GEMMES MATEMÀTIQUES

ARMENGOL GASULL

Aquest article és una extensió d'un treball del mateix autor, amb objectiu i títol semblants, "Joies Matemàtiques", veure [42].

Es pretén recollir demostracions, que en opinió de l'autor siguin senzilles i boniques i, a més, siguin tals, que llegir-les i comprendre-les provoqui una certa felicitat. Senzill és un terme subjectiu, però per situar-lo en un context acadèmic, podríem assimilar-ho al nivell de comprensió matemàtica que tenen els bons alumnes de primers anys d'universitat. Si senzill ja és subjectiu, que podem dir de bonic! Per descomptat, ni volem ni sabem precisar-ho. En tot cas, un resultat, per ser bonic, ha d'interessar i no deixar indiferents a la majoria dels lectors matemàtics. A més, pot ser bonic per diferents raons: pel seu enunciat, per la seva interpretació, o pel tipus d'argumentacions que han permès demostrar-lo. Uns treballs que reflexionen sobre aquesta qüestió són [43, 64, 94, 97]. Segons Hardy ([48]), en els grans teoremes hi ha un grau molt alt de sorpresa, combinat amb inevitabilitat i economia[1].

Una recopilació molt més ambiciosa és el famós llibre [1]. També s'ocupen de la mateixa qüestió els tres llibres clàssics [53, 54, 55], els llibres [2, 19, 31, 44, 85], el treballs [77, 108], o la plana web [10].

Espero que el lector gaudeixi amb aquest recull tant com ho ha fet l'autor preparant-lo i hi trobi demostracions que no coneixia. El treball està estructurat en seccions que es poden llegir de manera independent. Quan ha sigut possible s'han contextualitzat les qüestions i proves presentades. Com no podia ser de cap altra manera, hi ha resultats involucrant els nombres primers, π, e, triangles, quadrilàters, àrees, volums, integrals, polinomis, sèries, fraccions contínues, daus, teoria de

Date: 1 de juliol de 2019.

[1]"In [great theorems] there is a very high degree of unexpectedness, combined with inevitability and economy."

conjunts, equacions diofàntiques, l'infinit, ..., vaja, els àtoms de les matemàtiques. Una altra cosa, també inevitable, és la quantitat de noms il·lustres que surten citats al treball.

Índex

1. Nombres enters

1.1. **Una pregunta amb resposta sorprenent.** Hi ha dos números irracionals a i b tals que a^b sigui racional?

La prova, no constructiva, que la resposta és "si" és a la vegada senzilla i bonica. Agafem $c = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Si c és racional ja hem acabat prenent $a = b = \sqrt{2}$. Si no, observem que

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2,$$

per tant podem prendre $a = c$ i $b = \sqrt{2}$.

Observem que la demostració anterior no ens aclareix si c és racional o no. De fet, l'any 1900 Hilbert va proposar com a problema VII de la seva famosa llista, decidir per exemple si $2^{\sqrt{2}}$ i e^π eren números transcendents (és a dir, no eren arrels de cap polinomi no nul amb coeficients enters, vegeu també la Secció 2.5). Aquestes qüestions van ser resoltes simultàniament per Gelfond i Schneider al 1934. El seu resultat, conegut com Teorema de Gelfond–Schneider, diu que, si a i b són números algebraics (no transcendents), $a \notin \{0, 1\}$ i b és irracional, aleshores a^b és transcendent.

Anem a veure que la transcendència (i per tant la irracionalitat) dels números $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ i e^π se segueix del teorema. Observi's en primer lloc que si α és un número no algebraic, aleshores $\beta = \sqrt{\alpha}$ també ho és, ja que si β fos arrel d'un polinomi $P(x)$, no nul amb coeficients enters, aleshores α seria arrel de $Q(x) := P(x^2)$. Per tant, com que $2^{\sqrt{2}}$ és transcendent el mateix passa amb la seva arrel quadrada, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Finalment, com que e^π és un dels valors que pren $\left(\mathrm{e}^{i\pi}\right)^{-i} = (-1)^{-i}$, també sabem que és transcendent.

És curiós observar que encara no se sap si

$$\pi^{\mathrm{e}} \quad \text{o} \quad \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}$$

són irracionals o transcendents.

1.2. **Hi ha infinits nombres primers.** Per a molts matemàtics la prova d'Euclides de que hi ha infinits primers és immillorable. A la secció següent en veurem una variació. Recordem-la breument. Si n'hi hagués un número finit, $p_1, p_2, \dots, p_k$ arribem a una contradicció considerant $p_1p_2\cdots p_k + 1$ ja que o bé aquest número és un nou primer, o té un primer diferent dels k donats com a divisor.

Recentment, al 2006, li ha sortit una competidora ([96]) que reproduïm a continuació. Considerem la successió de números naturals següent:

$$x_{k+1} = x_k(x_k + 1), \quad 1 < x_1 \in \mathbb{N}.$$

Demostrarem per inducció que la descomposició en factors primers de x_k conté com a mínim k primers diferents. El resultat és clarament veritat per $k = 1$. Suposem-lo cert per a $k = n$ i anem a provar-lo per a $k = n + 1$. Tenim que x_k és divisible per k primers diferents. A més, per a tot $1 < m \in \mathbb{N}$, els números m i $m + 1$ són primers entre si, ja que si p divideix a m i $m + 1$, divideix també a la resta que és 1. Així $x_n + 1$ conté algun primer en la seva descomposició en factors primers que no és a la descomposició de x_n. Per tant x_{n+1} és divisible, com a mínim, per $n + 1$ nombres primers, tal i com volíem demostrar.

Entre els dos llibres [74, 91] hi ha una dotzena de proves diferents de l'existència d'infinits nombres primers.

1.3. **Hi ha infinits primers de la forma $4n-1$.** Del fet que hi ha infinits nombres primers ja sabem que o bé n'hi ha un número infinit de la forma $4n - 1$, o bé n'hi ha un número infinit de la forma $4n + 1$, o bé les dues opcions es donen.

Anem a veure que la primera opció és certa. La prova és una senzilla i elegant adaptació de la prova d'Euclides de la infinitud dels nombres primers.

Suposem que no, per tal d'arribar a contradicció. Siguin $p_1, p_2, ..., p_k$ tots els primers de la forma $4n - 1$. Considerem

$$N = 4p_1p_2\cdots p_k - 1.$$

Aleshores N no pot ser primer, ja que seria de la forma $4n - 1$ i no és a la llista de tots els primers d'aquesta forma. Clarament cap p_j divideix a N. A més a la descomposició de N en factors primers n'hi ha com a mínim un de la forma $4n - 1$, ja que si tots fossin de la forma $4n + 1$, N també ho seria ja que $(4n + 1)(4m + 1) = 4(4nm + n + m) + 1$. Aquest primer seria de la forma $4n - 1$ i no és cap dels p_j, $j \le k$, obtenint la contradicció desitjada.

De fet, Dirichlet al 1837 va demostrar que, variant $n \in \mathbb{N}$, qualsevol expressió $an+b$ amb a i b enters coprimers dona lloc a infinits nombres primers.

1.4. **Un gran forat sense nombres primers.** Acabem de veure que hi ha infinits nombres primers. De fet, se sap molt més. Per exemple, a l'any 1896, Hadamard i de la Vallée-Poussin van provar, usant idees de Riemann, que si $\pi(n)$ denota el número de nombres primers menors o iguals que n,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)\ln(n)}{n} = 1.$$

Per això, a primera vista pot resultar sorprenent el resultat següent: per a tot $m \in \mathbb{N}$ hi ha m números consecutius tals que cap d'ells és primer. Abans de seguir llegint potser ve de gust pensar-ho per un mateix.

Hi ha una prova senzillíssima d'aquest fet: per a $m \ge 2$, podem prendre $(m+1)!+k$, per a $k \in \{2, ..., m + 1\}$. Clarament, cada $(m + 1)! + k$ és divisible per k.

1.5. **Dues conjectures d'Euler.** Expliquem a continuació dos problemes que va tractar Euler, pels quals el seu fabulós enginy no va ser suficient per a proposar respostes correctes.

Fixat, $n \in \mathbb{N}$, Euler va conjecturar l'any 1769 que si sumen $k > 1$ potencies n-èsimes de números naturals i obtenim una potència n-èsima, aleshores $k \geq n$. Aquest resultat va resultar ser fals i el primer contraexemple va ser per a $n = 5$ i és de l'any 1966 ([62]):

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5.$$

Més endavant, l'any 1988, Frye va donar un contraexemple per a $n = 4$,

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4.$$

El segon problema és el següent: donats dos conjunts amb n elements A i B, un *quadrat grecollatí d'ordre* n és una quadrícula de mida $n \times n$ de manera que a cada casella hi ha un element de cada conjunt, tots els elements d'$A \times B$ hi són, i a més, cada element d'A i de B apareix a totes les files i totes les columnes. Aquests quadrats són coneguts des d'abans d'Euler, però ell els va popularitzar. El seu nom ve de que ell denotava els elements d'un dels conjunts amb lletres gregues i els de l'altre amb lletres llatines. Avui en dia se sap que hi ha quadrats grecollatins per a tot $n \geq 3$, excepte per $n = 6$, en contra del que va conjecturar Euler en el seu temps afirmant que no n'hi havia cap per $n = 4k+2$, per a $k \geq 1$. A la Figura 1 se'n mostren dos, un per a $n = 4$, cosit per la meva mare en punt de creu amb fils de 8 colors, i un altre per a $n = 10$. En els dos, es representen els elements dels conjunts com els colors de dins i de fora dels quadradets per a cadascun dels n^2 quadrats que els formen.

Figura 1. Quadrats grecollatins 4×4 i 10×10.

1.6. **Mitjanes dels divisors d'un número.** Hi ha un resultat molt senzill de provar que involucra tres mitjanes de tots els divisors d'un número $n \in \mathbb{N}$, però que d'entrada sorprèn una mica, vegeu també [81].

Recordem que donats k números, $x_1, x_2, \ldots, x_k$, la seva mitjana aritmètica és $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)/k$, si són positius la seva mitjana geomètrica és $(x_1 x_2 \cdots x_k)^{1/k}$, i si són no nuls, la seva mitjana harmònica és

$$\frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_k}}{k}} = \frac{k}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_k}}.$$

Si ara denotem per $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ tots els divisors naturals de n, amb $n \neq m^2$, $m \in \mathbb{N}$, i per A_n, G_n i H_n les seves respectives mitjanes aritmètica, geomètrica i harmònica, aleshores és compleix que

$$\sqrt{A_n H_n} = G_n.$$

La sorpresa es trenca una mica, ja que de fet el que passa és que

$$A_n H_n = n \quad \text{i} \quad G_n = \sqrt{n}\,.$$

Per provar-ho, com que per a tot $j = 1, 2, \ldots, k$, $d_j d_{k+1-j} = n$, ja que els divisors venen per parelles, tenim que

$$\begin{aligned} A_n H_n &= \frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_k}{k} \frac{k}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_k}} = \frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_k}{n} \frac{n}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_k}} \\ &= \frac{n(d_1 + d_2 + \cdots + d_k)}{\frac{n}{d_1} + \frac{n}{d_2} + \cdots + \frac{n}{d_k}} = \frac{n(d_1 + d_2 + \cdots + d_k)}{d_k + d_{k-1} + \cdots + d_1} = n. \end{aligned}$$

$$G_n^{2k} = G_n^k G_n^k = \big(d_1 d_2 \cdots d_k\big)\big(d_k d_{k-1} \cdots d_1\big) = \Big(\big(d_1 d_k\big)\big(d_2 d_{k-1}\big) \cdots \big(d_k d_1\big)\Big) = n^k.$$

Si es vol calcular A_n o H_n tot és una mica més complicat. Per exemple, si la descomposició en factors primers de n és $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, aleshores es pot veure que $k = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$ i

$$A_n = \frac{\frac{p_1^{\alpha_1} - 1}{p_1 - 1} \frac{p_2^{\alpha_2} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_r^{\alpha_r} - 1}{p_r - 1}}{k}.$$

1.7. **Algunes proves sense paraules.** Les quatre proves presentades i moltes més es poden trobar a [75, 76]. Els famosos números de Fibonacci F_n, que recordem, venen definits com $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, amb $F_0 = 0, F_1 = 1$, o els números triangulars $T_n = 1 + 2 + \cdots + n$, satisfan certes relacions. Per exemple

$$F_{n+1}^2 = 4F_n F_{n-1} + F_{n-2}^2, \qquad T_{2n} = 3T_n + T_{n-1}.$$

Tot i que no és gens difícil demostrar-les analíticament, la Figura 2 ens dona *proves sense paraules* de les mateixes.

Una prova sense paraules de

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+1/2)}{3}, \tag{1}$$

es mostra a la Figura 3. No és difícil demostrar (1) usant inducció. Aquí la bellesa no està pas en en resultat, sinó en la prova visual. Les figures de la Figura 4 demostren el Teorema de Pitàgores ja que la suma de les àrees dels quadrats vermells coincideix

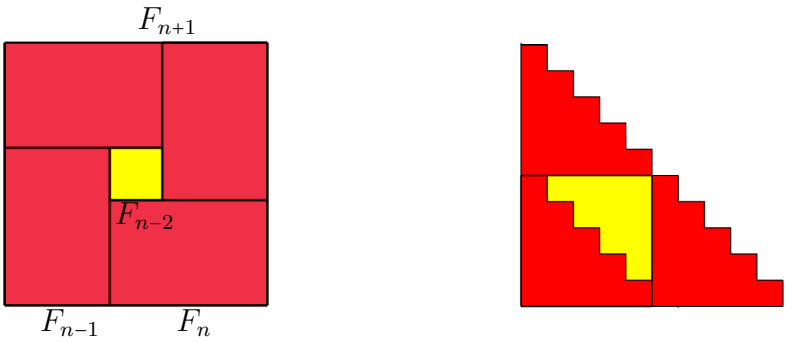

Figura 2. Números de Fibonacci i números triangulars.

amb la del quadrat blau, és a dir $a^2 + b^2 = c^2$, on a i b són els costats d'un triangle rectangle que formen angle recte i c és la seva hipotenusa.

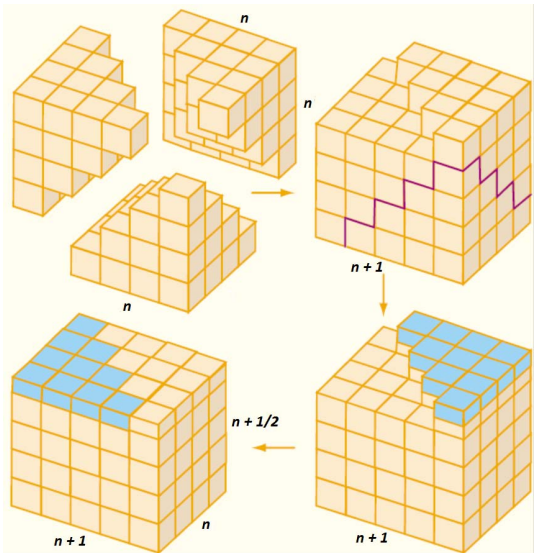

Figura 3. Suma dels quadrats.

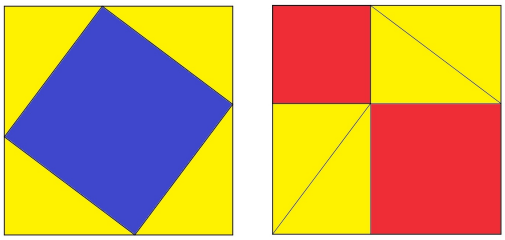

Figura 4. Teorema de Pitàgores.

1.8. **Ternes pitagòriques i números de Fibonacci.** Una terna pitagòrica és una tripleta d'enters positius a, b, c que compleixen $a^2+b^2 = c^2$, és a dir que són els costats d'un triangle rectangle. Euclides ja va demostrar que totes les ternes pitàgoriques

primitives (és a dir, tals que a, b i c no tenen cap divisor comú més gran que 1) venen donades per

$$a = u^2 - v^2, \quad b = 2uv, \quad c = u^2 + v^2, \tag{2}$$

amb u i v enters positius, $u > v$, coprimers i els dos no senars a la vegada. La més coneguda és $3^2 + 4^2 = 5^2$ i correspon a $u = 2$ i $v = 1$. Anem a demostrar-ho seguint [87].

