el·líptiques. Per a entendre d'on surt aquest mètode necessitarem, doncs, uns quants resultats previs sobre aquest tema.

1.4.1 Algunes propietats de les funcions el·líptiques Començarem fent una introducció breu del tema, recordant les notacions i propietats que necessitem per a deduir l'algoritme de Brent-Salamin. Podeu trobar tota aquesta informació i molt més a [1, 5, 8, 25].

En general, s'anomena *integral el·líptica* una integral de la forma $\int R(x, \sqrt{P(x)}) dx$, on $R(x, y)$ és una funció racional en x i en y , i $P(x)$ és un polinomi de grau 3 o 4 sense arrels múltiples. En el cas particular que hi hagi límits d'integració, aleshores parlarem d'una *integral el·líptica completa*.

Tot i que primerament varen ser considerades per Fragnano, Euler, Lagrange i Landen, aquestes integrals van ser tractades sistemàticament per Legendre, el qual va demostrar que qualsevol integral el·líptica pot relacionar-se amb tres integrals fonamentals. Aquestes tres integrals s'anomenen *integrals el·líptiques canòniques de Legendre* de primera, segona i tercera espècie. Les formes normals de Legendre no són les úniques possibles, però s'han mostrat molt útils i són les utilitzades més comunament.

Nosaltres usarem només les integrals el·líptiques completes de primera i segona espècie $K(k)$ i $E(k)$, respectivament. Aquestes són

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}},$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2} dt}{\sqrt{1 - t^2}},$$

on $0 < k < 1$. Per exemple, la segona integral apareix en el càlcul de la longitud $\mathcal{L}$ d'una el·lipse amb semieixos a i b . De fet,

$$\mathcal{L} = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta = 4aE\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right)$$

i d'aquí el nom d'aquestes integrals. També apareixen en l'expressió del període d'un pèndol en funció de l'energia; vegeu aquest exemple i d'altres a [25].

Les *integrals complementàries*³ E' i K' són les integrals E i K avaluades en la variable complementària $k' = \sqrt{1 - k^2}$. De fet, k s'anomena *mòdul* i k' s'anomena *mòdul complementari*. És a dir,

$$K'(k) = K(\sqrt{1 - k^2}) = K(k') \quad \text{i} \quad E'(k) = E(\sqrt{1 - k^2}) = E(k') \quad (9)$$

i es compleix la bonica *relació de Legendre*,⁴ vegeu, per exemple, [5, p. 24],

$$E(k)K'(k) + E'(k)K(k) - K(k)K'(k) = \pi/2. \quad (10)$$

³ No s'han de confondre amb les derivades respecte a k de E i K .

⁴ Com veurem, l'aparició de π en la igualtat de Legendre és el fet clau que permetrà construir l'algoritme.

Les funcions E i K estan també molt lligades amb la integral que apareix a (2) una modificació de la qual tindrà també un paper important en el que segueix. No és difícil veure que per a $a > b > 0$,

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{a} K \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) = \frac{1}{a} K' \left(\frac{b}{a} \right), \quad (11)$$

$$J(a, b) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta = aE \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) = aE' \left(\frac{b}{a} \right). \quad (12)$$

Abans de continuar provarem dos lemes tècnics. En una primera lectura del treball, potser és aconsellable no entrar en els detalls de les seves demostracions. El primer dels lemes estén la igualtat (2) a la funció $J(a, b)$. Recordem que $(a_{n+1}, b_{n+1}) = F(a_n, b_n)$ són les successions que defineixen la MAG(a, b).

LEMA 1 ([5, p. 13]). *Les integrals $I(a, b)$ i $J(a, b)$ compleixen*

- (i) $I(a_n, b_n) = I(a_{n+1}, b_{n+1})$,
- (ii) $2J(a_{n+1}, b_{n+1}) - J(a_n, b_n) = a_n b_n I(a_n, b_n)$.

PROVA. (i) La primera part és equivalent a (2).

(ii) Considerem $k_n := c_n/b_n$ on $c_n^2 = a_n^2 - b_n^2$. Aleshores $k'_n = \sqrt{1 - k_n^2} = b_n/a_n$. Per tant, fent ús de les relacions obtingudes a (9), (11) i (12), obtenim

$$2J(a_{n+1}, b_{n+1}) = 2a_{n+1}E \left(\sqrt{1 - \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}^2}} \right) = 2a_{n+1}E \left(\frac{c_{n+1}}{a_{n+1}} \right) = 2a_{n+1}E(k_{n+1}),$$

$$J(a_n, b_n) = a_nE \left(\sqrt{1 - \frac{b_n^2}{a_n^2}} \right) = a_nE \left(\frac{c_n}{a_n} \right) = a_nE(k_n), \quad (13)$$

$$a_n b_n I(a_n, b_n) = b_n K \left(\sqrt{1 - \frac{b_n^2}{a_n^2}} \right) = b_n K \left(\frac{c_n}{a_n} \right) = b_n K(k_n). \quad (14)$$

