

## SOBRE LA LEY DE TITIUS-BODE

A. GASULL

El objetivo de estas notas será explicar la idea del trabajo de los profesores de la Universidad Autónoma de Barcelona, J. Llibre y C. Piñol, aparecido en la revista *The Astronomical Journal* 93 (1987), 1272-1279, bajo el título "A gravitational approach to the Titius-Bode law". En el mismo, estos autores dan una explicación matemática de la ley conocida como ley límite de Titius-Bode. Hemos consultado también el libro "Els Amants de l'Astronomia" de C.A. Ronan, Editorial Blume 1982.

Introduzcamos en primer lugar la ley de Titius-Bode.

En 1756 el científico alemán Johann Titius estableció una relación que nos da la distancia de los planetas de nuestro sistema al Sol. El mismo lo hizo notar solamente como una nota en un pie de página de un libro que había traducido. Fue Johann Bode, quien en 1772 difundió más ampliamente lo que se ha convenido en llamar ley de Titius-Bode.

En aquella época solo se conocían Mercurio, Venus, la Tierra, Marte, Jupiter y Saturno. El fenómeno que Titius observó fue que si consideramos los números siguientes (nótese que cada uno es el doble del anterior, si no tenemos en cuenta el 0)

0, 0.3, 0.6, 1.2, 2.4, 4.8, 9.6

y les sumamos 0.4, obtenemos

0.4, 0.7, 1, 1.6, 2.8, 5.2, 10.0

que son las distancias medias<sup>1</sup> aproximadas, en unidades astronómicas<sup>2</sup> de los planetas al Sol, excepto el 2.8 (ver Tabla 1).

Mercurio	Venus	La Tierra	Marte	Júpiter	Saturno
0.39	0.72	1.00	1.52	5.20	9.55

Tabla 1. Distancias medias al Sol observadas.

Los astrónomos de aquella época encontraron misteriosa la gran concordancia de los números obtenidos matemáticamente y las distancias reales de los planetas al Sol, excepto por el 2.8. Por eso en 1800 organizaron una búsqueda del *planeta perdido*. Durante un año estuvieron buscando algún planeta a una distancia media aproximada de 2.8 u.a. pero sin éxito, hasta que de manera independiente y accidental, el 1 de enero de 1801, un astrónomo siciliano, Guiseppe Piazzi, descubrió el primer planeta menor. A este planeta se le llamó Ceres y se encuentra a una distancia media de 2.77 u.a. (!). En 1807 ya se habían localizado cuatro planetas pequeños.

<sup>1</sup> Las órbitas de los planetas son aproximadamente elipses, y la distancia media de un planeta al Sol es el semieje mayor de esta elipse.

<sup>2</sup> En unidades astronómicas (u.a.) la distancia media de la Tierra al Sol es 1. Cualquier otra distancia puede ser expresada en u.a. usando una proporción.

Hoy en día se conoce la órbita de millares de ellos y al conjunto que forman se le denomina *cinturón de asteroides*.

Si expresamos con una sola fórmula la sucesión de números obtenida por Titius tenemos

$$d_k = 0.4 + 0.3 \times 2^k$$

Esta fórmula debe entenderse de la siguiente forma: El número  $d_k$  obtenido al substituir  $k$  en la expresión de la derecha representa la distancia media de un planeta al Sol, con la siguiente relación:  $k = -\infty, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  corresponde, respectivamente, a Mercurio, Venus, la Tierra, Marte, Asteroides, Júpiter, Saturno, Urano y Plutón. La distancia al Sol del planeta Neptuno no aparece en la sucesión de números dada por la ley de Titius-Bode. Más adelante comentaremos una posible explicación de este hecho.

Nos gustaría remarcar que Urano y Neptuno tampoco eran conocidos cuando se hizo pública la ley. La Tabla 2 recoge toda la información dada.

	$k$	$d_k$	dist. media observada
Mercurio	$-\infty$	0.4	0.39
Venus	0	0.7	0.72
La Tierra	1	1.0	1.00
Marte	2	1.6	1.52
Asteroides	3	2.8	2.90
Júpiter	4	5.2	5.20
Saturno	5	10.0	9.55
Urano	6	19.6	19.20
Neptuno			30.09
Plutón	7	38.8	39.50

Tabla 2.

La ley límite de Titius-Bode es menos general que la ley de Titius-Bode. Esta afirma que si tomamos dos planetas consecutivos del sistema solar, bastante alejados del Sol, entonces la distancia media al Sol del más lejano es aproximadamente el doble de la distancia media al Sol del más cercano.