Una primera observació és que els números a i b han de tenir diferent paritat, i a més c ha de ser senar. Observem, per exemple, que si c fos parell, aleshores $c^2 = a^2 + b^2$ hauria de ser divisible per 4, però si a i b fossin els dos senars, és a dir $a = 2k + 1$ i $b = 2\ell + 1$, aleshores $a^2 + b^2 = 4(k^2 + k + \ell^2 + \ell) + 2$, que no és divisible per 4. Així suposarem, sense pèrdua de generalitat que b és parell, i a i c senars.

Escrivim $b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$. Com que c i a són primers entre si, i els dos senars, l'únic divisor comú entre $c + a$ i $c - a$ és 2. En altres paraules, $(c + a)/2$ i $(c - a)/2$ són naturals positius i primers entre sí. Per tant tenim la igualtat

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{c+a}{2}\right)\left(\frac{c-a}{2}\right).$$

Finalment, com que $b/2 \in \mathbb{N}$ i $(c+a)/2$ i $(c-a)/2$ no tenen factors en comú, la igualtat anterior força que ambdós números siguin també quadrats. Així, $(c + a)/2 = u^2$ i $(c - a)/2 = v^2$, amb $u, v \in \mathbb{N}$. Operant, $c = u^2 + v^2$, $a = u^2 - v^2$ i $b^2 = 4u^2v^2$, com volíem demostrar.

A partir de (2) és trivial trobar ternes pitagòriques amb números de Fibonacci, o amb altres nombres. Seguint [7, 85] anem a donar un parell de casos elegants.

Si prenem $u = F_{n+1}$, $v = F_n$ i usem que $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ obtenim

$$\left(F_{n+1}^2 - F_n^2\right)^2 + \left(2F_nF_{n+1}\right)^2 = F_{2n+1}^2.$$

La següent prova de que $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$ és també força enginyosa. És senzill demostrar per inducció que

$$M^n := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Per tant, com que $M^{2n} = M^n M^n$, tenim que

$$\begin{pmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Fent el producte de matrius i igualant l'element de la primera fila i la primera columna tenim que $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$, tal i com volíem provar.

Si eliminen la condició $F_0 = 0, F_1 = 1$ dels números de Fibonacci obtenim uns números diferents, que denotarem per f_n i anomenarem números de fibonacci generalitzats. Per exemple, prenent $F_0 = 2, F_1 = 1$ obtenim els números de Lucas: $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots$

La segona terna pitagòrica que presentem involucra 4 números de fibonacci generalitzats consecutius f_n, f_{n+1}, f_{n+2} i f_{n+3} i és

$$\left(f_nf_{n+3}\right)^2 + \left(2f_{n+1}f_{n+2}\right)^2 = \left(f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2\right)^2.$$

Els 4 números es poden escriure com $u - v, v, u, u + v$ i el resultat s'obté de nou a partir de la igualtat $\left(u^2 - v^2\right)^2 + \left(2uv\right)^2 = \left(v^2 + u^2\right)^2$.

1.9. **El sorprenent Ramanujan.** Fermat va afirmar el 1637 que per a $2 < n \in \mathbb{N}$, l'equació $x^n + y^n = z^n$ no tenia solucions enteres no nul·les. La demostració d'aquest resultat per a $n = 3$ s'atribueix a Euler, tot i que el seu primer intent de provar-ho tenia errades, ja que aquestes es podien corregir usant resultats seus posteriors. La prova pel cas general ha hagut d'esperar fins els treballs de Wiles publicats el 1995. Per altra banda, és ben conegut que l'equació de Fermat per a $n = 3$ té solucions dins de $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ amb d un enter lliure de quadrats, veure [16]. Per exemple,

$$\left(64 + 8\sqrt{85}\right)^3 + \left(77 + 7\sqrt{85}\right)^3 = \left(93 + 9\sqrt{85}\right)^3.$$

Com veurem, aquesta relació tindrà el seu paper en el que segueix.

Demostrem a continuació un resultat de Ramananujan que ens proporciona infinites solucions enteres de cadascuna de les dues petites modificacions de l'equació de Fermat per a $n = 3$,

$$x^3 + y^3 = z^3 + 1, \qquad x^3 + y^3 = z^3 - 1, \tag{3}$$

veure [90, p. 341]. Com succeeix en molts resultats d'aquest matemàtic, tant o més meritori és l'enunciat del que es vol demostrar, com la prova en si. La seva gran intuïció encara no ha estat del tot compresa. Sembla ser que Hardy, com també veurem a la Secció 10.1 era amant dels rankings, n'havia fet un, puntuant entre 0 i 100 a alguns matemàtics contemporanis, basant-se en el seu talent. Segons aquesta classificació Hardy es va donar a si mateix un 25, al seu amic Littlewood un 30, a Hilbert un 80 i a Ramanujan un 100.

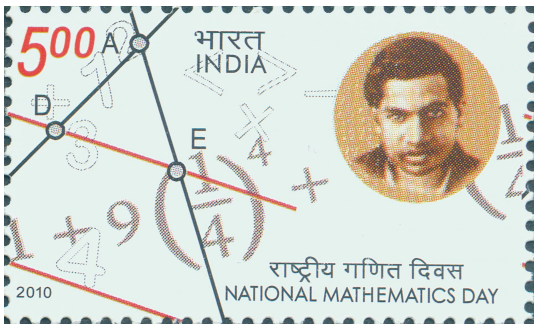

Figura 5. Srinivasa Ramanujan (1887-1920).

El treball [52] especula sobre com podria haver obtingut Ramanujan el següent resultat: Si considerem les funcions

$$\frac{1 + 53x + 9x^2}{1 - 82x - 82x^2 + x^3} = 1 + 135x + 11161x^2 + 926271x^3 + O(x^4) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n,$$

$$\frac{2 - 26x - 12x^2}{1 - 82x - 82x^2 + x^3} = 2 + 138x + 11468x^2 + 951690x^3 + O(x^4) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n,$$

$$\frac{2 + 8x - 10x^2}{1 - 82x - 82x^2 + x^3} = 2 + 172x + 14258x^2 + 1183258x^3 + O(x^4) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n,$$

aleshores $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{N}^3$ i

$$a_n^3 + b_n^3 = c_n^3 + (-1)^n. \tag{4}$$

En general, es diu que cadascuna de les funcions racionals és la funció generadora de la corresponent successió, que com veurem segueix una recurrència lineal. Calculem, per exemple, la successió $\{a_n\}$. Eliminant el denominador obtenim que

$$\begin{aligned}1+53x+9x^2 &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n - 82\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} - 82\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+2} + \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+3}\\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 - 82a_0 x - 82a_1 x^2 - 82a_0 x^2 + \sum_{n\geq 0}\big(a_{n+3} - 82a_{n+2} - 82a_{n+1} + a_n\big)x^{n+3}.\end{aligned}$$

Per tant, igualant els coeficient de tots els x^k obtenim que $\{a_n\}$ satisfà:

$$a_{n+3} = 82a_{n+2} + 82a_{n+1} - a_n, \quad \text{amb} \quad a_0 = 1,\ a_1 = 135,\ a_2 = 11161.$$

De manera semblant,

$$\begin{aligned}b_{n+3} &= 82b_{n+2} + 82b_{n+1} - b_n, \quad \text{amb} \quad b_0 = 2,\ b_1 = 138,\ b_2 = 11468,\\ c_{n+3} &= 82c_{n+2} + 82c_{n+1} - c_n, \quad \text{amb} \quad c_0 = 2,\ c_1 = 172,\ c_2 = 14258.\end{aligned}$$

En particular $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{N}^3$. A més, com que les arrels de $y^3 - 82y^2 - 82y + 1$ són $\lambda = (83 + 9\sqrt{85})/2$, $1/\lambda = (83 - 9\sqrt{85})/2$ i -1, aplicant la teoria general de resolució d'equacions en diferències lineals ([33]) tenim que les successions s'expressen com

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{85}\left(\alpha_+\lambda^n + \alpha_-\lambda^{-n} - 43(-1)^n\right), \quad \alpha_\pm = 64 \pm 8\sqrt{85},\\ b_n &= \frac{1}{85}\left(\beta_+\lambda^n + \beta_-\lambda^{-n} + 16(-1)^n\right), \quad \beta_\pm = 77 \pm 7\sqrt{85},\\ c_n &= \frac{1}{85}\left(\gamma_+\lambda^n + \gamma_-\lambda^{-n} - 16(-1)^n\right), \quad \gamma_\pm = 93 \pm 9\sqrt{85}.\end{aligned}$$

Càlculs tediosos mostren que les expressions obtingudes satisfan (4). Per exemple, en aixecar al cubs les expressions i substituir a $x^3 + y^3 = z^3$ els coeficients de λ^{3n} coincideixen degut a que la igualtat (3) és $\alpha_+^3 + \beta_+^3 = \gamma_+^3$. Observem, que s'obtenen infinites relacions del tipus

$$11161^3 + 11468^3 = 14258^3 + 1, \quad 926271^3 + 951690^3 = 1183258^3 - 1.$$

2. Nombres reals

2.1. **Els primers dígits de π.** Les dues igualtats següents es poden obtenir fàcilment calculant primitives i aplicant la regla de Barrow,

$$0 < \int_0^1 \frac{(3x^2-1)^2}{1+x^2}\,dx = 4(\pi - 3), \quad 0 < \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx = \frac{22}{7} - \pi, \tag{5}$$

i impliquen que $3 < \pi < \frac{22}{7}$, vegeu també [27]. Per exemple,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(3x^2-1)^2}{1+x^2}\,dx &= \int_0^1 \left(9x^2 - 15 + \frac{16}{1+x^2}\right)dx\\ &= \left(3x^3 - 15x + 16\arctan(x)\right)\Big|_0^1 = 3 - 15 + 4\pi = 4(\pi - 3).\end{aligned}$$

N'hi ha moltes de semblants, i han estat usades en diferents treballs per a obtenir algoritmes per aproximar π, consulteu [4, 28, 41, 68, 69, 78].

La segona d'elles també permet conèixer fàcilment els primers dígits de π, ja que per $x \in [0,1]$,

$$\frac{x^4(1-x)^4}{2} \leq \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \leq x^4(1-x)^4$$

i $\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x = 1/630$. Per tant,

$$3.1412\ldots = \frac{3958}{1260} = \frac{22}{7} - \frac{1}{630} < \pi < \frac{22}{7} - \frac{1}{1260} = \frac{3959}{1260} = 3.1420\ldots. \tag{6}$$

Un cop trobada una aproximació de π, aquesta es pot millorar usant, per exemple, el procediment proposat a [99]. Aquest ens diu que si P és una aproximació de π, correcta fins la xifra decimal k-èssima, aleshores $P+\sin(P)$ és correcta fins la xifra decimal $3k$-èssima. No es pot negar que aquest resultat té un cert encant, tot i que essent justos és una mica truculent ja que usar la funció sinus comporta, de manera implícita, el coneixement de π. Altres vies més naturals per a trobar més dígits de π es poden consultar, per exemple, a [40]. En qualsevol cas, si $P=3$, tenim que $3+\sin(3)\approx 3.1411$. De manera semblant, $Q = 3.141+\sin(3.141)\approx 3.141592653555$, i $|Q-\pi|<4\times 10^{-11}$. Per a veure per què el mètode funciona podem aplicar la fórmula de Taylor a $f(x)=x+\sin(x)$ a $x=\pi$. Tenim que

$$x+\sin(x) = \pi - \frac{\cos(s_x)}{6}(x-\pi)^3,$$

ja que $f(\pi)=\pi$, $f'(\pi)=f''(\pi)=0$ i $f'''(x)=-\cos(x)$, on s_x està entre x i π. Per tant, per a $x=P$,

$$|P+\sin(P)-\pi| \le \frac{|P-\pi|^3}{6},$$

tal com s'afirma a [99]. Iterant el procés s'obté que la successió recurrent $P_{n+1} = P_n+\sin(P_n)$, amb $P_0=P$, convergeix cúbicament cap a π.

2.2. **La irracionalitat d'**e. Reproduïm a continuació la prova de Fourier. Si definim $S_n = \sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}$, aleshores

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}.$$

Per tant, com que per a $j\ge 1$, $n!/(n+j)!\le 1/(n+1)^j$, amb igualtat només per a $j=1$,

$$\mathrm{e}-S_n = \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m!} = \frac{1}{n!}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{n!}{m!} = \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+j)!} < \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^j} = \frac{1}{n!}\frac{\frac{1}{(n+1)}}{1-\frac{1}{(n+1)}} = \frac{1}{n!n}.$$

Prenent $n=2$, obtenim

$$2<\mathrm{e}<\frac{11}{4}<3.$$

Suposem, per tal d'arribar a contradicció que $\mathrm{e}=p/q\in\mathbb{Q}$. Observem primer que $q\ge 2$ ja que $2<\mathrm{e}<3$ i per tant e no pot ser enter. Si prenem la desigualtat anterior per a $n=q$, s'obté

$$S_q < \mathrm{e} = \frac{p}{q} < S_q + \frac{1}{q!q}.$$

Multiplicant-la per $q!$ tenim que

$$q!S_q < q!\mathrm{e} = q!\frac{p}{q} = (q-1)!p < q!S_q + \frac{1}{q} < q!S_q + 1.$$

Com que $q!S_q$ és enter obtenim que $(q-1)!p$ és un enter situat entre dos enters consecutius, fet que ens dona la contradicció buscada.

Usant la fórmula de Taylor, hi ha una manera alternativa d'obtenir una fita de $\mathrm{e} - S_n$, ja que

$$\mathrm{e} = S_n + \frac{\mathrm{e}^{s_n}}{(n+1)!}, \quad s_n \in [0,1],$$

i per tant $S_n < \mathrm{e} < S_n + 3/(n+1)!$. A partir d'aquestes desigualtats es pot obtenir, de manera semblant, una contradicció.

2.3. **La irracionalitat de π.** Reproduïm a continuació la demostració de que π no és racional deguda a Niven ([79]). Suposem, per tal d'arribar a contradicció, que $\pi = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Aleshores considerem el polinomi

$$f(x) = \frac{x^n(p-qx)^n}{n!} = \frac{F(x)}{n!} = \frac{\sum_{\ell=n}^{2n} c_\ell x^\ell}{n!},$$

per un cert $n \in \mathbb{N}$ que fixarem més endavant i certs $c_j \in \mathbb{Z}$ que no cal especificar.

Introduïm el polinomi

$$G(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x). \tag{7}$$

Com que $G''(x) + G(x) = f(x)$, es compleix que

$$\Big(G'(x)\sin(x) - G(x)\cos(x)\Big)' = G''(x)\sin(x) + G(x)\sin(x) = f(x)\sin(x),$$

i com a conseqüència,

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \Big(G'(x)\sin(x) - G(x)\cos(x)\Big)\Big|_0^\pi = G(0) + G(\pi).$$

Provem a continuació que $G(0) + G(\pi) \in \mathbb{Z}$. Comencem veient que per a tot $j \in \mathbb{N}$, $f^{(j)}(0) \in \mathbb{Z}$ i $f^{(j)}(\pi) \in \mathbb{Z}$. És clar que per $j < n$ i $j > 2n$, $F^{(j)}(0) = f^{(j)}(0) = 0$. Per $n \le j \le 2n$, tenim que

$$f^{(j)}(0) = \frac{F^{(j)}(0)}{n!} = \frac{j!}{n!}c_j \in \mathbb{Z}.$$

Per simetria, és fàcil veure que $f(x) = f\big(\frac{p}{q} - x\big)$. Derivant successivament aquesta igualtat obtenim que $f^{(j)}(x) = (-1)^j f^{(j)}\big(\frac{p}{q} - x\big)$ i per tant

$$f^{(j)}(\pi) = f^{(j)}\Big(\frac{p}{q}\Big) = (-1)^j f^{(j)}(0) \in \mathbb{Z}.$$

Avaluant l'expressió (7) a $x = 0$ i a $x = \pi$, i utilitzant el que acabem de provar obtenim que $G(0) + G(\pi) \in \mathbb{Z}$.