Per tant, la igualtat que volem demostrar és equivalent a

$$2a_{n+1}E(k_{n+1}) - a_nE(k_n) = b_nK(k_n). \quad (15)$$

Usant la igualtat [5, teorema 1.2(d)]

$$E(k_n) = E \left(\frac{1 - k'_n}{1 + k'_n} \right) (1 + k'_n) - k'_n K(k_n)$$

i, tenint en compte que

$$k_{n+1} = \frac{c_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2}}{\frac{a_n + b_n}{2}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 - (\sqrt{a_n b_n})^2}}{\frac{a_n + b_n}{2}} = \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} = \frac{1 - k'_n}{1 + k'_n},$$

obtenim

$$E(k_{n+1}) = \frac{E(k_n) + k'_n K(k_n)}{1 + k'_n} = \frac{a_n E(k_n) + b_n K(k_n)}{a_n + b_n} = \frac{a_n E(k_n) + b_n K(k_n)}{2a_{n+1}},$$

que és precisament (15). $\square$

LEMA 2 ([5, p. 15]). Considerem $a_0 = 1$, $b_0 = k' \in (0, 1]$, $\{(a_n, b_n)\}_n$, la successió generada per a calcular la $\text{MAG}(1, k')$ i $c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2}$. Aleshores

$$(i) \quad K(k) = \frac{\pi}{2 \text{MAG}(1, k')},$$

$$(ii) \quad E(k) = (1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2) K(k).$$

PROVA. (i) Usant (4) i (11) tenim

$$\frac{1}{a} K\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right) = I(a, b) = \frac{1}{\text{MAG}(a, b)} \frac{\pi}{2}.$$

Prenent $b = k' = \sqrt{1 - k'^2}$ i $a = 1$ obtenim el resultat desitjat.

(ii) Si introduïm la notació $J_{n+1} = J(a_{n+1}, b_{n+1})$, $I_n = I(a_n, b_n)$, sabem pel lema 1 que

$$2J_{n+1} - J_n = a_n b_n I_n = a_n b_n I_0.$$

Com que $4a_{n+1}^2 - 2a_n^2 - 2a_n b_n = b_n^2 - a_n^2 = -c_n^2$, l'expressió anterior es pot escriure

$$4J_{n+1} - 2J_n = 2a_n b_n I_0 = (4a_{n+1}^2 - 2a_n^2 + c_n^2) I_0.$$

Si multipliquem l'expressió obtinguda per 2^{n-1} , trobem $2^{n+1} J_{n+1} - 2^n J_n = 2^{n+1} a_{n+1}^2 I_0 - 2^n a_n^2 I_0 + 2^{n-1} c_n^2 I_0$, o equivalentment,

$$2^{n+1} (J_{n+1} - a_{n+1}^2 I_0) - 2^n (J_n - a_n^2 I_0) = 2^{n-1} c_n^2 I_0.$$

Considerant ara la successió auxiliar $w_n = 2^n (J_n - a_n^2 I_0)$, l'expressió obtinguda es pot escriure com $w_{n+1} - w_n = 2^{n-1} c_n^2 I_0$, i sumant a ambdós costats,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 I_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (w_{n+1} - w_n) = -w_0 + \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n. \quad (16)$$

En aquest punt, afirmem que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$. Veiem que suposant que aquesta afirmació és certa, ja hem acabat la prova. Efectivament, ja que aleshores $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 I_0 = -w_0 = -J_0 + a_0^2 I_0 = -J_0 + I_0$ i, per tant,

$$J_0 = \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2\right) I_0,$$

d'on obtenim la igualtat que volíem provar, ja que usant (13), (14) i que $a_0 = 1$, i $k_0 = k$, sabem que $J_0 = E(k)$ i $I_0 = K(k)$.

Provarem, doncs, l'afirmació anterior. Tenim

$$\begin{aligned} w_n &= 2^n (J_n - a_n^2 I_0) = 2^n (J_n - a_n^2 I_n) = \\ &= 2^n \left(\int_0^{\pi/2} \sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta} d\theta - a_n^2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} \right) = \\ &= 2^n \int_0^{\pi/2} \frac{-c_n^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} d\theta. \end{aligned}$$

Així doncs,

$$|w_n| = 2^n \int_0^{\pi/2} \frac{c_n^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} d\theta = 2^n c_n^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} d\theta.$$

D'on obtenim

$$0 \leq |w_n| \leq 2^n c_n^2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} = 2^n c_n^2 I_n = 2^n c_n^2 I_0. \quad (17)$$

Ara bé, com que

$$4a_n c_n = 4 \left(\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \right) \left(\frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2} \right) = a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2 = c_{n-1}^2,$$

veiem finalment que per a n prou gran

$$c_n = \frac{c_{n-1}^2}{4a_n} = \frac{c_{n-1}}{2} \frac{c_{n-1}}{2a_n} \leq \frac{c_{n-1}}{2}. \quad (18)$$

Per a això és suficient demostrar, que per a n prou gran, $c_{n-1}/(2a_n) \leq 1$, o equivalentment, usant de nou que $c_{n-1} = (a_{n-1} - b_{n-1})/2$, que $a_{n-1} - b_{n-1} \leq 4a_n$. Ara bé, aquesta desigualtat és clarament certa, ja que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \text{MAG}(a_0, b_0) \neq 0$. Per tant, per (17) i (18) arribem a

$$0 \leq |w_n| \leq 2^n c_n^2 I_0 \leq \frac{c_0^2 I_0}{2^n},$$

i així $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$, tal com volíem demostrar. Observem que (18) dona una nova prova de la convergència quadràtica del càlcul de la mitjana aritmeticogeomètrica. $\square$

TEOREMA 3 (ALGORITME DE BRENT-SALAMIN ([5, p. 48])). *Considerem la successió $\{(a_n, b_n)\}_n$ definida per a calcular $\text{MAG}(a_0, b_0)$ amb $a_0 = 1$ i $b_0 = 1/\sqrt{2}$. Aleshores*

$$\pi = \frac{4 \text{MAG}^2(1, 1/\sqrt{2})}{1 - \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j+1}(a_j^2 - b_j^2)}.$$

A més, si definim la successió

$$z_n = \frac{(a_n + b_n)^2}{1 - \sum_{j=1}^n 2^{j+1}(a_j^2 - b_j^2)}$$

es compleix⁵ que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \pi$.