Claramente si la ley de Titius-Bode es cierta también lo será la ley límite, ya que si tomamos dos planetas consecutivos del sistema solar, suficientemente alejados del Sol, entonces (ya que  $k$  es suficientemente grande)

$$\frac{d_{k+1}}{d_k} = \frac{0.4 + 0.3 \times 2^{k+1}}{0.4 + 0.3 \times 2^k} = \frac{\frac{0.4}{2^k} + 0.3 \times 2}{\frac{0.4}{2^k} + 0.3} \approx \frac{0.3 \times 2}{0.3} = 2.$$

Por lo tanto, si  $k$  es grande  $d_{k+1} \approx 2d_k$  (por ejemplo si  $k = 5$  tenemos que  $d_{k+1} \approx 1.96d_k$ ).

Si usamos las distancias medias observadas dadas en la Tabla 2 obtenemos los siguientes resultados (no tenemos en cuenta a Neptuno)

$$\begin{array}{cccc} \frac{0.72}{0.39} \approx 1.85, & \frac{1.00}{0.72} \approx 1.39, & \frac{1.52}{1.00} \approx 1.52, & \frac{2.90}{1.52} \approx 1.91, \\ \frac{5.20}{2.90} \approx 1.79, & \frac{9.55}{5.20} \approx 1.84, & \frac{19.20}{9.55} \approx 2.01, & \frac{39.50}{19.20} \approx 2.06. \end{array}$$

Por consiguiente obtenemos la sucesión 1.85, 1.39, 1.52, 1.91, 1.79, 1.84, 2.01, 2.06 que corrobora las afirmaciones de la ley límite de Titius-Bode (si la distancia media de un planeta al Sol fuera exactamente el doble que la del anterior esta sucesión estaría compuesta sólo de números 2).

Para dar una explicación matemática de la ley necesitamos tener un modelo teórico aproximado del sistema solar y unas leyes de movimiento que nos permita decidir a partir de una posición de los planetas y el Sol cuál será su posición al cabo de un cierto tiempo.

La formulación del modelo teórico depende esencialmente del problema concreto a estudiar. Normalmente es una simplificación de la realidad. Dejaremos el mismo para el final de esta nota.

La ley que nos permite predecir el movimiento de los cuerpos es la llamada *ley de la gravedad* y fue formulada por el físico y matemático Isaac Newton (1642-1727). Esta ley nos dice que dos puntos materiales cualesquiera se atraen mutuamente con una fuerza directamente proporcional al producto de sus dos masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a que se encuentran. Si lo expresamos con una fórmula tenemos que la fuerza  $F$  entre dos cuerpos de masas  $m$  y  $M$ , que están a distancia  $d$  es

$$F = G \frac{mM}{d^2},$$

donde  $G$  es una constante ( $G = 6.67 \times 10^{-8}$  dinas·cm<sup>2</sup> · g<sup>-2</sup>).

Esta fórmula nos permite medir la fuerza que ejerce la Tierra sobre cosas tan variadas como nosotros mismos o sobre la Luna.

Así, como la masa de la Tierra es  $M = 5.98 \times 10^{27}$  g, la fuerza que ejerce la Tierra sobre una masa  $m = 100$  Kg situada sobre la superficie terrestre (es decir a  $(40 \times 10^6)/(2\pi)$  m del centro de ésta) es de

$$6.67 \times 10^{-8} \frac{(100 \times 10^3)(5.98 \times 10^{27})}{((4000 \times 10^6)/2\pi)^2} = 98416241 \text{ dinas,}$$

que en unidades más usuales es de unos 100 Kp, y es lo que llamamos *peso* del objeto de masa  $m$  en la Tierra<sup>3</sup>. Como la distancia de la Luna al centro de la Tierra es aproximadamente 60 veces el radio de la Tierra, y la masa de la Luna es de  $7.35 \times 10^{25}$  g, tenemos que la fuerza con que la Tierra atrae a su satélite es de  $20.09 \times 10^{24}$  dinas.

De la ley de la gravedad de Newton se pueden deducir las siguientes propiedades sobre el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Estas son las leyes de Kepler (1571-1630):

- 1) Los planetas describen elipses alrededor del Sol, estando éste en uno de sus focos.
- 2) Las áreas barridas por el vector posición de un planeta con respecto al Sol son iguales en tiempos iguales.
- 3) El cuadrado del periodo de revolución de un planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse que éste describe.

En realidad las leyes de Kepler son anteriores a la formulación de Newton de la ley de gravitación. Es más Newton dedujo la ley de la gravedad a partir de las leyes de Kepler. Estas leyes fueron obtenidas por Kepler después del redescubrimiento<sup>4</sup> de Copernico (1473-1543) de que la

<sup>3</sup> Este mismo objeto en la Luna pesaría unas 6 veces menos (es decir, la Luna lo atraería con una fuerza 6.064 veces menor que la Tierra) ya que la masa de la Luna es de  $7.35 \times 10^{25}$  g y su radio medio de  $1.738 \times 10^6$  m.