Per tant,

$$0 < I_n := \int_0^\pi f(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{Z}.$$

Demostrarem, per acabar, que per n prou gran I_n és menor que 1, obtenint la contradicció desitjada. Com que

$$0 < I_n = \int_0^\pi \frac{\big(x(p-qx)\big)^n}{n!}\sin(x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^\pi \frac{1}{n!}\Big(\frac{q^2}{4p}\Big)^n\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n!}\Big(\frac{q^2}{4p}\Big)^n,$$

el $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ i s'arriba al resultat.

2.4. **Una regularitat a** e**.** L'expressió en fracció contínua de e té una regularitat que és a la vegada fascinant i intrigant. Aquesta no sembla ser la situació per π, veure [63].

Recordem que, donat un nombre real x, es pot construir una successió de fraccions de la forma

$$a_0,\ a_0+\frac{1}{a_1},\ a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}},\ a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}},a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}},a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4}}}},\dots$$

amb $a_0\in\mathbb{Z}$, $a_i\in\mathbb{N}$, tendeixen a x. Aleshores, escrivim

$$x=[a_0,a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,\dots]$$

i les fraccions que aproximen x, $p_n/q_n=[a_0,a_1,a_2,\dots,a_n]$ es diuen convergents. Aquest resultat s'engloba dins de la anomenada *teoria de les fraccions contínues*, vegeu [49, 93]. Per exemple, es pot veure que un nombre és racional si, i només si la seva fracció contínua és finita. A més, pels números irracionals, la fracció contínua és única, mentre que pels racionals, degut a que $[a_0,a_1,a_2,a_3,\dots,a_{n-1},a_n,1]=[a_0,a_1,a_2,a_3,\dots,a_{n-1},a_n+1]$, n'hi ha dues de diferents, tot i que per conveni, s'agafa la segona.

Vegem com calcular els primers $a_0,a_1,a_2,\dots$ quan $x=\mathrm{e}$: a_0 és la part no decimal de e és a dir $a_0=2$; a_1 és la part no decimal de $\frac{1}{\mathrm{e}-a_0}=\frac{1}{0.71828\dots}=1.392\dots$, és a dir $a_1=1$; a_2 és la part no decimal de $\frac{1}{1.392\cdots-1}=2.549\dots$, $a_2=2$; a_3 és la part no decimal de $\frac{1}{2.549\cdots-2}=1.819\dots$, $a_3=1$; i així successivament. De fet, obtenim

$$\mathrm{e}=[2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,1,\dots],$$

és a dir, sembla que hi ha una regla clara. Seguint el treball [20], inspirat en els resultats d'Hermite, demostrarem que

$$\mathrm{e}=[1,0,1,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,\dots,1,2m,1,\dots],\tag{8}$$

on, per estètica, hem substituït el primer 2 per

$$2=1+\frac{1}{0+\frac{1}{1}}=[1,0,1].$$

.

En aquest cas, la bellesa no està en la demostració, ja que com veurem necessita bastant esforç i càlcul, sinó en el resultat en sí. Per a ser més precisos, el que demostrarem és que

$$\mathrm{e}=[a_0,a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,\dots],$$

amb $a_{3i+1}=2i$ i $a_{3i}=a_{3i+2}=1$ per a tot $i\geq 0$.

Usarem com s'expressen els convergents d'un número p_m/q_m en termes dels a_m. De fet, les relacions següents són ben conegudes

$$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2},\qquad q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}.\tag{9}$$

La prova d'aquesta igualtat es pot fer, per exemple, per inducció. És clar que $p_0=a_0,q_0=1$, $p_1=a_0a_1+1$ i $q_1=a_1$. En aquest punt ens convindrà pensar que

l'expressió $[c_0, c_1, \dots, c_k]$ es pot definir de la mateixa manera, encara que el valor c_k no sigui natural. Així, en general,

$$\begin{aligned}\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} &= [a_0, a_1, \dots, a_{n+1}] = [a_0, a_1, \dots, a_n, a_n + 1/a_{n+1}]\\ &= \frac{(a_n + 1/a_{n+1})p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + 1/a_{n+1})q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} = \frac{a_{n+1}p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}q_n + q_{n-1}}.\end{aligned}$$

A més, de nou per inducció, $p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^n$ i per tant p_n i q_n són coprimers.

Aleshores, demostrar el que volem, és equivalent a veure que els convergents de e compleixen les recurrències

$$\begin{aligned} p_{3n} &= p_{3n-1} + p_{3n-2}, & q_{3n} &= q_{3n-1} + q_{3n-2},\\ p_{3n+1} &= 2np_{3n} + p_{3n-1}, & q_{3n+1} &= 2nq_{3n} + q_{3n-1},\\ p_{3n+2} &= p_{3n+1} + p_{3n}, & q_{3n+2} &= q_{3n+1} + q_{3n}, \end{aligned} \tag{10}$$

amb $p_0 = q_0 = p_1 = 1$ i $q_1 = 0$, i a més que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{p_m}{q_m} = \mathrm{e}. \tag{11}$$

Observi's que p_1/q_1 no està ben definit, però aquest fet no crea cap problema en tota l'argumentació.

El punt clau per acabar la prova és que si definim

$$A_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x,\ B_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x,\ C_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x,$$

es compleix, per a tot $n \geq 0$,

$$A_n = q_{3n}\mathrm{e} - p_{3n}, \quad B_n = p_{3n+1} - q_{3n+1}\mathrm{e}, \quad C_n = p_{3n+2} - q_{3n+2}\mathrm{e}.$$

Càlculs directes mostren que $A_0 = \mathrm{e}-1$, $B_0 = 1$ i $C_0 = 2-\mathrm{e}$. Aleshores, les recurrències (10) quedaran provades si es demostra que

$$A_n = -B_{n-1} - C_{n-1}, \quad B_n = -2nA_n + C_{n-1}, \quad C_n = B_n - A_n. \tag{12}$$

Per exemple,

$$\begin{aligned} p_{3n+2} - q_{3n+2}\mathrm{e} = C_n = B_n - A_n &= \big(p_{3n+1} - q_{3n+1}\mathrm{e}\big) - \big(q_{3n}\mathrm{e} - p_{3n}\big)\\ &= p_{3n+1} + p_{3n} - \big(p_{3n} + q_{3n+1}\big)\mathrm{e}. \end{aligned}$$

Per tant les dues darreres igualtats a (10) són conseqüència de la irracionalitat d'e, vegeu la secció 2.2.

La primera relació a (12) s'obté integrant entre 0 i 1 als dos costats de la igualtat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^n(x-1)^n}{n!}\mathrm{e}^x\right) = \frac{x^n(x-1)^n}{n!}\mathrm{e}^x + \frac{x^n(x-1)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^x + \frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!}\mathrm{e}^x.$$

Anàlogament, la segona és conseqüència de

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}\mathrm{e}^x\right) = \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!}\mathrm{e}^x + 2n\frac{x^n(x-1)^n}{n!}\mathrm{e}^x - \frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!}\mathrm{e}^x.$$

La darrera és directa.

Finalment és fàcil demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} C_n = 0.$$

Per exemple, per a $0 \le x \le 1$ es compleix que $0 \le x(1-x) \le 1/4$, i per tant,

$$|A_n| = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{n!} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \le \frac{1}{4^n n!} \int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}-1}{4^n n!},$$

que clarament tendeix a zero quan n creix. Per tant, com per $m \ge 2$, $q_m \ge 1$,

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \left| \frac{p_{3n}}{q_{3n}} - \mathrm{e} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|A_n|}{q_{3n}} \le \lim_{n\to\infty} |A_n| = 0.$$

Els altres límits p_{3n+k}/q_{3n+k} per a $k = 1, 2$ es poden fer de manera semblant i per tant (11) queda provat.

També és força curiós que, per a tot $k \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt[k]{\mathrm{e}} = [1, k-1, 1, 1, 3k-1, 1, 1, 5k-1, 1, 1, 7k-1, 1, 1, 9k-1, 1, \ldots, 1, (2m+1)k-1, 1, \ldots],$$

vegeu [82].

Per acabar, és interessant observar que si prenem el número d'or $\phi = (1+\sqrt{5})/2$, com que ϕ compleix $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, és a dir $\phi = 1 + 1/\phi$, substituint-lo recurrentment, obtenim que

$$\phi = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\ldots}}}} = [1, 1, 1, 1, \ldots].$$

Així, els seus convergents p_n/q_n donats a (9) satisfan

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2}, \qquad q_n = q_{n-1} + q_{n-2},$$

amb $p_0 = q_0 = q_1 = 1$ i $p_1 = 2$. Per tant, $p_n/q_n = F_{n+2}/F_{n+1}$, on recordem que F_n denota el n-èsim número de Fibonacci, veure la Secció 1.8. Així

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi.$$

Altres fórmules relacionades que es poden provar fàcilment per inducció són

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{2\phi - 1} = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} \quad \text{i} \quad \phi^n = F_n\phi + F_{n-1}. \tag{13}$$

La primera d'elles és coneguda com fórmula de Binet.

2.5. **Un número transcendent explícit.** Seguint la prova de Liouville, detallada a [71], veurem que el número

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = 0.110001\,000000\,000000\,000001\,000000\,000000\,\ldots$$

és transcendent. Es pot consultar també [80]. Recordem que un número β és diu algebraic de grau d si hi ha un polinomi irreductible a $\mathbb{Q}[x]$ amb coeficients enters,

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_d \ne 0, \tag{14}$$

tal que $P(\beta) = 0$. Per exemple, si prenem $\alpha_0 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, i $P(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ aleshores $P(\alpha_0) = 0$. Com que $P(x) = (x^2 - 5 + 2\sqrt{6})(x^2 - 5 - 2\sqrt{6})$, α_0 és algebraic de grau 4. Si un número real no és algebraic aleshores es diu que és transcendent.

És curiós observar que tot i que dins dels reals els números transcendents tenen mesura total, ja que els algebraics formen un conjunt numerable, no va ser fins aquest resultat de Liouville de 1844 que s'en va tenir un d'explícit.

Liouville va provar la caracterització dels números algebraics següent: Si β és un número algebraic de grau $d \geq 2$ aleshores existeix una constant $c = c(\beta)$ tal, que per a tot número racional $p/q, q > 0$, es compleix

$$\left|\beta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c(\beta)}{q^d}. \tag{15}$$

Per demostrar-la, prenem $P(x)$ com a (14) i tal que $P(\beta) = 0$. Sigui p/q un número racional qualsevol a $(\beta - 1, \beta + 1)$. Pel teorema del valor mitjà,

$$0 - P\left(\frac{p}{q}\right) = P(\beta) - P\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\beta - \frac{p}{q}\right) P'(s),$$

amb s entre β i p/q, i $P(p/q) \neq 0$, ja que P és irreductible a $\mathbb{Q}[x]$. Per tant,

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq \left|\beta - \frac{p}{q}\right| \max_{\{t \in [\beta-1, \beta+1]\}} |P'(t)| := \left|\beta - \frac{p}{q}\right| M(\beta).$$

Observi's que $M(\beta)$ és una constant positiva que només depèn de β. A més, com que $P \in \mathbb{Z}[x]$,

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{|a_d p^d + a_{d-1} p^{d-1} q + \cdots + a_1 p q^{d-1} + a_0 q^d|}{q^d} \geq \frac{1}{q^d}.$$

D'on obtenim que per a $p/q \in (\beta - 1, \beta + 1)$,

$$\left|\beta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{M(\beta) q^d}.$$

Per a $p/q \notin (\beta - 1, \beta + 1)$, trivialment, $|\beta - p/q| \geq 1 > 1/q^d$. Per tant, prenent $c(\beta) := \min(1, 1/M(\beta))$, arribem a (15) tal i com volíem provar.

Clarament α no és racional, ja que les seves xifres decimals no són periòdiques. Per a demostrar que α és transcendent, anem a veure que, per a tot $d \geq 2$ hi ha números racionals que no compleixen la caracterització de Liouville donada a (15) per a cap c.

Observem que

$$\alpha - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{10^{n!}} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} \leq \frac{1}{10^{(m+1)!}} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right) = \frac{1}{10^{(m+1)!}} \frac{10}{9}.$$

Per tant, els números racionals $p_m/q_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{10^{n!}} = p_m/10^{m!}$ satisfan

$$0 < \left|\alpha - \frac{p_m}{q_m}\right| \leq \frac{10/9}{q_m^{m+1}}.$$

Com a conseqüència, fixat $d \geq 2$, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix m_0 prou gran tal que per a $m > m_0$,

$$0 < \left|\alpha - \frac{p_m}{q_m}\right| \leq \frac{\frac{10}{9 q_m^{m+1-d}}}{q_m^d} < \frac{\varepsilon}{q_m^d},$$

desigualtat incompatible amb l'existència d'una constant $c = c(\alpha) > 0$ i un $d \geq 2$ independents de p/q tals que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^d}.$$

Aleshores α és transcendent tal i com volíem demostrar.

3. Geometria

3.1. **El Teorema de Viviani.** Aquest teorema va ser provat per Viviani al segle XVII. Afirma que si P és un punt interior d'un triangle equilàter aleshores la suma de les distancies de P als tres costats del triangle AB, BC i CA no depèn de P i val l'alçada h del triangle. Recordem que, si a és el costat del triangle, aleshores pel Teorema de Pitàgores, $h = \sqrt{3}a/2$.

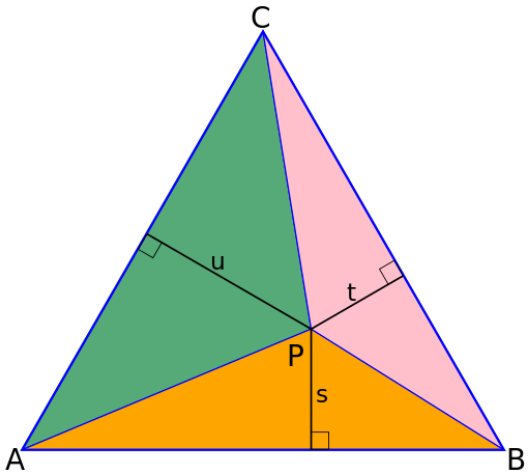

Figura 6. Teorema de Viviani: $s + t + u$ és constant.

La prova només usa que l'àrea d'un triangle és el producte de la base per alçada entre dos. Així, l'area total del triangle, $ah/2$, és igual a la suma de les àrees dels tres triangles en que es pot dividir, APB, BPC i CPA, vegeu la Figura 6. Aquestes àrees són $as/2$, $at/2$ i $au/2$. Per tant $s + t + u = h$, tal i com volíem veure.

3.2. **Càlcul d'Arquimedes del volum de l'esfera.** Calculem a continuació el volum d'una esfera seguint les idees d'Arquimedes. El que va usar en el seu temps, per un cas concret, és el que avui en dia coneixem com a principi de Cavalieri. Al seu torn, aquest principi és un cas molt particular del Teorema de Fubini.

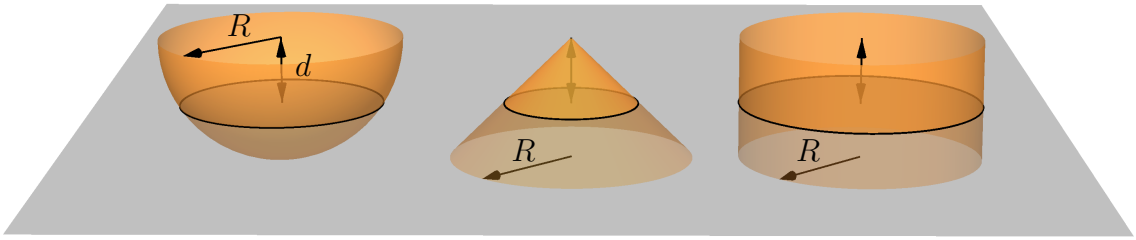

Figura 7. Volum de l'esfera.