PROVA. Observem que quan $k = 1/\sqrt{2}$, $k' = k$. Aleshores $K'(1/\sqrt{2}) = K(1/\sqrt{2})$, $E'(1/\sqrt{2}) = E(1/\sqrt{2})$ i la igualtat de Legendre (10) ens diu que

$$2E(1/\sqrt{2})K(1/\sqrt{2}) - K^2(1/\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2}. \quad (19)$$

Altrament, per l'apartat (ii) del lema 2, i recordant que $c_j^2 = a_j^2 - b_j^2$, tenim

$$E(1/\sqrt{2}) = \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} 2^j(a_j^2 - b_j^2)\right) K(1/\sqrt{2}).$$

Per tant, substituint aquest resultat a l'expressió (19):

$$K^2(1/\sqrt{2}) \left(2 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^j(a_j^2 - b_j^2) - 1\right) = K^2(1/\sqrt{2}) \left(1 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^j(a_j^2 - b_j^2)\right) = \frac{\pi}{2}. \quad (20)$$

Usant l'apartat (i) del lema 2, tenim

$$\left(\frac{\pi}{2 \text{MAG}(1, 1/\sqrt{2})}\right)^2 \left(1 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^j(a_j^2 - b_j^2)\right) = \frac{\pi}{2},$$

i, per tant,

$$\left(1 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^j(a_j^2 - b_j^2)\right) \frac{\pi}{2 \text{MAG}^2(1, 1/\sqrt{2})} = 1.$$

Operant, i com que $a_0^2 - b_0^2 = 1/2$, arribem a l'expressió de π desitjada.

$$\pi = \frac{2 \text{MAG}^2(1, 1/\sqrt{2})}{1 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^j(a_j^2 - b_j^2)} = \frac{4 \text{MAG}^2(1, 1/\sqrt{2})}{1 - \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j+1}(a_j^2 - b_j^2)}.$$

⁵ Com ja hem comentat, es pot veure que la convergència és quadràtica.

Per tal d'acabar la prova, observem en primer lloc que com que $\text{MAG}(1, 1/\sqrt{2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, la successió

$$u_n = \frac{4a_n^2}{1 - \sum_{j=1}^n 2^{j+1}(a_j^2 - b_j^2)}$$

té com a límit π . Ara bé, com que al pas enèsim ja coneixem a_n i b_n , i a_{n+1} és més a prop del límit que a_n , és ben natural considerar la successió

$$z_n = \frac{4a_{n+1}^2}{1 - \sum_{j=1}^n 2^{j+1}(a_j^2 - b_j^2)} = \frac{(a_n + b_n)^2}{1 - \sum_{j=1}^n 2^{j+1}(a_j^2 - b_j^2)},$$

que també convergeix a π i és la donada per l'algoritme. $\square$

2 Altres transformacions de Landen donades per mitjanes generalitzades

En aquesta secció recollirem altres transformacions de Landen que ens serviran per a calcular diferents funcions transcendents. En particular, estudiarem com es pot calcular la mitjana geomètricarharmònica i els resultats de Carlson [9], que estudien unificadament diversos casos.

2.1 La mitjana harmonicogeomètrica

És fàcil veure que si I és una integral primera de l'SDD donat per F , és a dir, si $I \circ F = I$, aleshores donada qualsevol aplicació bijectiva φ es compleix que $L = I \circ \varphi$ és una integral primera de l'SDD donat per $G = \varphi^{-1} \circ F \circ \varphi$. En efecte,

$$L \circ G = I \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ F \circ \varphi = I \circ F \circ \varphi = I \circ \varphi = L.$$

En llenguatge de sistemes dinàmics diríem que si F dona lloc a un SDD integrable, el mateix passa per a qualsevol SDD conjugat de F .

Si prenem I i F com a (1) i (3), i $\varphi(a, b) = (1/a, 1/b)$, obtenim que

$$L(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{ab \, d\theta}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} = abI(b, a) = abI(a, b) \quad (21)$$

és una integral primera de

$$G(a, b) = \left(\frac{2ab}{a+b}, \sqrt{ab} \right).$$

Observem que la primera component de G és precisament la mitjana harmònica de a i b . El límit (ℓ, ℓ) de la iteració $(a_{n+1}, b_{n+1}) = G^n(a_n, b_n)$ és el que s'anomena *mitjana harmonicogeomètrica* dels dos números, $\ell = \text{MHG}(a, b)$. Argumentant com a la prova de (4), obtenim que $L(a, b) = \text{MHG}(a, b) \frac{\pi}{2}$. Per tant, usant (4) i (21) obtenim

$$\text{MAG}(a, b) \cdot \text{MHG}(a, b) = ab.$$

2.2 Els resultats de Carlson

En el treball [9], Carlson estén la igualtat (2) a altres tipus de mitjanes. Donats a i b positius, considerem per a cada parell (i, j) on $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, les successions següents:

$$\begin{aligned} a_0 &:= a, & b_0 &:= b, \\ a_{n+1} &:= f_i(a_n, b_n), & b_{n+1} &:= f_j(a_n, b_n), \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} f_1(a, b) &:= \frac{a+b}{2}, & f_2(a, b) &:= \sqrt{ab}, \\ f_3(a, b) &:= \sqrt{a \frac{a+b}{2}}, & f_4(a, b) &:= \sqrt{\frac{a+b}{2} b}. \end{aligned}$$

De manera anàloga al que hem vist quan hem estudiat la mitjana aritmetico-geomètrica, es pot demostrar que, un cop fixats i i j , les successions $\{a_n\}_n$ i $\{b_n\}_n$ definides anteriorment convergeixen i ho fan cap al mateix límit, el qual denotarem com segueix:

$$\ell_{i,j}(a_0, b_0) := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Recordem també que la funció Beta es defineix com a

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1+t)^{-(m+n)} dt,$$

per a m i n positius. Incloem a continuació el resultat de Carlson i la seva prova.