<sup>4</sup> Ya algunos astrónomos griegos, como Aristarco de Samos (310-230 a. C.), creían que era la Tierra la que daba vueltas alrededor del Sol.

Tierra giraba alrededor del Sol y de las meticulosas mediciones sobre la posición de unos cuantos planetas realizadas por Tycho Brahe (1546-1601) (éste realizó estas medidas sin telescopio y con una precisión de dos minutos de arco).

Una vez se conocen todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en movimiento ya se puede determinar mediante una relación matemática cuál será su futura trayectoria. Así de la ley de gravitación ya podemos predecir, al menos teóricamente, el futuro movimiento de los cuerpos espaciales.

Veamos ahora el modelo simplificado del sistema solar que consideraremos. Este estará formado por el Sol, dos planetas girando alrededor del Sol y el centro de masas (c.d.m.) de la Galaxia. Supondremos además que las órbitas de los dos planetas están en un mismo plano y que giran en el mismo sentido.

Estos tipos de problemas son conocidos en Mecánica Celeste como problemas de cuatro cuerpos (en este caso el c.d.m. de la Galaxia, el Sol y los dos planetas). A partir de la ley de la gravedad se conocen las ecuaciones que regirán el movimiento de estos cuatro cuerpos, pero no es conocida la solución de estas ecuaciones. Por tanto para tener una idea de como es el movimiento de los cuatro cuerpos necesitaremos aún más simplificaciones.

El camino usual es suponer que tres de estos cuerpos se mueven de una manera preestablecida y el cuarto (que se considera que no afecta al movimiento de los otros tres) siguiendo la ley de Newton de la gravitación. Esta manera preestablecida de moverse será lo más parecida posible al movimiento real observado para ellos.

En nuestro caso supondremos que el c.d.m. del Sol-planeta interior se mueve en una órbita circular alrededor del c.d.m. de la Galaxia, y que el Sol y el planeta interior se mueven también en órbitas circulares alrededor de su centro de masas. El plano descrito por el c.d.m. del Sol-planeta interior es aproximadamente el plano galáctico y está inclinado un ángulo de unos 60 grados respecto al plano que contiene la órbita del Sol y el planeta interior (aproximadamente plano de la eclíptica).

Después de un complejo estudio matemático de las ecuaciones correspondientes a este último modelo simplificado obtenemos una posible explicación de la ley límite de Titius-Bode : *De entre las trayectorias posibles que podría seguir el planeta exterior se encuentra una familia de éstas entre las cuales la más estable<sup>5</sup> corresponde a una órbita aproximadamente circular y con un radio cercano a unas  $2^{\frac{2}{3}} \approx 2.08$  veces el radio de la órbita circular del planeta interior.*

Observemos que en este modelo se ha considerado que el planeta exterior no influye en el movimiento de los otros tres cuerpos. Esto nunca es cierto, pero es razonable suponerlo si su masa es bastante más pequeña que la de éstos. Si tomamos como referencia la masa de la Tierra ( es decir esta masa igual a 1) las masas de Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno y Plutón son respectivamente 317.8, 95.1, 14.5, 17.2, 0.1. Por tanto es razonable que el modelo matemático simplificado estudiado funcione al considerar Júpiter y Saturno, o Saturno y Urano, pero no es razonable para Urano y Neptuno (la masa de Neptuno es mayor que la de Urano). Esta es pues una posible explicación de porqué la ley de Titius-Bode no se puede aplicar a Neptuno.

Para acabar comentaremos que la ley límite de Titius-Bode es formulada a veces en términos de los periodos de traslación de los planetas alrededor del Sol ( no se incluyen entonces los

---

<sup>5</sup>Podemos entender el hecho de que una trayectoria es la más estable, como el de que esta trayectoria es la que es más probable que siga existiendo aunque el modelo que tengamos sufra pequeños cambios. No olvidemos que hemos estudiado un modelo aproximado del sistema solar real, y que creemos que el modelo real es cercano a éste.

Asteroides). En este caso la ley límite puede enunciarse diciendo que el periodo de traslación de un planeta alrededor del Sol es aproximadamente el triple que el del planeta anterior. Así, por ejemplo, (si no tenemos en cuenta a Neptuno) sabemos que los periodos de los planetas Júpiter, Saturno, Urano y Plutón son respectivamente (en años terrestres) 11.86, 29.46, 84.02 y 247.70. La equivalencia entre esta formulación y la explicada anteriormente nos la da la tercera ley de Kepler.