Considerem la Figura 7. A l'esquerra tenim mitja esfera de radi R, al mig un con amb base de radi R i alçada també R i a la dreta un cilindre amb la mateixa base i la mateixa alçada. Si tallem les tres figures per un pla horitzontal, que està a distància d dels punts més alts de les tres figures, obtenim tres cercles. En el cas de l'esfera,

usant el Teorema de Pitàgores tenim un radi $\sqrt{R^2-d^2}$, en el cas del con un radi d i, en el del cilindre, un radi R. Per tant, les àrees de les 3 seccions, d'esquerra a dreta són: $S_{\text{esf}} := \pi(R^2-d^2)$, $S_{\text{con}} := \pi d^2$ i $S_{\text{cil}} = \pi R^2$. Així, es compleix $S_{\text{esf}} + S_{\text{con}} = S_{\text{cil}}$. Com a conseqüència,

$$\frac{\text{Volum de l'esfera}}{2} + \text{Volum del con} = \text{Volum del cilindre}.$$

Per tant, sabent com calcular el volum d'un con i d'un cilindre, ja podem calcular el volum V de l'esfera a partir de la igualtat anterior:

$$\frac{V}{2} + \frac{\pi R^3}{3} = \pi R^3.$$

Obtenim que $V = 4\pi R^3/3$.

3.3. **Quadrats i més quadrats.** No és senzill dividir un quadrat en un nombre finit de quadrats més petits, tots disjunts i diferents, vegeu [29, Cap. 2]. Aquestes construccions es poden relacionar amb el disseny de certes xarxes elèctriques, vegeu [12]. A l'esquerra de la Figura 8, donem un quadrat de mida 112×112 subdividit en 21 quadrats més petits i diferents, tots amb costats enters. Va ser trobat l'any 1978 per Duijvestijn i s'ha demostrat que és el més senzill possible amb aquestes característiques. El mateix problema però començant amb un rectangle té solucions més simples, vegeu de nou la mateixa figura, on es mostra un rectangle 33×32, trobat l'any 1925 per Moroń, dividit en 9 peces quadrades diferents, amb costats enters. També se sap que aquesta solució és minimal.

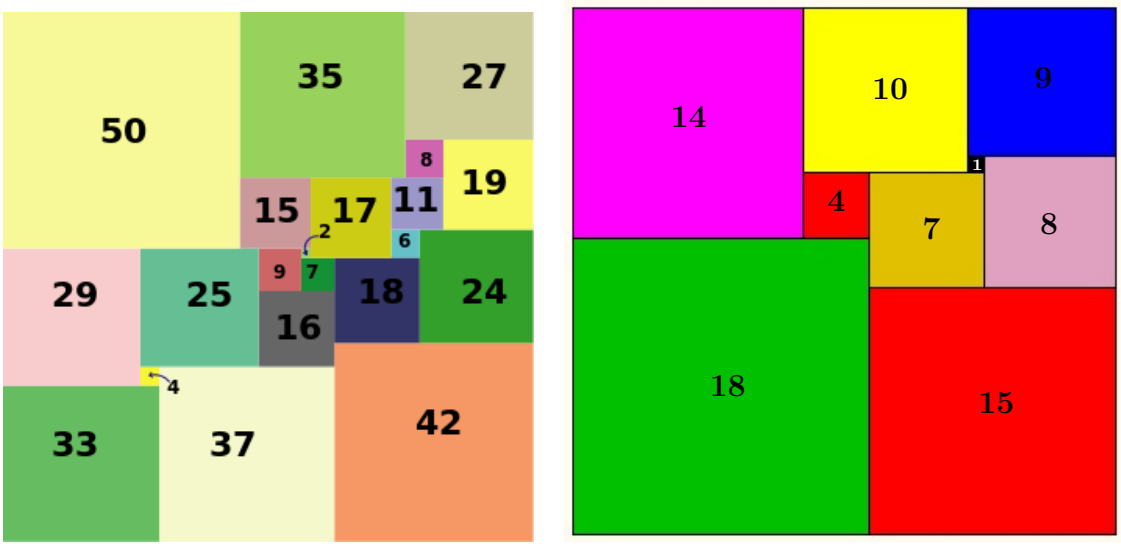

Figura 8. Quadrat i rectangle dividits en quadrats diferents.

El que és força curiós és que cap prisma rectangular amb costats sencers es pot dividir en un nombre finit de cubs més petits, tots diferents. Anem a provar-ho per reducció a l'absurd seguint [37, Cap. 17]. Suposem que sí que es pogués. Aleshores, per exemple la base de sota del prisma quedaria dividida en quadrats, tots amb costats diferents. Sigui Q_1, el quadrat més petit. Sobre aquest quadrat, el cub corresponent, C_1 és tal que tots els que l'envolten són més alts que ell mateix, vegeu

la Figura 9. Aleshores, la base de sobre d'aquest cub és un quadrat (de la mateixa mida que Q_1) de manera que les bases de tots els cubs que estan recolzats en ell el divideixen en quadrats més petits i tots diferents. De nou, n'hi ha un que és el més petit, diem-li Q_2. Podem raonar igual, començant ara amb la cara superior del cub C_2 que té com a base Q_2, i continuar aquest procés fins arribar a que hi hauria cubs de costat més petit que 1, en contradicció amb el que suposàvem.

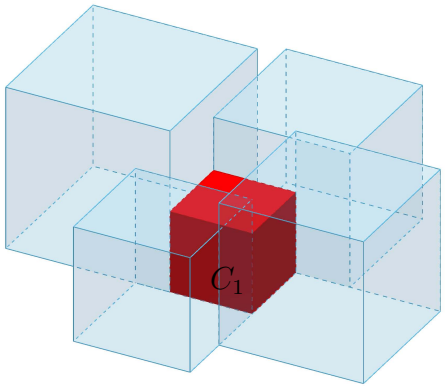

Figura 9. Impossibilitat de dividir un prisma rectangular en cubs diferents.

De fet, seguint un raonament semblant, també podem demostrar que cap prisma rectangular (independentment de les mides dels seus costats) es pot subdividir en un número finit de cubs, tots diferents encara que considerem, també, cubs amb costat no necessàriament enter.

3.4. **Estrelles.** Donada una estrella de cinc puntes qualsevol, anem a demostrar, seguint les idees de [38, Cap. 5], que la suma dels cinc angles que formen aquestes puntes és π. És a dir, que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \pi$, vegeu la Figura 10.

Comencem agafant un vector unitari, situat a un dels vèrtexs de l'estrella, paral·lel a un costat (vegeu el vector a la posició ⓪ en la Figura 11). Aleshores, el fem lliscar fins a la posició ①. A continuació, girem un angle $\pi - \alpha_3$ fins a estar a la posició ②. Fem el mateix, passant per les posicions ③, ④, ... fins arribar a ⑨ i finalment tornem a la posició ⓪. Per una banda, és clar que el vector ha fet dos voltes i per tant el seu gir total ha sigut de 4π radiants. Per altra banda, els angles que ha anat girant a cadascuna de les cinc puntes han sigut $\pi - \alpha_3$, $\pi - \alpha_5$, $\pi - \alpha_2$, $\pi - \alpha_4$ i $\pi - \alpha_1$. Per tant,

$$\big(\pi - \alpha_1\big) + \big(\pi - \alpha_2\big) + \big(\pi - \alpha_3\big) + \big(\pi - \alpha_4\big) + \big(\pi - \alpha_5\big) = 4\pi,$$

d'on es dedueix que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \pi$, tal i com volíem veure.

Clarament, usant la mateixa idea, es poden obtenir resultats similars en el cas de polígons o d'estrelles amb més puntes. Per exemple, en el cas d'un triangle tenim que $(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + (\pi - \alpha_3) = 2\pi$ i en el d'un quadrilàter convex $(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + (\pi - \alpha_3) + (\pi - \alpha_4) = 2\pi$. Per tant, pels triangles $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ i pels quadrilàters convexos, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi$. De fet, el resultat és cert per a tots els quadrilàters, com es pot veure, per exemple, dividint-los en dos triangles. Pels quadrilàters no

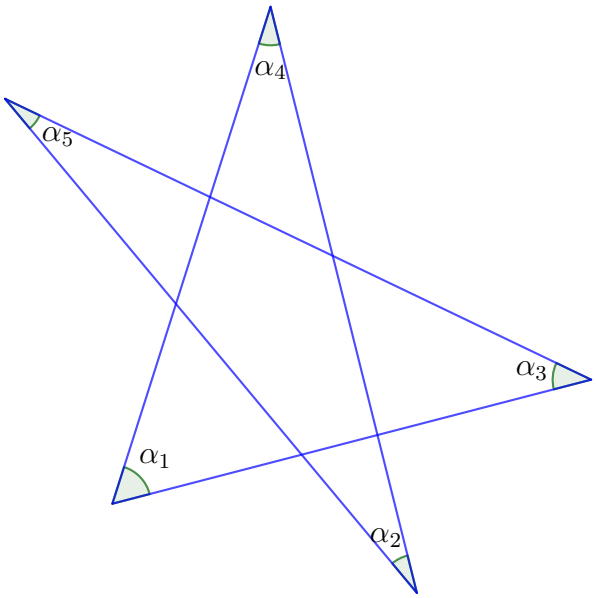

Figura 10. Estrella de cinc puntes: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \pi$.

convexos s'ha de modificar lleugerament aquest argument, però també es pot arribar al mateix resultat.

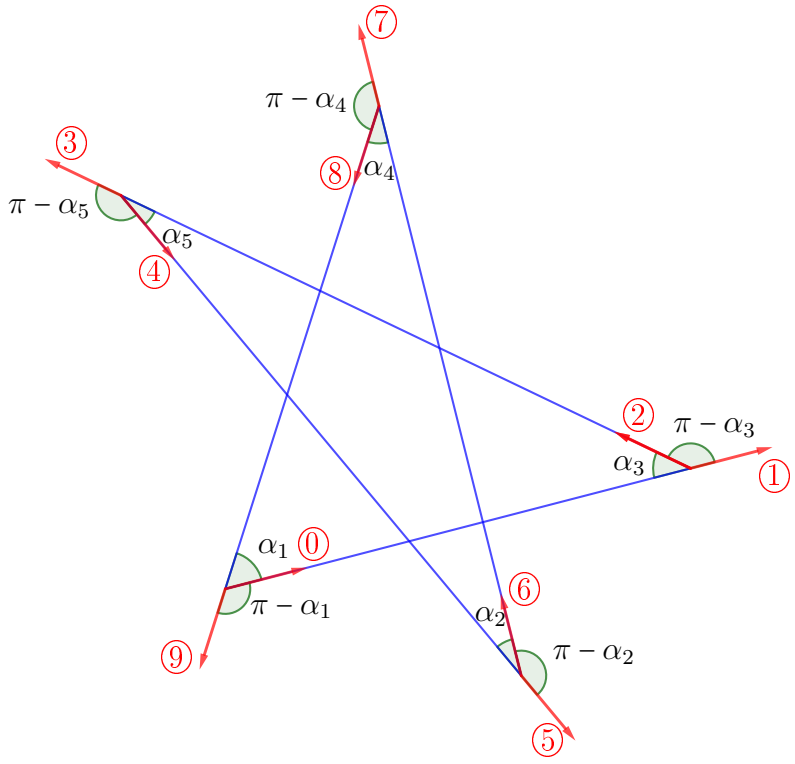

Figura 11. Estrella de cinc puntes.

3.5. **Posició de n punts al pla.** L'any 1893, en una columna de problemes matemàtics, J. J. Sylvester va proposar el següent problema: Demostrar que, donada

qualsevol distribució de $n \geq 3$ punts no alineats al pla, hi ha una linea que passa per només dos d'aquests punts. Vegeu un cas particular a l'esquema de l'esquerra de la Figura 12. Intuïtivament és clar que el resultat sembla cert, però en una primera aproximació sembla difícil de formalitzar una prova. En aquest cas, potser el més maco és com, amb una mica d'enginy, el problema esdevé ben formalitzat i senzill. La qüestió va ser proposada de nou per Erdös l'any 1943 com a problema 4065 al American Mathematical Monthly. Reproduïm a continuació la prova de Gallai de 1944 de que el resultat és cert, vegeu també [1, Cap. 9]. De fet, aquest es coneix avui en dia com a Teorema de Sylvester-Gallai.

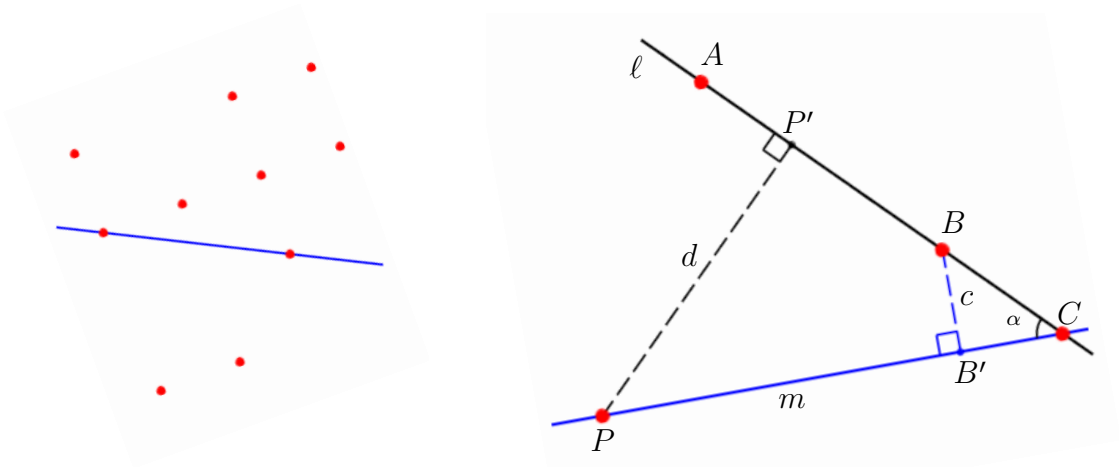

Figura 12. Problema de Sylvester.

Donada una recta que passa per dos punts qualssevol del conjunt de punts, hi ha uns quants punts que no són a la recta. Aleshores n'hi ha un (no té perquè ser únic) que és el més proper a aquesta recta. Com que fixats els n punts hi ha un número finit de rectes passant per dos d'aquests, hi ha sempre una recta ℓ i un punt P del conjunt de punts (de nou, no necessàriament únics) tals que la distància d de P a ℓ és la més petita possible. Sigui P' el punt de ℓ més proper a P, vegeu la construcció de la dreta de la Figura 12. Si a ℓ només hi ha dos punts del conjunt inicial de punts, ja hem acabat. Suposarem, per tal d'arribar a contradicció, que ℓ conté com a mínim 3 punts, que denotarem per A, B i C. A més, com a mínim dos d'ells (diem B i C), són a un mateix costat de $\ell \setminus \{P'\}$. Finalment, considerem la recta m que passa per C (el punt més allunyat de P' dels dos) i P. Sigui c la distància entre B i m. Com que els triangles rectangles $P'PC$ i $B'BC$ són semblants és fàcil veure que $c < d$, fet que contradiu la minimalitat de d.

3.6. **Arc capaç i molt més que Pitàgores.** Prenem dos punts A i B sobre una circumferència de manera que l'arc que formen és 2α. Aleshores, es pot demostrar que qualsevol punt C de la mateixa circumferència, i fora d'aquest arc, és tal que l'angle ACB és α, vegeu el gràfic de l'esquerra de la Figura 13. Es diu que els punts C formen *l'arc capaç* del segment AB amb angle α. Així, el segment AB és veu sota un mateix angle α des dels punts d'aquest arc capaç.

A més, els punts de l'arc capaç i els seus simètrics respecte de la recta AB, són els únics punts del pla des dels que el segment AB és veu sota aquest angle.