TEOREMA 4 ([9]). *Considerem la funció*

$$R(r; s, s'; a^2, b^2) := \frac{1}{B(r, r')} \int_0^1 t^{r'-1} (t+a^2)^{-s} (t+b^2)^{-s'} dt, \quad (22)$$

on $r' = s + s' - r$. Si prenem els respectius paràmetres (r, s, s') d'acord amb la taula:

(i, j)	$F_{i,j}(a, b)$	(r, s, s')
$(1, 2)$	$\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$(1, 3)$	$\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{a\frac{a+b}{2}}\right)$	$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$
$(1, 4)$	$\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{\frac{a+b}{2}b}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$
$(2, 3)$	$\left(\sqrt{ab}, \sqrt{a\frac{a+b}{2}}\right)$	$\left(1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$
$(2, 4)$	$\left(\sqrt{ab}, \sqrt{\frac{a+b}{2}b}\right)$	$\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$
$(3, 4)$	$\left(\sqrt{a\frac{a+b}{2}}, \sqrt{\frac{a+b}{2}b}\right)$	$(1, 1, 1)$

s'obté que $R(r; s, s'; a^2, b^2)$ és una integral primera de la funció $F_{i,j}(a, b) := (f_i(a, b), f_j(a, b))$, $j > i$. És a dir, per als (r, s, s') corresponents als $i < j$ considerats,

$$R(r; s, s'; a^2, b^2) = R(r; s, s'; f_i^2(a, b), f_j^2(a, b)). \quad (23)$$

A més, es compleix que

$$\ell_{i,j}(a, b) = \left(R(r; s, s'; a^2, b^2)\right)^{-\frac{1}{2r}}. \quad (24)$$

PROVA. Fixats a i b , considerem el canvi de variable $t = (s(s + f_2^2))/(s + f_1^2)$, on, per simplicitat, denotem $f_k(a, b)$ per f_k . Aleshores,

$$\frac{dt}{ds} = \frac{(s + f_3^2)(s + f_4^2)}{(s + f_1^2)^2}, \quad t + a^2 = \frac{(s + f_3^2)^2}{s + f_1^2}, \quad t + b^2 = \frac{(s + f_4^2)^2}{s + f_1^2}.$$

Substituint les tres igualtats a l'expressió (22) tenim

$$R(r; s, s'; a^2, b^2) = \frac{1}{B(r, r')} \int_0^\infty s^{r'-1} (s + f_1^2)^{r-1} (s + f_2^2)^{r'-1} (s + f_3^2)^{1-2s} (s + f_4^2)^{1-2s'} ds. \quad (25)$$

Donat que la nostra intenció és provar que (22) és integral primera de $F_{i,j}$, s'haurà de complir que coincideixin els integrands de (22) i (25). Per exemple, considerem el cas $i = 1$ i $j = 2$, que correspon al cas de la mitjana aritmético-geomètrica anteriorment estudiat. Aleshores les expressions que contenen f_3 i f_4 no haurien d'aparèixer a (25), i, per tant:

$$1 - 2s = 0, \quad 1 - 2s' = 0, \quad r - 1 = -s, \quad r' - 1 = -s'.$$

Així doncs, obtenim que $s = s' = r = r' = 1/2$, que són precisament el valors que apareixen a la taula. De la mateixa manera, provaríem la resta de casos.

Per a calcular $\ell_{i,j}(a, b)$, denotem per $R_S(a^2, b^2)$ la funció corresponent $R(r; s, s'; a^2, b^2)$ obtinguda, un cop fixats els valors de $(r; s, s')$. Com que acabem de veure que independentment del valor de $n \in \mathbb{N}$ es compleix que:

$$R_S(a^2, b^2) = R_S\left((f_i^n(a, b))^2, (f_j^n(a, b))^2\right),$$

prenent límits a ambdós costats obtenim

$$\begin{aligned} R_S(a^2, b^2) &= R_S(\ell_{i,j}^2(a, b), \ell_{i,j}^2(a, b)) = \\ &= \frac{1}{B(r, r')} \int_0^\infty t^{r'-1} (t + \ell_{i,j}^2)^{-s} (t + \ell_{i,j}^2)^{-s'} dt = \\ &= \frac{1}{B(r, r')} \ell_{i,j}^{2r'-2s-2s'}(a, b) \int_0^\infty u^{r'-1} (u+1)^{-s} (u+1)^{-s'} du = \\ &= \ell_{i,j}^{-2r}(a, b) \frac{B(r', r)}{B(r, r')} = \ell_{i,j}^{-2r}(a, b), \end{aligned}$$

on, en el darrer pas, hem usat que $B(r, r') = B(r', r)$; vegeu, per exemple, [1]. Per tant, es compleix (24). $\square$

Quan $(i, j) = (1, 2)$, la integral primera

$$R\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; a^2, b^2\right) = \frac{1}{B(1/2, 1/2)} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t(t+a^2)(t+b^2)}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t(t+a^2)(t+b^2)}}$$

coincideix, mòdul una constant, amb la donada per la igualtat (2), ja que es pot veure que si $a^2 > b^2 > 0$,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t(t+a^2)(t+b^2)}} = \frac{2}{a\pi} K\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right) = \frac{2}{\pi} I(a, b).$$

Altres exemples similars als del teorema 4 estan desenvolupats a [6].

3 Transformades de Landen per a integrals racionals

En aquesta secció buscarem transformades de Landen per a certes integrals definides de tipus racional. Recollirem alguns dels resultats de [21, 23, 24].

Intuitivament, podríem dir que el procés de construcció de transformacions de Landen consisteix a fer una sèrie de canvis trigonomètrics que a continuació es desfan, però el procés complet no és tautològic, degut al fet que en un punt intermedi alguns sumands de la integral desapareixen per determinades simetries. Per aquesta raó començarem aquesta secció amb l'observació següent, que ens mostra algunes integrals que valen zero.

LEMA 5. Donat $k \in \mathbb{N}$ senar i P un polinomi parell que no s'anulla a l'interval $[-1, 1]$, es compleix

$$\int_0^\pi \frac{\cos^k t}{P(\cos t)} dt = 0.$$

PROVA. Aplicant el canvi de variables $t = \pi - s$, tenim

$$\int_0^\pi \frac{\cos^k t}{P(\cos t)} dt = \int_0^\pi \frac{\cos^k(\pi - s)}{P(\cos(\pi - s))} ds = \int_0^\pi \frac{(-\cos s)^k}{P(-\cos s)} ds = - \int_0^\pi \frac{\cos^k s}{P(\cos s)} ds,$$

i, per tant, la integral s'anulla, tal com volíem demostrar. $\square$

3.1 Funcions racionals simètriques amb denominador de grau 4

Dedicarem aquesta secció a provar (5). Per a $a > -2$, si

$$I(a, b, c) = \int_0^\infty \frac{bx^2 + c}{x^4 + ax^2 + 1} dx,$$

el que volem veure és que $I(F(a, b, c)) = I(a, b, c)$, on $F(a, b, c) = \left(2, \frac{b+c}{\sqrt{a+2}}, \frac{b+c}{\sqrt{a+2}}\right)$.

Si anomenem $P(x) = bx^2 + c$ i $Q(x) = x^4 + ax^2 + 1$, tenim

$$I(a, b, c) = \int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_0^\infty \frac{P(x) x^4 Q(1/x)}{Q(x) x^4 Q(1/x)} dx.$$

Si fem ara primer el canvi de variables $x = \tan \theta$ i a continuació $t = 2\theta$, arribem a

$$\begin{aligned} I(a, b, c) &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{A \cos^3(2\theta) + B \cos^2(2\theta) + C \cos(2\theta) + D}{E \cos^4(2\theta) + F \cos^2(2\theta) + H} d\theta = \\ &= \int_0^\pi \frac{A \cos^3 t + B \cos^2 t + C \cos t + D}{E \cos^4 t + F \cos^2 t + H} dt = \\ &= \int_0^\pi \frac{B \cos^2 t + D}{E \cos^4 t + F \cos^2 t + H} dt, \end{aligned}$$

on a l'última igualtat hem usat el lema 5. Els valors dels paràmetres són $A = (2 - a)(c - b)$, $B = (2 - a)(c + b)$, $C = (2 + a)(c - b)$, $D = (2 + a)(c + b)$, $E = (a - 2)^2$, $F = 8 - 2a^2$ i $H = (a + 2)^2$.

Atès que $\cos^2 t = (1 + \cos(2t))/2$ i fent el nou canvi $s = 2t$, resulta

$$I(a, b, c) = 2(b + c) \int_0^\pi \frac{(2 - a) \cos s + a + 6}{(2 - a)^2 \cos^2(s) + 2(2 - a)(a + 6) \cos s + (a + 6)^2} ds.$$

Introduint a continuació y , tal que $y = \tan(s/2)$, obtenim ja el resultat buscat

$$I(a, b, c) = (b + c) \int_0^\infty \frac{2(a + 2)y^2 + 8}{(a + 2)^2 y^4 + 8(a + 2)y^2 + 16} dy = I(F(a, b, c)),$$

on a la darrera igualtat hem fet el reescalat $z = \sqrt{a + 2} y/2$.

3.2 Funcions racionals simètriques amb denominador de grau 6

Seguint passos similars als de la secció anterior, demostrarem que agafant $F(a, b, c, d, e) = (G(a, b), H(a, b, c, d, e))$, amb G i H com a (6) i (7), es verifica que

$$I(a, b, c, d, e) = \int_0^\infty \frac{cx^4 + dx^2 + e}{x^6 + ax^4 + bx^2 + 1} dx$$

és una integral primera de F .