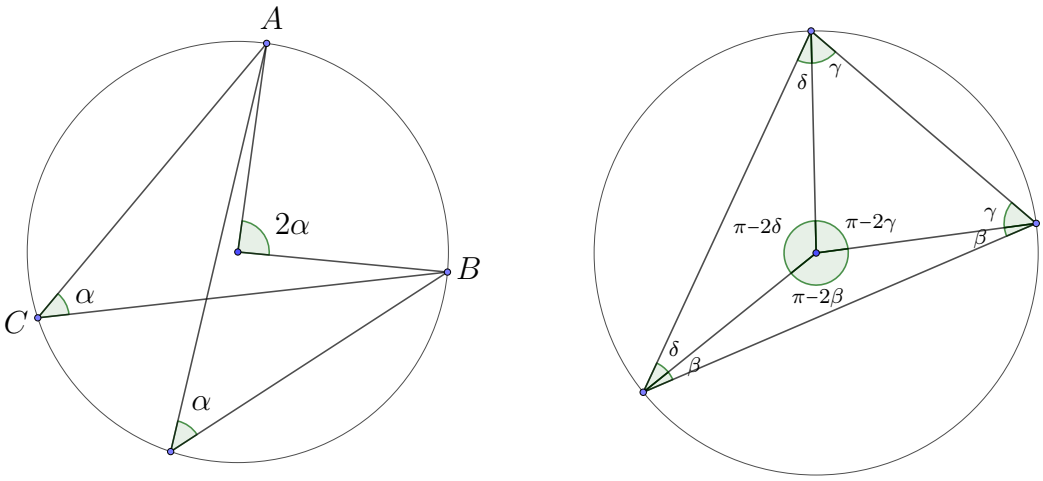

Figura 13. Arc capaç.

Per a demostrar les afirmacions anteriors fem la construcció de la dreta de la Figura 13. En aquesta figura suposem que el centre de la circumferència que passa pels tres punts és dins del triangle. El cas en que el centre és fora es pot tractar de manera semblant. En primer lloc, observem que dos costats de cadascun dels tres triangles petits són radis de la circumferència. Per tant tenim que els tres triangles són isòsceles i cadascun d'ells té dos angles iguals, que anomenarem β, γ i δ, respectivament. Per tant, sumant els tres angles que tenen com a vertex el centre de la circumferència obtenim

$$2\pi = (\pi - 2\beta) + (\pi - 2\gamma) + (\pi - 2\delta) = 3\pi - 2(\beta + \gamma + \delta).$$

Com a conseqüència $\pi - 2\gamma = 2(\beta + \delta)$ que és precisament el que volíem demostrar.

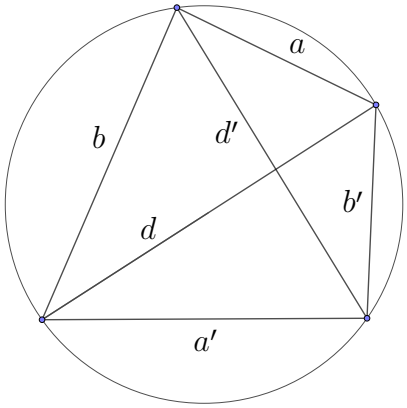

Figura 14. Teorema de Ptolemeu: $aa' + bb' = dd'$.

Usant arcs capaços anem a provar el Teorema de Ptolemeu, demostrat per aquest astrònom al segle II per a construir taules trigonomètriques, vegeu [18, Cap 10]. Aquest teorema afirma que per a un quadrilàter cíclic o inscrit, com el de la Figura 14, és a dir amb els quatre vèrtexs en una mateixa circumferència, es compleix $aa' + bb' = dd'$. Observi's que en el cas que el quadrilàter sigui un rectangle tenim que $a = a'$, $b = b'$, $d = d'$ i el teorema afirma que $a^2 + b^2 = d^2$, és a dir, el Teorema de Pitàgores.

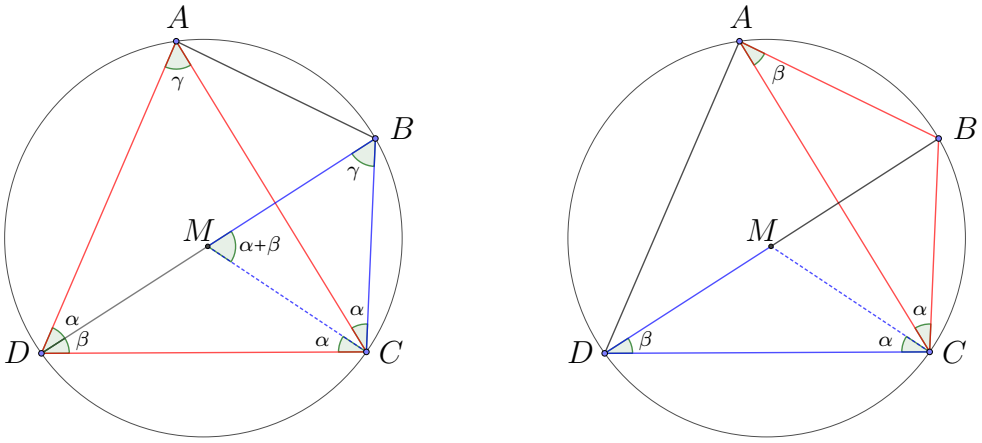

Figura 15. Prova del Teorema de Ptolemeu.

Demostrarem el Teorema de Ptolomeu seguint [77]. En primer lloc, considerem la construcció de l'esquerra de la Figura 15. Els angles ACB i ADB coincideixen ja els punts A i B que formen part de l'arc capaç del segment AB; els anomenarem α. De manera semblant els angles DAC i DBC son iguals i anomenem γ l'angle que formen. A continuació considerem el segment DB i busquem un punt M en aquest segment de manera que l'angle DCM sigui també α. Aleshores veiem que l'angle CMB és $\alpha + \beta$. Usant tots els angles esmentats arribem a que els triangles ACD i BCM són semblants i per tant

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|BM|}{|BC|},$$

on $|PQ|$ denota la longitud del segment que uneix P i Q. Raonant de manera semblant amb la construcció de la dreta, amb els triangles ABC i DMC, de la Figura 15 obtenim

$$\frac{|DC|}{|DM|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Finalment, expressant les igualtats anteriors en termes d'a, a', b, b', d, d', i anomenant $d_1 = |DM|$, $d_2 = |MB|$ tenim que

$$\frac{b}{d'} = \frac{d_2}{b'} \quad \text{i} \quad \frac{a'}{d_1} = \frac{d'}{a}.$$

Per tant $bb' = d_2 d'$ i $aa' = d_1 d'$. Com que $d = d_1 + d_2$, sumant les dues igualtats obtenim $aa' + bb' = dd'$.

A més, el Teorema de Ptolemeu, junt amb el famós teorema dels sinus, ens permet calcular el sinus d'una suma d'angles. Si a la figura de l'esquerra de la Figura 15 suposem que el segment DB passa pel centre de la circumferència aleshores els triangles ABD i CBD són ambdós rectangles. A més, si la longitud del segment és 1, aleshores $d = 1$, $a = |AB| = \sin(\alpha)$, $b = |DA| = \cos(\alpha)$, $a' = |DC| = \cos(\beta)$ i $b' = |CB| = \sin(\beta)$. Finalment, a partir del teorema dels sinus tenim que $d' = |AC| = \sin(\alpha+\beta)$, i el Teorema de Ptolemeu ens diu que

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) = \sin(\alpha+\beta).$$

Per acabar, anem a veure que per a quadrilàters convexos qualssevol (és a dir, no necessàriament inscrits en una circumferència) es compleix la coneguda com desigualtat de Ptolemeu, $dd' \le aa' + bb'$. Seguirem la prova de [3]. Per això, pensem el quadrilàter inclòs en el pla complex, $\mathbb{C}$, i considerem els quatre números complexos, u, v, w, z associats als quatre vèrtexs de la figura. Si denotem per $|s|$ la norma de $s \in \mathbb{C}$, tenim per exemple que $a = |v-w|$, $b = |u-v|$, $a' = |u-z|$, $b' = |w-z|$, $d = |u-w|$ i $d' = |v-z|$. És fàcil comprovar la següent identitat entre números complexos

$$(u-w)(v-z) = (v-w)(u-z) + (u-v)(w-z).$$

Així, si usem que $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ i $|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$ obtenim

$$\begin{aligned} dd' &= |u-w||v-z| = |(u-w)(v-z)| = |(v-w)(u-z) + (u-v)(w-z)| \\ &\le |v-w||u-z| + |u-v||w-z| = aa' + bb', \end{aligned}$$

tal i com volíem provar. Ja sabem que la igualtat es dona per a quadrilàters inscrits en una circumferència. Amb una mica més de feina es pot veure que aquest és l'únic cas d'igualtat.

3.7. **Fórmules d'Heró i Brahmagupta.** La fórmula que permet calcular l'àrea A d'un triangle en funció dels seus costats, a, b i c, s'atribueix a Heró d'Alexandria (segle I), tot i que hi ha autors que pensen que Arquimedes (segle III a. C.) ja la coneixia, veure [25, Cap. 3]. Aquest bonic resultat ens diu

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

on $s = (a+b+c)/2$.

Per a demostrar-la, seguint [88], dividim el triangle en dos triangles rectangles mitjançant una alçada, vegeu la Figura 16. Aplicant el Teorema de Pitàgores als dos triangles resultants tenim que $a^2 = h^2 + (c-d)^2$ i $b^2 = h^2 + d^2$. Restant les dues igualtats obtenim que $a^2 - b^2 = c^2 - 2cd$ i per tant, $d = (-a^2+b^2+c^2)/(2c)$. Finalment, substituint aquest valor de d a la segona igualtat tenim

$$\begin{aligned} h^2 = b^2 - d^2 &= b^2 - \left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}\right)^2 = \frac{(2bc)^2 - (-a^2+b^2+c^2)^2}{4c^2} \\ &= \frac{\big(2bc - a^2 + b^2 + c^2\big)\big(2bc + a^2 - b^2 - c^2\big)}{4c^2} = \frac{\big((b+c)^2 - a^2\big)\big((a^2 - (b-c)^2\big)}{4c^2} \\ &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4c^2}, \end{aligned}$$

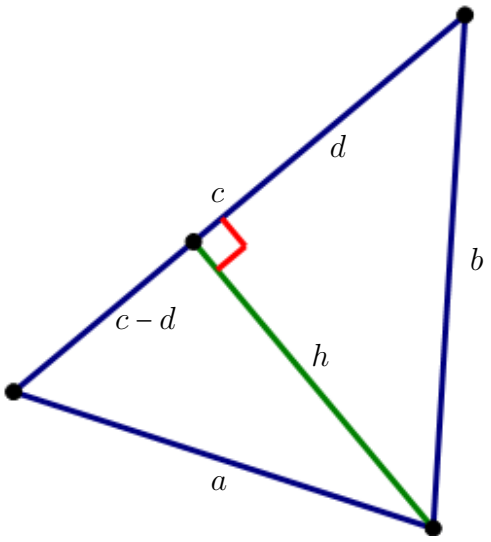

Figura 16. Prova de la fórmula d'Heró.

on hem usat varies vegades $u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$. Per tant

$$A = \frac{ch}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)},$$

tal com volíem veure.

Hi ha altres maneres d'expressar l'àrea d'un triangle que són equivalents a la fórmula d'Heró. No detallarem el passos per veure-ho, tot i que no són gens evidents. Una d'elles és

$$16A^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

De fet, la matriu de la que s'ha de calcular el determinant s'anomena matriu de Cayley-Menger i té una versió ampliada que permet calcular el volum de prismes n-dimensionals en funció de les seves arestes, vegeu per exemple [9].

L'altra manera, en lloc de donar l'àrea en termes dels costats del triangle, la dona en termes de les coordenades dels seus punts. Així, si els tres vèrtexs són (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$,

$$4A^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2.$$

Abans de passar als quadrilàters, farem una "deducció" heurística de com hauria de ser la fórmula més senzilla que pogués donar A en termes d'a, b i c, retrobant, sense càlculs, la fórmula d'Heró, veure [60]. Per això, començarem amb una llista de propietats que ha de complir la funció que ens doni l'àrea al quadrat, $\psi(a, b, c)$:

- Quan els tres punts estan alineats l'àrea és zero, és a dir $\psi(b + c, b, c) = \psi(a, a + c, c) = \psi(a, b, a + b) = 0$.
- La funció ψ és simètrica, és a dir $\psi(a, b, c) = \psi(a, c, b) = \ldots = \psi(c, b, a)$.
- La funció és homogènia de pes 4, és a dir, $\psi(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda^4 \psi(a, b, c)$, per a tot $\lambda > 0$, ja que l'àrea és homogènia de pes 2.
- L'àrea al quadrat del triangle equilàter de costat 1 és 3/16.

La funció més senzilla que compleix la llista de propietats és

$$\psi(a,b,c) = \frac{1}{16}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$$

que correspon precisament al resultat d'Heró.

Hi ha una fórmula similar per a calcular l'àrea S d'un quadrilàter inscrit en una circumferència en funció dels seus quatre costats, a, b, c i d, vegeu la Figura 17. Es deguda a Brahmagupta (segle VII) i és

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)} \\ &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \end{aligned}$$

on $s = (a+b+c+d)/2$.

Clarament, la fórmula d'Herò es dedueix d'aquesta prenent $d = 0$, però el que farem ara és precisament el contrari. Seguint [50], la demostrarem a partir de la fórmula d'Heró.

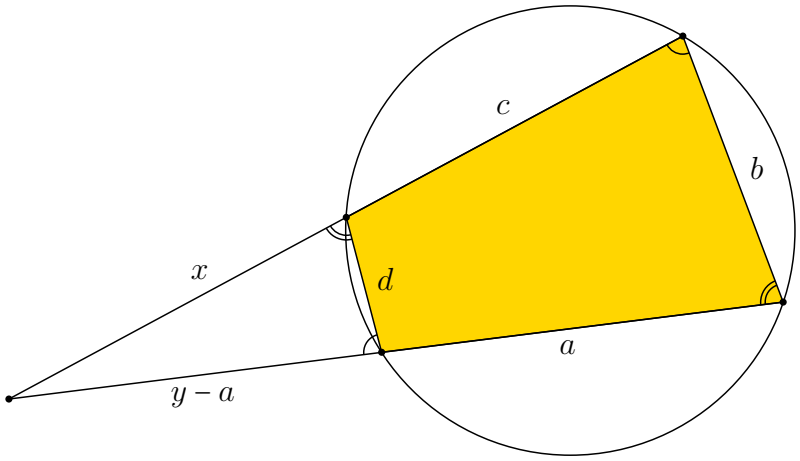

Figura 17. Prova de la fórmula de Brahmagupta.

Per a provar la fórmula de Brahmagupta ens podem restringir al cas en què el quadrilàter no és un rectangle (sinó, és trivialment certa) i podem suposar que estem en la situació de la Figura 17. Usant un cop més les propietats dels arcs capaços, consulteu la Secció 3.6, no és difícil provar que la suma de dos angles interns i oposats en un quadrilàter cíclic és π. Per tant, els dos triangles de la Figura 17 són semblants i es compleix

$$\frac{x}{y} = \frac{y-a}{x+c} = \frac{d}{b} =: \lambda < 1. \tag{16}$$

Així, l'àrea que busquem és $S = A_g - A_p$, on A_g i $A_p = \lambda^2 A_g$ són les àrees dels triangles gran i petit de la mateixa figura. Com que els costats del triangle gran són $x+c, y$ i b, utilitzant la fórmula d'Heró, $A_g = \sqrt{F_1F_2F_3F_4}/4$, on $F_1 = x+c+y+b$, $F_2 = -x-c+y+b$, $F_3 = x+c-y+b$ i $F_4 = x+c+y-b$. Observem, que usant (16),

tenim que

$$(1-\lambda)F_1 = (1-\lambda)(x+c+y+b) = x+c+y+b-(y-a+x+d) = a+b+c-d,$$
$$(1+\lambda)F_2 = (1+\lambda)(-x-c+y+b) = -x-c+y+b+(-y+a+x+d) = a+b-c+d,$$
$$(1+\lambda)F_3 = (1+\lambda)(x+c-y+b) = x+c-y+b+(y-a-x+d) = -a+b+c+d,$$
$$(1-\lambda)F_4 = (1-\lambda)(x+c+y-b) = x+c+y-b-(y-a+x-d) = a-b+c+d.$$

Per tant,

$$S = A_g - \lambda^2 A_g = (1-\lambda^2)A_g = \frac{1}{4}\sqrt{\big((1-\lambda)F_1\big)\big((1+\lambda)F_2\big)\big((1+\lambda)F_3\big)\big((1-\lambda)F_4\big)}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}\,,$$

tal i com volíem provar.