Si definim $P(x) = cx^4 + dx^2 + e$ i $Q(x) = x^6 + ax^4 + bx^2 + 1$, aleshores

$$I = I(a, b, c, d, e) = \int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_0^\infty \frac{P(x) x^6 Q(1/x)}{Q(x) x^6 Q(1/x)} dx.$$

Observem que el nou denominador és un polinomi recíproc.⁶ Si considerem primer el canvi de variables $x = \tan \theta$, i després fem $t = 2\theta$ obtenim

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{A \cos^5(2\theta) + B \cos^4(2\theta) + C \cos^3(2\theta) + D \cos^2(2\theta) + E \cos(2\theta) + F}{G \cos^6(2\theta) + H \cos^4(2\theta) + J \cos^2(2\theta) + K} d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{A \cos^5 t + B \cos^4 t + C \cos^3 t + D \cos^2 t + E \cos t + F}{G \cos^6 t + H \cos^4 t + J \cos^2 t + K} dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{B \cos^4 t + D \cos^2 t + F}{G \cos^6 t + H \cos^4 t + J \cos^2 t + K} dt, \end{aligned}$$

on, a l'última igualtat, hem usat de nou el lema 5, i on els paràmetres venen donats per

$$\begin{aligned} A &= -(c + e - d)(a - b), \\ B &= -3(ea + cb) + db + eb + da + ca + 6(-d + c + e), \\ C &= 12(e - c) + 2(-ea - eb - da + db + ca + cb), \\ D &= 8(c + e) + 4d + 2(-ca - db - eb + ea - da + cb), \\ E &= 4(e - c) - ca + da - db + eb + 3(-cb + ea), \\ F &= (c + d + e)(a + 2 + b), \\ G &= -(a - b)^2, \\ H &= -12(a + b) - 2ba + 36 + 3(b^2 + a^2), \\ J &= -3(a^2 + b^2) - 2ba + 24 + 8(b + a), \\ K &= (a + 2 + b)^2. \end{aligned}$$

Expressant ara l'integrand en funció de $\cos(2t)$ i considerant $s = 2t$, arribem a

$$I = 2 \int_0^\pi \frac{A_2 \cos^2 s + B_2 \cos s + C_2}{D_2 \cos^3(s) + E_2 \cos^2 s + F_2 \cos s + G_2} ds,$$

⁶ Un polinomi R , de grau n , es diu recíproc si $R(x) = x^n R(1/x)$.

on

$$\begin{aligned}
 A_2 &= 6(c + e - d) - 3(ea + cb) + ca + db + da + eb, \\
 B_2 &= 28(c + e) - 4d - 2(e + c + d)(a + b), \\
 C_2 &= 5(2d + 6c + 6e + cb + ea) + db + ca + eb + da, \\
 D_2 &= -(a - b)^2, \\
 E_2 &= -24(a + b - 3) + 3(a^2 + b^2) + 2ba, \\
 F_2 &= -16(a + b) - 3(a^2 + b^2) - 10(ba - 24), \\
 G_2 &= 40(a + b + 5) + a^2 + b^2 + 6ba.
 \end{aligned}$$

Si ara prenem $y = \tan(s/2)$, obtenim ja una integral similar a la inicial, concretament,

$$I(a, b, c, d, e) = \int_0^\infty \frac{A_3 y^4 + B_3 y^2 + C_3}{D_3 y^6 + E_3 y^4 + F_3 y^2 + G_3} dy,$$

amb

$$\begin{aligned}
 A_3 &= 2(c + d + e)(a + b + 2), \quad B_3 = 8((b + 3)c + (a + 3)e + 2d), \quad C_3 = 32(c + e), \\
 D_3 &= (a + b + 2)^2, \quad E_3 = 4(5a + 5b + ab + 9), \quad F_3 = 16(a + b + 6) \quad \text{i} \quad G_3 = 64.
 \end{aligned}$$

Per a acabar de veure que $I(a, b, c, d, e) = I(F(a, b, c, d, e))$, l'únic que cal fer és el reescalat $z = r \sqrt[6]{D_3/G_3} = \sqrt[3]{a + b + 2} y/2$.

3.2.1 Un exemple d'aplicació

Aproximarem ara la integral

$$\int_0^\infty \frac{3x^4 - x^2 + 24}{x^6 + 10x^4 + 8x^2 + 1} dx$$

fent servir la transformació de Landen donada a la secció anterior. Usant les iteracions corresponents per a la funció F definida per (6) i (7) obtenim

n	a_n	b_n	c_n	d_n	e_n
0	10	8	3	-1	24
1	3.297 208 191	3.257 301 140	3.528 742 902	17.150 000 00	9.946 885 046
2	3.001 485 673	3.001 486 131	7.321 863 016	13.912 897 68	6.588 966 668
3	3.000 000 046	3.000 000 045	6.954 209 737	13.908 763 71	6.954 553 797
4	2.999 999 999	3.000 000 000	6.954 381 760	13.908 763 49	6.954 381 739
5	3.000 000 000	3.000 000 000	6.954 381 748	13.908 763 50	6.954 381 750
6	3.000 000 000	3.000 000 000	6.954 381 750	13.908 763 50	6.954 381 750
7	3.000 000 000	3.000 000 000	6.954 381 750	13.908 763 50	6.954 381 750

Com que $a_6 \approx b_6 \approx 3$, $c_6 \approx e_6 \approx 6.954381750$ i $d_6 \approx 2c_6$, amb aquests iterats ja en tenim prou per a fer un càlcul aproximat de la integral. Per tant,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{3x^4 - x^2 + 24}{x^6 + 10x^4 + 8x^2 + 1} dx &\approx \int_0^\infty \frac{c_6x^4 + 2c_6x^2 + c_6}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx = \\ &= c_6 \int_0^\infty \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(x^2 + 1)^3} dx = \\ &= c_6 \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{c_6\pi}{2} \approx 10.92391731. \end{aligned}$$

NOTA 6. A [4] es demostra una extensió dels casos considerats en aquesta secció per a denominadors parells de graus arbitraris.

4 Un sistema dinàmic ben complicat

Per acabar aquest treball, i seguint [11, 20, 22], mostrarem en aquesta secció com de complicat és l'SDD generat per l'aplicació G , introduïda a (6),

$$G(a, b) = \left(\frac{5a + 5b + ab + 9}{\sqrt[3]{(a + b + 2)^4}}, \frac{a + b + 6}{\sqrt[3]{(a + b + 2)^2}} \right).$$

Recordem que G ve donada per les dues primeres components de la transformació de Landen associada a

$$\int_0^\infty \frac{cx^4 + dx^2 + e}{x^6 + ax^4 + bx^2 + 1} dx. \quad (26)$$

És fàcil veure que G té tres punts fixos a $\mathbb{R}^2$. D'aquests punts, un és el $(3, 3)$ i els altres dos els denotarem per $\mathbf{p} \approx (-4.2056, 3.9577)$ i $\mathbf{q} \approx (-5.3091, 0.8312)$. Fent un estudi local d'aquests punts no és difícil veure que el $(3, 3)$ és un punt atractor (de fet, superatractor, ja que els dos valors propis de la diferencial de G al punt són 0); el punt $\mathbf{p}$ és un punt de tipus sella i $\mathbf{q}$ és un punt repulsor. Consulteu, per exemple, [15] per veure les definicions d'aquests conceptes.

Els punts $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tals que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G^n(a, b) = (3, 3)$$

formen el que s'anomena *conca d'atracció* del punt fix $(3, 3)$. Un primer resultat, difícil i interessant, és

TEOREMA 7 ([11, 21, 20]). *La conca d'atracció del punt fix $(3, 3)$ per l'SDD generat per G coincideix amb la regió $\mathcal{W}$ del pla (a, b) on la integral (26) convergeix.*

Per tant, des del punt de vista dinàmic, si $(a, b) \in \mathcal{W}$ la dinàmica és trivial, ja que les trajectòries de l'SDD tendeixen a $(3, 3)$. Des del nostre punt de

vista, això vol dir que la transformació de Landen és sempre útil per a calcular qualsevol integral, ja que és finita. Com a exemple, ja hem vist el càlcul de la subsecció 3.2.1.

Vegem ara com es pot algebritzar la condició que la integral (26) convergeix. Analíticament, és molt senzill: hem d'imposar que el polinomi $Q(x) = x^6 + ax^4 + bx^2 + 1$ no tingui arrels positives. Calculant el discriminant de $Q(x)$, vegeu per exemple [18], obtenim que $\text{Dis}(Q(x), x) = -64R^2(a, b)$, on

$$R(a, b) := -27 + 18ab - 4a^3 - 4b^3 + a^2b^2. \quad (27)$$

Recordem que aquest polinomi s'anulla si i només si Q té alguna arrel múltiple. Definim $\mathcal{L} := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : R(a, b) = 0\}$. A la figura 1 veiem que $\mathcal{L}$ té dues components connexes. Anomenarem $\mathcal{L}_1$ la que no toca el primer quadrant. No és difícil veure que $\mathcal{W}$ és precisament la regió que hi ha sobre de $\mathcal{L}_1$. Així, com a corollari del teorema anterior, tenim que $\mathcal{L}_1$ és la frontera de la conca d'atracció del punt $(3, 3)$.

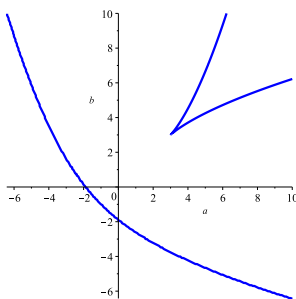


FIGURA 1: Corba $\mathcal{L} = \{R(a, b) = 0\}$. La component connexa de sota és $\mathcal{L}_1$.

Una igualtat ben senzilla, però molt útil, que ja es dona a [11], és

$$R(G(a, b)) = \frac{(a - b)^2 R(a, b)}{(a + b + 2)^4}.$$

Observem que aquesta igualtat implica que les regions $R(a, b) = 0$, $R(a, b) > 0$ i $R(a, b) < 0$ són invariants per G . En particular, com que es pot veure que $\mathbf{p} \in \mathcal{L}_1$, no és difícil comprovar que $\mathcal{L}_1$ està inclosa a la varietat atractora del punt de tipus sella.

Ara bé, què passa quan prenem un punt (a, b) que està per sota de $\mathcal{L}_1$? Per tenir-ne una primera idea podem agafar un punt a l'atzar i veure què succeeix. Si prenem com a condició inicial $(-7, 1)$, després de 20 000 iterats, obtenim la figura 2. Aquesta figura mostra el comportament impredecible de l'SDD. És un problema d'interès actual trobar explicacions satisfactòries del que s'observa; vegeu [20, 22]. Genèricament, l'aspecte dels punts de qualsevol òrbita sembla ser essencialment el mateix. De fet, una figura semblant a la de la figura 2 ja

va ser la portada del *Notices of the American Mathematical Society* el març del 2002.

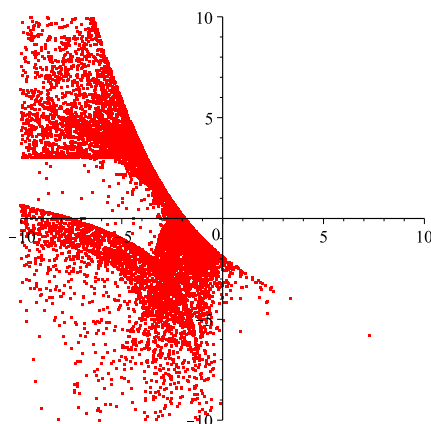


FIGURA 2: 20 000 punts d'una sola òrbita amb condició inicial sota de $\mathcal{L}_1$.