Hi ha extensions d'aquestes fórmules per a polígons amb més costats, també inscrits en una circumferència, vegeu per exemple [92].

Per a quadrilàters generals és impossible que hi hagi una fórmula que doni la seva àrea només en funció dels costats, ja que aquests són figures deformables sense canviar les mides dels costats (pensem per exemple un quadrilàter fet amb quatre peces de "Meccano"). Per exemple, fixada la mida dels costats d'un quadrilàter, aquest es pot deformar de manera que tingui àrea tan petita com es vulgui. L'any 1842, Bretschneider va donar una fórmula per quadrilàters convexos que involucra també dos angles interiors oposats del quadrilàter, que anomenarem com α i γ. La fórmula diu que

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)},$$

vegeu per exemple [39, 86]. Observem que si considerem els altres dos angles oposats la seva suma seria $2\pi-(\alpha+\gamma)$ i el resultat no varia. Recordem també que per als quadrilàters cíclics $\alpha+\gamma=\pi$ i, per tant, aquesta formula coincideix amb la de Brahmagupta. Hi ha versions equivalents de la mateixa fórmula canviant els angles per les diagonals del quadrilàter ([23]).

3.8. **El miracle de Morley.** El Teorema de Morley és un resultat general sobre triangles, descobert el 1899 pel matemàtic anglo/nord-americà Frank Morley i en alguns llocs apareix referenciat com el miracle de Morley. Ens diu que, si trisequem el tres angles d'un triangle i considerem els primers punts de tall dins del triangle de les trisectrius contigües, el tres punts obtinguts formen un triangle equilàter, vegeu la Figura 18. També podeu gaudir d'una il·lustració més artística en un dels quadres dedicats a les matemàtiques fets als anys 60 per Crokett Johnson, exposats a la pàgina web del Smithsonian (National Museum of American History, USA).

Hi ha moltes proves d'aquest resultat, algunes purament geomètriques, altres basades en càlculs trigonomètrics o en eines purament algebraiques, vegeu [11]. Presentarem una de les més senzilles, extreta de [109], en la que només s'usen eines elementals de geometria i les propietats sobre l'arc capaç, ja introduïdes a la Secció 3.6.

Demostrarem el següent enunciat equivalent del teorema: Donat un triangle equilàter qualsevol P_1, P_2, P_3 i tres angles positius α_1, α_2 i α_3, amb suma total $\pi/3$, es pot

construir un triangle amb angles $3\alpha_1, 3\alpha_2$ i $3\alpha_3$ de manera que les seves trisectrius es tallen precisament als punts P_1, P_2 i P_3.

Observi's que l'enunciat original es conseqüència d'aquest ja que si els tres angles d'un triangle són $3\alpha_1, 3\alpha_2$ i $3\alpha_3$ el triangle és semblant al que hem construït i per a aquest triangle el Teorema de Morley es compleix.

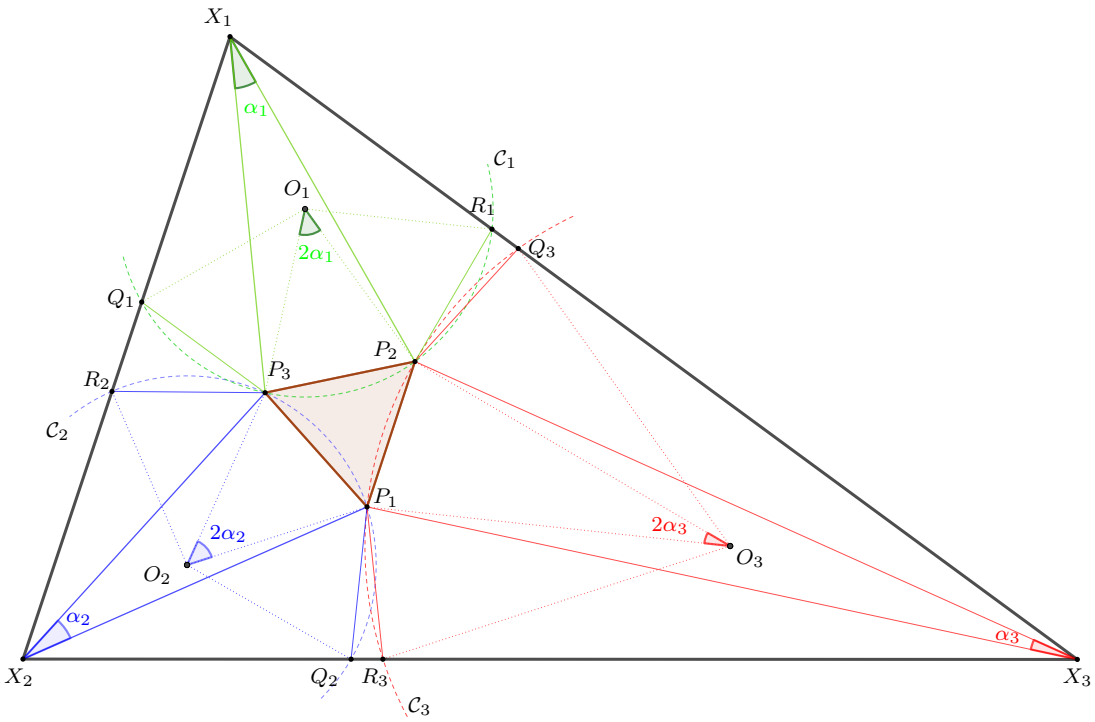

Figura 18. El Teorema de Morley.

En tota la prova la terna (i, j, k) prendrà un dels valors $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ o $(3, 1, 2)$. Per seguir la demostració més fàcilment, en una primera lectura, es recomana pensar que per exemple $(i, j, k) = (1, 2, 3)$.

Començarem la prova definint diversos punts a partir del triangle equilàter i els tres angles α_1, α_2 i α_3. En primer lloc, triem O_k com el punt del semiplà amb frontera la recta que passa per P_i i P_j, que està al costat oposat que P_k i tal que el triangle format per P_i, O_k i P_j sigui isòsceles i amb angle $P_iO_kP_j$ igual a $2\alpha_k$. A continuació considerem la circumferència $\mathcal{C}_k$ amb centre O_k i radi O_kP_i, que passa per P_i i P_j. Sobre aquesta circumferència prenem els punts Q_k i R_k de manera que els arcs Q_kP_j i P_iR_k siguin iguals a l'arc P_jP_i. Finalment anomenem X_k al punt on es tallen la recta que passa per R_i i Q_k amb la que passa per Q_j i R_k.

Anem a demostrar en primer lloc que l'angle $X_iX_kX_j$ és $3\alpha_k$. Veiem primer que els angles $P_jP_iR_k$ i $P_iP_jQ_k$ són $\pi - 2\alpha_k$. Aquesta afirmació és conseqüència del fet que els triangles $R_kO_kP_i$, $P_iO_kP_j$ i $P_jO_kQ_k$ són iguals i isòsceles. Tenint en compte que tots els angles adjacents a P_i sumen 2π deduïm que l'angle $Q_jP_iR_k$ és $\pi/3 - 2\alpha_i$. Com a conseqüència, els angles $P_iQ_jX_j$ i $P_iR_kX_k$ són iguals i valen $2\pi/3 - \alpha_i$. Finalment,

usant que la suma dels angles del pentàgon $P_iR_kX_kQ_kP_j$ és 3π i que $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = \pi/3$ obtenim que l'angle $X_iX_kX_j$ és $3\alpha_k$.

A partir de les propietats de l'arc capaç, com que l'arc de circumferència R_kQ_k amb centre O_k és $6\alpha_k$ i l'angle $X_iX_kX_j$ és la seva meitat, tenim que $X_k \in \mathcal{C}_k$. Ara bé com que l'arc de circumferència P_iP_j amb centre O_k és $2\alpha_k$ i $X_k \in \mathcal{C}_k$ aplicant de nou les propietats de l'arc capaç tenim que l'arc $P_iX_kP_j$ és α_k, i per tant, la construcció que hem fet triseca l'angle $X_iX_kX_j$ tal i com volíem demostrar.

3.9. **El Teorema de Holditch.** L'any 1858 Holditch va descobrir una propietat molt remarcable de la corba $\mathcal{D}$ que traça un punt fixat P d'una corda de longitud donada $a+b$ quan llisca sobre una corba convexa $\mathcal{C}$ recolzant els seus dos extrems en ella, vegeu la Figura 19. Per descomptat la llargada de la corda $a+b$ ha de ser tal que el segment pugui lliscar fent una volta complerta a $\mathcal{C}$. Seguint [15] demostrarem aquesta propietat, que avui en dia es coneix com a Teorema de Holditch.

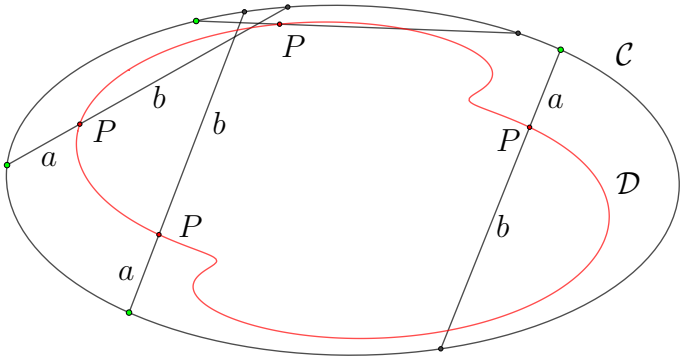

Figura 19. Construcció de la corba interior.

El que ens assegura el Teorema de Holditch és que, independentment de la corba inicial $\mathcal{C}$, si $\mathcal{D}$ és també una corba tancada i simple, i el punt P divideix el segment en trossos de llargada a i b, aleshores l'àrea entre $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ és $ab\pi$, vegeu la Figura 20. A [15] també es considera el cas de que $\mathcal{D}$ no sigui simple (tingui autointerseccions).

Abans de fer la prova en el cas general, veiem el cas més senzill en el que $\mathcal{C}$ és una circumferència de radi r, ja que aquesta es basa en un resultat de geometria del cercle, interessant per ell mateix. Concretament, aquest resultat ens diu que si prenem dues cordes qualssevol del cercle que es tallen, veure la Figura 21, aleshores $ab = cd$, seguint la notació de la mateixa figura. La prova es basa, un cop més, en buscar dos triangles semblants. En aquest cas seran el triangles ABO i COD. Per a demostrar-ho, observem en primer lloc que els dos angles amb vertex O coincideixen. A més, usant la propietat de l'arc capaç del segment BC, veure la Secció 3.6, tenim que els angles BAC i BDC també coincideixen. Per tant $c/b = a/d$, com volíem provar.

Així, si anomenem d la distancia del punt P, marcat al segment de longitud $a+b$, a l'origen de la circumferència de radi r, tenim la situació de la Figura 22. Usant el

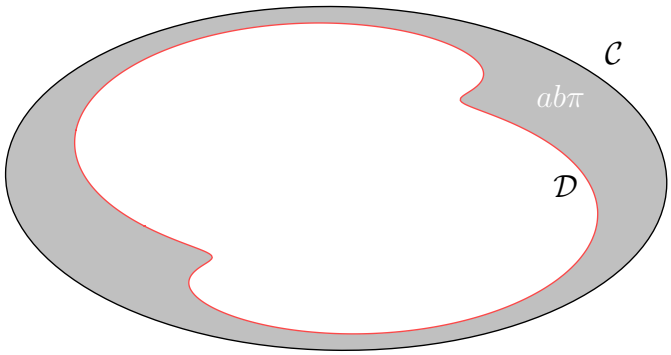

Figura 20. Teorema de Holditch.

resultat que acabem de demostrar,

$$ab = (r+d)(r-d) = r^2 - d^2.$$

Per tant, si els punts de la corba $\mathcal{C}$ són els d'una circumferència de radi r, els de la corba $\mathcal{D}$ són els d'una circumferència de radi $d = \sqrt{r^2 - ab}$. Com a conseqüència, la diferencia entre ambdues àrees és $\pi r^2 - \pi(r^2 - ab) = \pi ab$, tal i com diu el Teorema de Holditch.

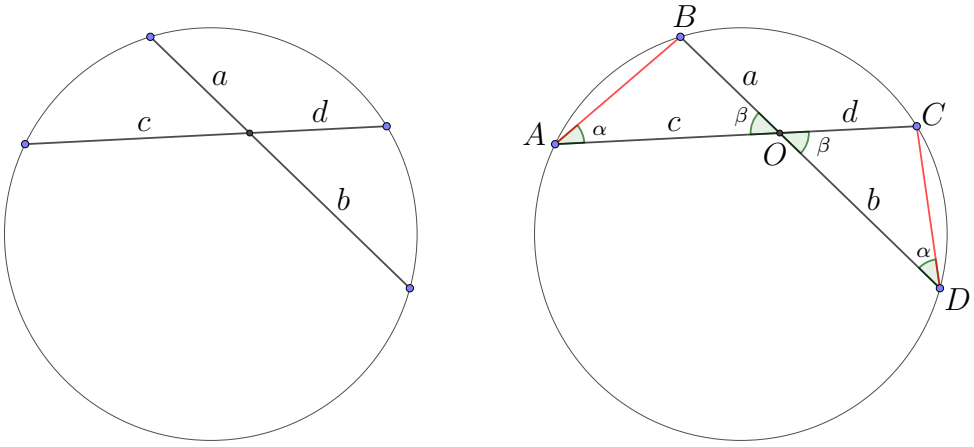

Figura 21. Tall de dues cordes: $ab = cd$.

Per provar el teorema en el cas general, suposarem que $\mathcal{D}$, la corba que segueix el punt P, és una corba regular tancada i simple. Prenem ara una parametrització d'aquesta corba, $\mathcal{D} := \{(u(t), v(t)) : t \in [0,T]\}$. També agafem una funció prou regular $\theta(t)$ tal que $\theta(T) = \theta(0) + 2\pi$, i per cada $c \in \mathbb{R}$, introduïm una nova corba tancada

$$\mathcal{D}_c := \big\{(u(t), v(t)) + c\big(\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))\big) : t \in [0,T]\big\},$$

veure la Figura 23.

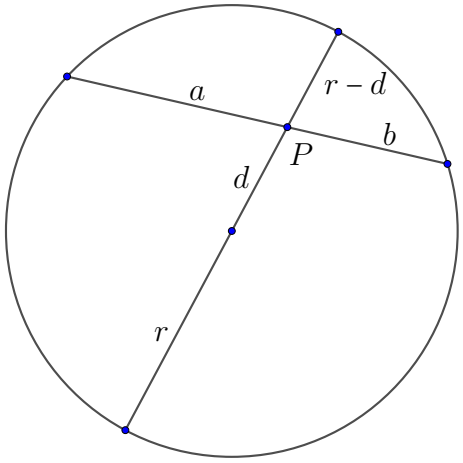

Figura 22. El cas de la circumferència.

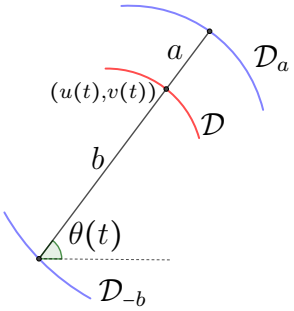

Figura 23. Construcció en la prova del Teorema de Holditch.

Es ben conegut que l'àrea encerclada per $\mathcal{D}$ és

$$A := \int_{\mathcal{D}} x\,\mathrm{d}y = \int_0^T u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Per tant, si $\mathcal{D}_c$ és també una corba simple, l'àrea encerclada per $\mathcal{D}_c$ és

$$\begin{aligned} A_c :&= \int_{\mathcal{D}_c} x\,\mathrm{d}y = \int_0^T \big(u(t) + c\cos(\theta(t))\big)\big(v'(t) + c\cos(\theta(t))\big)\theta'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= A + cJ + c^2\int_0^T \cos^2(\theta(t))\theta'(t)\,\mathrm{d}t = A + cJ + c^2\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta = A + cJ + \pi c^2, \end{aligned}$$

on

$$J := \int_0^T \big(u(t)\theta'(t) + v'(t)\big)\cos(\theta(t))\,\mathrm{d}t.$$

Si ho apliquem quan $\mathcal{D}$ és la corba que descriu el punt P, amb $c = a$ i $c = -b$, essent $\theta(t)$ l'angle que va formant el segment descrit en el Teorema de Holditch amb la horitzontal, com que, per construcció, les corbes $\mathcal{D}_a$ i $\mathcal{D}_{-b}$ coincideixen i són $\mathcal{C}$, és té

que $A_a = A_{-b}$. Si designem per S i A les àrees envoltades pel $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$, respectivament, tenim que $S = A_a = A + aJ + a^2\pi$ i $S = A_{-b} = A - bJ + b^2\pi$, i per tant

$$(a+b)S = bA_a + aA_{-b} = bA + abJ + ba^2\pi + aA - abJ + ab^2\pi = (a+b)A + (a+b)ab\pi.$$

En conseqüència, $S - A = ab\pi$ tal i com volíem demostrar.

4. Conjunts

4.1. **Una aplicació bijectiva entre $[0,1]$ i $(0,1)$.** Encara que d'entrada pot semblar sorprenent hi ha aplicacions bijectives entre l'interval tancat $[0,1]$ i l'interval obert $(0,1)$. Les seves diferencies topològiques fan que aquestes aplicacions no puguin ser continues. Tot seguit, en construirem una ([46]), però és un exercici força estimulant intentar fer-ho per un mateix. Fixem una successió creixent de punts a $(0,1)$, x_1, $x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Aleshores construïm la bijecció $f : [0,1] \to (0,1)$ com segueix:

$$f(1) = x_1,\ f(0) = x_2,\ f(x_1) = x_3,\ f(x_n) = x_{n+2} \quad \text{per} \quad n \geq 1,$$

i $f(x) = x$ en qualsevol altre cas, vegeu la Figura 24.

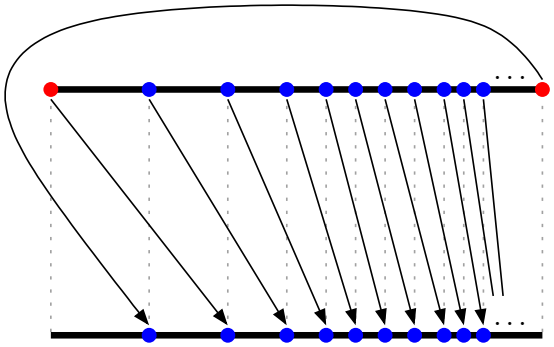

Figura 24. Funció bijectiva entre $[0,1]$ i $(0,1)$.

En general, construir una bijecció explícita entre dos conjunts, pels quals se sospita que existeix, és una feina complicada. Hi ha un resultat que ens permet provar l'existència d'aquesta aplicació, sense necessitat de construir-la, el Teorema de Cantor-Bernstein-Schröeder. Aquest teorema diu que donats dos conjunts qualssevol S i T, si hi ha una aplicació injectiva de S a T i una aplicació injectiva de T a S, aleshores, també hi ha una aplicació bijectiva entre S i T. Vegeu una il·lustració de les seves hipòtesis a la Figura 25. Per tant, per exemple, a partir de les dues aplicacions injectives $f_1 : (0,1) \to [0,1]$, $f_1(x) = x$ i $f_2 : [0,1] \to (0,1)$, $f_2(x) = 1/2 + x/4$ sabem l'existència d'una aplicació bijectiva entre els dos conjunts.

4.2. **El tot i les seves parts.** És molt clar que si un conjunt A és finit (amb k elements) aleshores no hi ha cap aplicació bijectiva entre ell i el conjunt dels seus subconjunts $\mathcal{P}(A)$, ja que aquest segon conjunt té $2^k > k$ elements. Quan A té infinits elements la prova ja no és tant simple, però tampoc podem dir que no sigui senzilla. En tot cas és molt elegant. Suposem, per tal d'arribar a una contradicció,

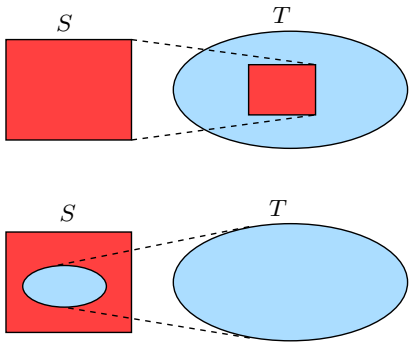

Figura 25. Hipòtesis del Teorema de Cantor-Bernstein-Schröeder.

que A és un conjunt tal que entre A i $\mathcal{P}(A)$ hi ha una aplicació bijectiva, f. Definim el següent subconjunt d'A,

$$B := \{x \in A : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(A).$$

Aleshores, existeix un $y \in A$ tal que $f(y) = B$. Ara bé, si $y \in B$, per definició $y \notin f(y) = B$ i tenim una contradicció. Per altra banda, si $y \notin B$ tenim que $y \in f(y) = B$, de nou una contradicció. Per tant, un y tal que $f(y) = B$ no pot existir, y el resultat se segueix.

Clarament hi ha una aplicació injectiva entre A i $\mathcal{P}(A)$ i, com acabem de veure, cap de bijectiva. En aquesta situació es diu que el cardinal d'A és menor que el de $\mathcal{P}(A)$ i es denota com $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Si prenem $A = \mathbb{N}$, Cantor va conjecturar la no existència de cap conjunt B tal que $|\mathbb{N}| < |B| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, però no ho va poder provar. De fet, Gödel va demostrar que la certesa d'aquesta conjectura era consistent amb la formalització de la teoria de conjunts deguda a Zermelo i Fraenkel. Cohen va demostrar també que la falsedat d'aquesta conjectura també és consistent amb aquesta teoria. Per tant, les dues proves mostren la independència de la conjectura amb l'esmentada teoria de conjunts. Suposar que aquest resultat és cert es coneix com *la hipòtesi del continu*, veure [100, 103].

La hipòtesi del continu generalitzada afirma que per a tot conjunt infinit A no hi ha cap conjunt B tal que $|A| < |B| < |\mathcal{P}(A)|$.

4.3. **Infinits zeros versus infinits vuits.** Hi ha una manera molt senzilla d'encabir dins del pla una quantitat no numerable de conjunts amb forma de zero de manera que tots siguin disjunts. Per exemple, prenent per a cada $r \in \mathbb{R}$, les circumferències de radi r, $Z_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$. Clarament $\bigcup_{r\in(0,1)} Z_r \subset \mathbb{R}^2$ i $Z_r \cap Z_s = \varnothing$ si $r \neq s$.

Per altra banda, anem a veure que és impossible fer el mateix amb una quantitat no numerable de conjunts amb forma de vuit (o, equivalentment, amb forma d'infinit). Tot i que les definicions de que un conjunt tingui forma de zero o de vuit poden fer-se de forma més precisa, preferim no entrar en més detalls en aquest treball.

Observem que si tenim una determinada configuració de vuits com la de la Figura 26, podem associar a cada vuit V un parell de punts amb coordenades racionals, $(p_1, p_2), (q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2$, cadascun d'ells dins d'una de les dues components connexes acotades de $\mathbb{R}^2 \setminus V$. Així, si $\mathcal{V}$ denota el conjunt de tots els vuits, hem definit una

aplicació $f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{Q}^4$, com $f(V) = (p_1, p_2, q_1, q_2)$. Aleshores, si $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ i $V_1 \neq V_2$, una de les components connexes acotades de $\mathbb{R}^2 \setminus V_1$ és disjunta amb una de les components connexes acotades de $\mathbb{R}^2 \setminus V_2$. Per tant, $f(V_1) \neq f(V_2)$ i f és injectiva. Com a conseqüència, $\mathcal{V}$ està en correspondència bijectiva amb un subconjunt de $\mathbb{Q}^4$ i, per tant, és numerable, tal i com volíem demostrar.

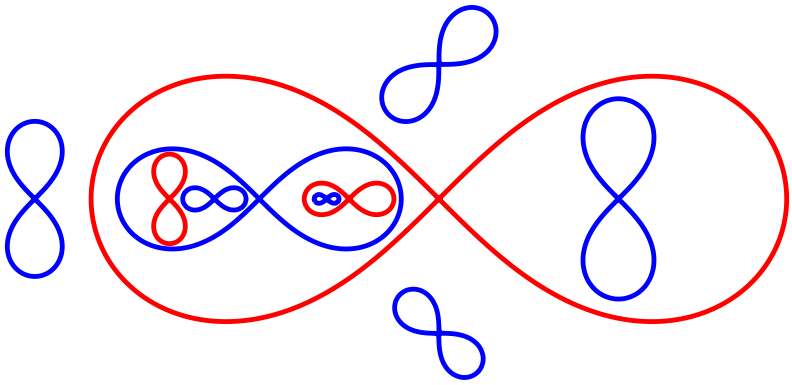

Figura 26. Uns quants vuits.

Clarament, passarà el mateix que amb els vuits per a conjunts C amb formes tals que $\mathbb{R}^2 \setminus C$ tingui un número finit, i més gran que un, de components connexes acotades. Per exemple, conjunts amb formes com Φ, $\otimes$, $\mathbb{B}$, $\hexagram$, ...

5. Probabilitat

5.1. **Daus de Sicherman.** Els daus de Sicherman van ser popularitzats l'any 1978 per Martin Gardner en la seva esperada columna al Scientific American. El que Sicherman va fer fou construir dos daus, amb valors diferents als usuals a les seves sis cares, però tals que en tirar-los la probabilitat que la seva suma fos un cert valor coincidís amb la probabilitat que és té quan es tiren dos daus usuals. Així, mentre els daus normals estan tots dos numerats com $1, 2, 3, 4, 5, 6$, els daus de Sicherman es numeren com $1, 2, 2, 3, 3, 4$ i $1, 3, 4, 5, 6, 8$, vegeu la Figura 27. La prova de que la probabilitat de la suma es la mateixa és una comprovació senzilla. Per exemple, la probabilitat d'obtenir suma 6 amb dos daus normals és 5/36 ja que aquesta suma es dona en les 5 parelles $(1,5), (2,4), (3,3), (4,2)$ i $(5,1)$. Pels daus de Sicherman també és 5/36, però en aquest cas les parelles són $(1,5), (2,4), (2,4), (3,3)$ i $(3,3)$.

Figura 27. Daus de Sicherman.

El que és especialment maco aquí és que el disseny d'aquests daus, i la prova de que no n'hi ha més, es redueix a l'estudi de la descomposició a $\mathbb{Z}[x]$, l'anell de polinomis amb coeficients enters, d'un cert polinomi, també de $\mathbb{Z}[x]$. Consulteu, per exemple [14], per a més detalls. Anem a veure per què.

El secret està en *la funció generatriu de probabilitats*. Donada una variable aleatòria X que pren valors a $\mathbb{N}$ es defineix la seva funció generatriu de probabilitats φ_X com la funció analítica

$$\varphi_X(s) := \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)s^k,$$

on P denota la probabilitat. En el cas particular que X prengui un nombre finit de valors $\varphi_X(s)$ és un polinomi. Per exemple, pel cas concret d'un sol dau, és el polinomi

$$Q(s) := \frac{1}{6}s + \frac{1}{6}s^2 + \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{6}s^4 + \frac{1}{6}s^5 + \frac{1}{6}s^6.$$

És clar que sempre es compleix $\varphi_X(1) = 1$. Una de les propietats més importants de les funcions generatrius és que si X i Y son dues variables aleatòries independents, aleshores $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \cdot \varphi_Y$. Això és degut a que

$$P(X + Y = k) = \sum_{j=0}^{k} P(X = j)P(Y = k - j).$$

Així, la funció generatriu de probabilitats de la variable aleatòria tirar dos daus i sumar els resultats obtinguts és

$$\begin{aligned} Q^2(s) &= \frac{1}{36}\left(s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6\right)^2 \\ &= \frac{1}{36}\left(s^2 + 2s^3 + 3s^4 + 4s^5 + 5s^6 + 6s^7 + 5s^8 + 4s^9 + 3s^{10} + 2s^{11} + s^{12}\right). \end{aligned}$$

Observem, que el coeficient de s^6 és 5/36, que dona la probabilitat de que la suma sigui 6, calculada a dalt.

Eliminant el 1/36 per comoditat, tenim que

$$\begin{aligned} P(s) :&= \left(s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6\right)^2 = \left(s(s+1)(s^2+s+1)(s^2-s+1)\right)^2 \\ &= s^2(s+1)^2(s^2+s+1)^2(s^2-s+1)^2, \end{aligned}$$

i, per tant, els daus que busquem corresponen a maneres de descomposar P a $\mathbb{Z}[s]$ com a producte de dos polinomis P_1 i P_2 a $\mathbb{N}[s]$ tals que $P_1(1) = P_2(1) = 6$ (aquest 6 prové de la restricció $\varphi_X(1) = 1$). Fent totes les combinacions possibles amb els vuit factors de P només obtenim dues solucions

$$P(s) = \left(s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6\right)^2 = \left(s + 2s^2 + 2s^3 + s^4\right)\left(s + s^3 + s^4 + s^5 + s^6 + s^8\right),$$

que corresponen als dos daus normals i als daus de Sicherman, respectivament.

A partir d'aquesta idea es pot jugar a dissenyar daus (de m cares) amb propietats curioses. Donem un parell d'exemples.

Els dos daus tetraèdrics (amb 4 cares) numerats amb $1, 2, 5, 6$ i $0, 2, 8, 10$, són tals que en llençar-los donen una distribució uniforme, amb setze valors entre 1 i 16. El

motiu és que

$$\sum_{k=1}^{16} s^k = s(s+1)(s^2+1)(s^4+1)(s^8+1) = \big(s(s+1)(s^4+1)\big)\big((s^2+1)(s^8+1)\big)$$
$$= \big(s+s^2+s^5+s^6\big)\big(1+s^2+s^8+s^{10}\big).$$

Llençar un dodecàedre numerat, $1,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,5$, i dos daus, numerats com $1,3,4,5,6,8$ i $1,1,3,3,5,5$ equival a llençar 3 daus normals. La raó és que

$$\big(s+s^2+s^3+s^4+s^5+s^6\big)^3 = \big(s+3s^2+4s^3+3s^4+s^5\big)\big(s+s^3+s^4+s^5+s^6+s^8\big)\big(s+s^3+s^5\big).$$

5.2. **Els números de Fibonacci en un joc.** Seguint [66], considerem un joc molt senzill, vegeu la Figura 28. Comencem a la casella de sortida, 1, i anem tirant una moneda perfecta. Si surt cara (C) avancem dues caselles i si surt creu (X) n'avancem només una. Si caiem a la casella 3, automàticament tornem a la casella de sortida. El joc acaba quan arribem a la casella 4. Anem a calcular la probabilitat P_n que el joc duri exactament n jugades. Clarament, $P_0 = P_1 = 0$. Per exemple, $P_2 = 1/4$ ja que hem hagut de treure XC, i $P_3 = 1/8$, ja que hem hagut d'obtenir CXC.

Observem, que per a que el joc duri n jugades, cal que que a la jugada $n-2$ estem a la casella de sortida, i en les dues últimes jugades s'obtingui XC, exactament per aquest ordre. Si diem Q_m la probabilitat d'estar a la casella de sortida a la tirada m-èsima, tenim doncs que $P_n = Q_{n-2}/4$, amb $Q_0 = 1$ i $Q_1 = 1/2$. Per tant, en tenim prou calculant els valors Q_m.