Agraïments

El primer autor té el suport del projecte MINECO MTM2013-40998-P i del projecte 2014SGR568 de la Generalitat de Catalunya. El segon autor té el suport del projecte MINECO/FEDER DPI2016-77407-P (AEI/FEDER, UE).

Referències

- [1] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Washington, D. C.: For sale by the Superintendent of Documents, U. S. Government Printing Office, 1964. (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series; 55)
- [2] ALMKVIST, G.; BERNDT, B. «Gauss, Landen, Ramanujan, the arithmetic-geometric mean, ellipses, π , and the Ladies diary». *Amer. Math. Monthly*, 95 (7) (1988), 585–608.
- [3] ARNDT, J.; HAENEL, C. *À la Poursuite de π* . París: Vuibert, 2006.
- [4] BOROS, G.; MOLL, V. H. «Landen transformations and the integration of rational functions». *Math. Comp.*, 71 (238) (2002), 649–668.
- [5] BORWEIN, J. M.; BORWEIN, P. B. *Pi and the AGM. A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*. Nova York: John Wiley & Sons, Inc., 1987. (Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts; 4)

- [6] BORWEIN, J. M.; BORWEIN, P. B. «A cubic counterpart of Jacobi's identity and the AGM». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 323 (2) (1991), 691–701.
- [7] BRENT, R. P. «Fast multiple-precision evaluation of elementary functions». *J. Assoc. Comput. Mach.*, 23 (2) (1976), 242–251.
- [8] BYRD, P. F.; FRIEDMAN, M. D. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*. Berlín-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1954. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete; LXVII)
- [9] CARLSON, B. C. «Algorithms involving arithmetic and geometric means». *Amer. Math. Monthly*, 78 (1971), 496–505.
- [10] CARTAN, H. *Teoría elemental de las funciones analíticas de una o varias variables complejas*. Madrid: Selecciones científicas, 1968.
- [11] CHAMBERLAND, M.; MOLL, V. H. «Dynamics of the degree six Landen transformation». *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 15 (3) (2006), 905–919.
- [12] CONRAD, K. «The Gaussian integral». <http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/analysis/gaussianintegral.pdf>.
- [13] COX, D. A. «The arithmetic-geometric mean of Gauss». *Enseign. Math.* (2), 30 (3–4) (1984), 275–330.
- [14] EYMARD, P.; LAFON, J.-P. *The Number π* . Providence, R. I.: American Mathematical Society, 2004. [Traduït de l'original en francès de l'any 1999 per Stephen S. Wilson]
- [15] FERNÁNDEZ PÉREZ, C.; VÁZQUEZ HERNÁNDEZ, F. J.; VEGAS MONTANER, J. M. *Ecuaciones diferenciales y en diferencias: sistemas dinámicos*. Madrid: Thomson Ediciones Spain, Paraninfo, S. A., 2003.
- [16] GAUSS, C. F. «Arithmetisch geometrisches Mittel». *Werke*, Bd. 3 Königlichen Gesell. Wiss., Göttingen (1876), 361–403.
- [17] GAUSS, C. F. «Le journal mathématique de Gauss». *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 9 (1) (1956), 21–51. [Traducció anotada de P. Eymard i J. P. Lafon]
- [18] KUROSCH, A. G. *Curso de álgebra superior*. 5a ed. Moscou: Mir, 1987. [Traducció del rus i amb una introducció d'Emiliano Aparicio Bernardo]
- [19] LANDEN, J. «An investigation of a general theorem for finding the length of any arc of any conic hyperbola, by means of two elliptic arcs, with some other new and useful theorems deduced therefrom». *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 65 (1775), 283–289.
- [20] MOLL, V. H. «The evaluation of integrals: a personal story». *Notices Amer. Math. Soc.*, 49 (3) (2002), 311–317.
- [21] MOLL, V. H. «Integrales definidas: Análisis, Números y Experimentos». *Revista Científica Tumbaga*, 2 (2008), 138–174. [Notes en espanyol d'un curs donat a la «Setmana de la Matemàtica» a Valparaiso, Xile]

- [22] MOLL, V. H. *Numbers and Functions. From a classical-experimental mathematician's point of view*. Providence, R. I.: American Mathematical Society, 2012. (Student Mathematical Library; 65)
- [23] MANNA, D.; MOLL, V. H. «A simple example of a new class of Landen transformations». *Amer. Math. Monthly*, 114 (3) (2007), 232-241.
- [24] MANNA, D. V.; MOLL, V. H. «Landen survey». A: *Probability, Geometry and Integrable Systems*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008, 287-319. (Math. Sci. Res. Inst. Publ.; 55)
- [25] MCKEAN, H.; MOLL, V. *Elliptic Curves. Function Theory, Geometry, Arithmetic*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [26] NEWMAN, D. J. «A simplified version of the fast algorithms of Brent and Salamin». *Math. Comp.*, 44 (169) (1985), 207-210.
- [27] PLA I CARRERA, J. «Una història breu de la matemàtica». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 18 (1) (2003), 47-129.
- [28] RUBIO SEGOVIA, B.; RUBIO SEGOVIA, J. «Medias y su relación con integrales elípticas». *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 4 (1) (2001), 76-93.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
gasull@mat.uab.cat, mllore34@xtec.cat