Definim els següents successos

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_m &= \{\text{estar a l'inici a la tirada } m\text{-èsima}\},\\
\overline{\mathcal{I}}_m &= \{\text{no estar a l'inici a la tirada } m\text{-èsima}\}\\
&= \{\text{estar a la casella 2 a la tirada } m\text{-èsima}\}\\
&= \{\text{estar a l'inici a la tirada } (m-1)\text{-èsima}\} = \mathcal{I}_{m-1}.
\end{aligned}$$

Usant que $P(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}) = P(\mathcal{A}|\mathcal{B})P(\mathcal{B})$, obtenim

$$Q_m = P\big(\mathcal{I}_m\big) = P\big(\mathcal{I}_m\cap\mathcal{I}_{m-1}\big) + P\big(\mathcal{I}_m\cap\overline{\mathcal{I}}_{m-1}\big) = P\big(\mathcal{I}_m\cap\mathcal{I}_{m-1}\big) + P\big(\mathcal{I}_m\cap\mathcal{I}_{m-2}\big)$$
$$= P\big(\mathcal{I}_m|\mathcal{I}_{m-1}\big)P\big(\mathcal{I}_{m-1}\big) + P\big(\mathcal{I}_m|\mathcal{I}_{m-2}\big)P\big(\mathcal{I}_{m-2}\big) = \frac{1}{2}Q_{m-1} + \frac{1}{4}Q_{m-2}.$$

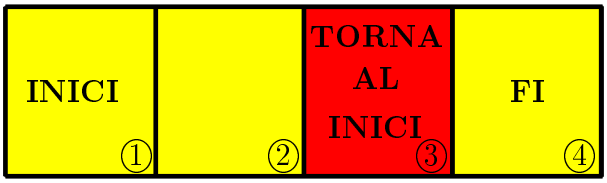

Figura 28. Un joc molt senzill.

Escrivint la darrera recurrència en termes de la nova successió $R_m = 2^m Q_m$ obtenim que $R_0 = 1$, $R_1 = 1$, i

$$R_m = 2^m Q_m = 2^m\left(\frac{1}{2}Q_{m-1} + \frac{1}{4}Q_{m-2}\right) = 2^{m-1}Q_{m-1} + 2^{m-2}Q_{m-2} = R_{m-1} + R_{m-2}.$$

Per tant $R_m = F_{m+1}$, on F_m són els números de Fibonacci, vegeu la Secció 1.7. Així, per a $n \geq 1$,

$$Q_n = \frac{F_{n+1}}{2^n} \quad \text{i} \quad P_n = \frac{F_{n-1}}{2^n}.$$

La probabilitat que s'acabi el joc és $\mathbf{P} := \sum_{n=0}^{\infty} P_n$, i és pot calcular, per exemple, sumant dues progressions geomètriques, a partir de la fórmula de Binet (13) i de l'expressió de P_n. Obtenim el curiós resultat

$$\mathbf{P} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{n-1}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{2^{n+1}} = 1.$$

És interessant observar que si demostréssim, usant algun tipus d'argument probabilistic, que la probabilitat que el joc acabi és 1, aleshores obtindríem la suma de la sèrie sense fer càlculs.

Per acabar, només volem comentar que la durada mitjana de les partides d'aquest joc és de sis tirades ja que, calculant, s'obté que l'esperança de la variable aleatòria "durada de la partida" és

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{F_{n-1}}{2^n} = 6.$$

6. Algoritmes

6.1. **Els babilonis i Newton.** El babilonis, als voltants de 2000-1700 AC, calculaven arrels quadrades (amb precisió suficient per als seus interessos) basant-se en una idea geomètrica molt suggerent, veure [18, Cap. 7]. Aquest mètode també va ser descrit per Heró d'Alexandria al segle I. Sigui x_0 una bona aproximació de $\sqrt{a}$. Aleshores construïm un rectangle amb base x_0 i alçada tal que la seva àrea sigui a, és a dir a/x_0. Si obtenim un quadrat, ja està i x_0 és l'arrel quadrada buscada. Si no, un dels costats és més gran que $\sqrt{a}$ i l'altre és més petit. En aquest cas és natural pensar que el promig d'ambdós valors $(x_0 + a/x_0)/2$ serà una aproximació millor de $\sqrt{a}$. En resum, aquesta idea geomètrica dona lloc al següent mètode iteratiu per a calcular $\sqrt{a}$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}, \qquad x_0 \approx \sqrt{a}.$$

De fet, els babilonis feien només unes poques iteracions d'aquest procés.

Seguint, l'estela dels babilonis, anem a fer un raonament semblant amb cubs per a calcular $\sqrt[3]{a}$. Donat $x_0 \approx \sqrt[3]{a}$ construïm un prisma de volum a, amb base quadrada, i costats x_0, x_0 i a/x_0^2. Aleshores $x_1 = (2x_0 + a/x_0^2)/3$. Més en general, per a calcular $\sqrt[k]{a}$, prenem en primer lloc un prisma k-dimensional de costats $x_0, x_0, \ldots, x_0$ i a/x_0^{k-1}, i com a aproximació següent $x_1 = \big((k-1)x_0 + a/x_0^{k-1}\big)/k$. És a dir, és natural considerar el mètode iteratiu per a calcular $\sqrt[k]{a}$,

$$x_{n+1} = \frac{(k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}}{k}, \qquad x_0 \approx \sqrt[k]{a}.$$

Per altra banda, un dels mètodes més eficients per a trobar una solució, s, d'una equació general $f(x) = 0$, amb f derivable, és l'anomenat mètode de Newton. Aquest consisteix a considerar la successió

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad x_0 \approx s.$$

La seva interpretació geomètrica es mostra a la Figura 29. Se sap que si x_0 és prou a prop de s, aleshores la successió $\{x_n\}$ convergeix cap a s, veure per exemple [89].

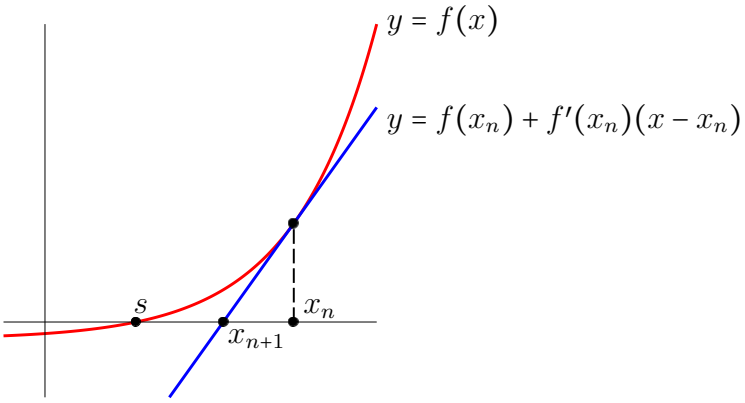

Figura 29. Mètode de Newton.

Ara bé, si prenem $f(x) = x^k - a$, $s = \sqrt[k]{a}$ i el mètode basat en la idea babilònica coincideix amb el mètode de Newton, ja que

$$x - \frac{x^k - a}{kx^{k-1}} = \frac{(k-1)x + \frac{a}{x^{k-1}}}{k}.$$

És força curiós com, pel cas particular $f(x) = x^k - a$, el mètode de Newton, que sembla fortament basat en el càlcul d'una derivada apareix també de manera natural usant només idees de geometria clàssica.

6.2. **Càlcul dinàmic del màxim comú divisor.** En el seu engrescador treball *Cooking the Classics* ([102]), Ian Stewart mostra una manera de calcular el màxim comú divisor a partir d'un sistema dinàmic discret (SDD) que reproduïm a continuació. Aquest mètode és una reformulació del mètode usat a la Grècia clàssica conegut com *anthyphaeresis*. Donat un rectangle amb costats el dos números, aquest mètode consisteix en eliminar el màxim número possible de quadrats (amb costat el més petit dels del rectangle) fins arribar a un nou rectangle on ja no es pot seguir, i després continuar amb el mateix procediment començant amb el nou rectangle i anar fent el mateix fins arribar al conjunt buit, vegeu la Figura 30.

Dinàmicament, considerem l'aplicació no invertible $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$,

$$F(x, y) = \big(\max(x, y) - \min(x, y), \min(x, y)\big),$$

que dona lloc a un semi-SDD. Com sempre, $F^0 = \mathrm{Id}$ i $F^n = F \circ F^{n-1}$. Anem a demostrar que per a cada $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $ab \neq 0$, hi ha un $m = m(a, b)$ tal que $F^m(a, b) = (\mathrm{mcd}(a, b), 0)$.

Per a demostrar-ho considerem les dues funcions $V, W : \Omega \to \mathbb{N}$ definides com $V(x, y) = x + y$ i $W(x, y) = \mathrm{mcd}(x, y)$, on $\Omega = \mathbb{N}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : xy = 0\}$. De fet, veurem que aquestes són *una funció de Liapunov estricta* i una *integral primera*, respectivament, pel semi-SDD donat per F sobre Ω. Com és habitual, direm que els punts $(x, y), F(x, y), F^2(x, y), \ldots, F^m(x, y), \ldots$ són *l'òrbita* de (x, y).

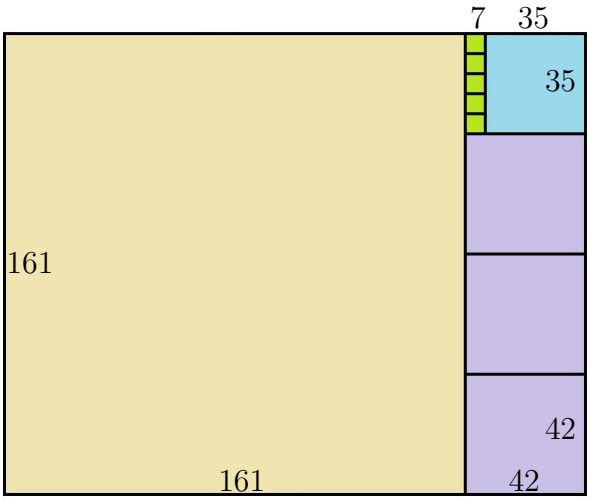

Figura 30. El màxim comú divisor de 203 i 161 és 7.

La funció V és de Liapunov a Ω, ja que per a $(x,y) \in \Omega$,

$$V(F(x,y)) = \max(x,y) < x + y = V(x,y).$$

A més, $V(F(x,y)) = V(x,y)$ només quan $xy = 0$.

Per veure que W és una integral primera, s'ha de demostrar que $W(F(x,y)) = W(x,y)$. Per això, observem que si z divideix a x i y, també divideix a $\max(x,y)$ i $\min(x,y)$, i per tant divideix ambdues components de F. Recíprocament, si z divideix a $\max(x,y) - \min(x,y)$ i a $\min(x,y)$ també divideix la seva suma, $\max(x,y)$, i per tant divideix a x i a y.

Finalment, observi's que $F(x,y) = (0,0)$ si i només $(x,y) = (0,0)$. Per tant, com que V decreix estrictament i és positiva sobre les òrbites de punts d'Ω, donat qualsevol parell $(x,y) \in \Omega$ ha d'existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $V(F^k(x,y)) = (z,0)$ o $(0,z)$, amb $z \neq 0$. Com que $F(0,z) = (z,0)$ el resultat se segueix amb m és o bé k, o bé $k+1$. A més $z = \operatorname{mcd}(x,y)$ ja que tots els punts de l'òrbita tenen el mateix màxim comú divisor.

De fet, es pot veure que aquest procediment és equivalent a l'algoritme d'Euclides, on les divisions es substitueixen per restes. Un avantatge més d'aquest punt de vista és que es pot usar per definir de manera molt natural el màxim comú divisor de dos números racionals positius. Si denotem $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}$, aleshores, per $a = p/q$, $b = r/s$ amb $(a,b) \in (\mathbb{Q}^+)^2$ i $\operatorname{mcd}(p,q) = \operatorname{mcd}(r,s) = 1$ hi ha un $m = m(a,b)$ i un número racional c tal que $F^m(a,b) = (c,0)$. Aquest c s'anomenarà *màxim comú divisor* d'a i b, $\operatorname{mcd}(a,b)$. A més,

$$c = \operatorname{mcd}(a,b) = \frac{\operatorname{mcd}(p,r)}{\operatorname{mcm}(q,s)} \quad \text{i} \quad \operatorname{mcm}(a,b) := \frac{ab}{\operatorname{mcd}(a,b)}.$$

Anem a provar-ho. Per linealitat, $F(a,b) = F(qsa,qsb)/(qs) = F(ps,qr)/(qs)$. Pel resultat sobre punts amb components enteres hi ha un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} F^m(a,b) = \frac{F^m(ps,qr)}{qs} &= \frac{\big(\operatorname{mcd}(ps,qr),0\big)}{qs} \\ &\overset{(\star)}{=} \left(\frac{\operatorname{mcd}(p,r)\operatorname{mcd}(q,s)}{\operatorname{mcd}(q,s)\operatorname{mcm}(q,s)},0\right) = \left(\frac{\operatorname{mcd}(p,r)}{\operatorname{mcm}(q,s)},0\right), \end{aligned}$$

on a $(\star)$ hem usat que

$$qs = \operatorname{mcd}(q,s)\operatorname{mcm}(q,s) \qquad \text{i} \qquad \operatorname{mcd}(ps,qr) = \operatorname{mcd}(p,r)\operatorname{mcd}(q,s).$$

Per exemple, $F^{11}(22/91, 55/63) = (11/819, 0)$. Aleshores, $\operatorname{mcd}(22/91, 55/63) = 11/819$ i $\operatorname{mcm}(22/91, 55/63) = 110/7$. Observi's que tots els quocients

$$\frac{22/91}{11/819} = 18, \quad \frac{55/63}{11/819} = 65, \quad \frac{110/7}{22/91} = 65, \quad \frac{110/7}{55/63} = 18,$$

són números naturals.

Finalment, el procediment es pot estendre per a condicions inicials a $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ i es pot veure que dona lloc a l'expansió en fraccions contínues dels nombres reals, per a la definició consulteu la Secció 2.4. Veiem-ho en un exemple. Se sap que $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, \ldots]$ i per tant els seus primers convergents són

$$3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \ldots. \tag{17}$$

Si es calcula $(a_n, b_n) := F^n(\pi, 1)$, per a $n \in \{3, 3+7 = 10, 10+15 = 25, 25+1 = 26, 26+292 = 318, 318+1 = 319, \ldots\}$ s'obté

$$a_3 = \pi - 3, \qquad a_{10} = 22 - 7\pi, \qquad a_{25} = 106\pi - 333,$$
$$a_{26} = 355 - 113\pi, \qquad a_{318} = -103993 + 33102\pi, \qquad a_{319} = 104348 - 33215\pi,$$

recuperant el numeradors i denominadors de (17).

7. Sèries

7.1. **Subsumes convergents de la sèrie harmònica.** La sèrie harmònica és divergent ja que

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{9} + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = \infty.$$

Aquesta prova data de voltants de 1350, i s'atribueix al filòsof francès Nicole Oresme. El que és més curiós, és que quasi qualsevol subsuma seva també divergeix. Concretament, seguint [72] anem a demostrar que si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{n}, \quad k_n \in \{0, 1\} \tag{18}$$

convergeix, aleshores

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}{n} = 0,$$

és a dir, la *densitat* d'1's a la successió $\{k_n\}$ és zero.

Introduïm $S_0 = 0$ i per a $n > 0$, $S_n = \sum_{m=1}^{n} k_m/m$. És clar que $S_n - S_{n-1} = k_n/n$. Aleshores,

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n} k_m &= \sum_{m=1}^{n} m(S_m - S_{m-1}) = (S_1 - S_0) + 2(S_2 - S_1) + 3(S_3 - S_2) + \cdots + n(S_n - S_{n-1}) \\ &= -S_0 - S_1 - \cdots - S_{n-1} + nS_n,\end{aligned}$$

i per tant,

$$\frac{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}{n} = -\frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1}}{n} + S_n.$$

Ara bé, la sèrie (18) és convergent si i només si la successió $\{S_n\}$ té límit. Finalment, aplicant el criteri de Stolz–Cesàro (que recordem és una versió discreta de la regla

de l'Hôpital) és senzill demostrar que si una successió $\{a_n\}$ té limit, la donada per les mitjanes $\{(a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1})/n\}$ té el mateix límit. Per tant, prenent limits en la darrera igualtat, provem que la successió $\{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)/n\}$ té limit i aquest val 0, tal i com volíem demostrar

7.2. **Divergència de la suma dels inversos dels primers.** Detallem una prova senzilla i maquíssima, deguda a F. Gilfeather i G. Meisters, i publicada a [65], del fet que $\sum_{p\,\text{primer}} 1/p = 1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + \cdots$ és divergent. La primera prova de la divergència d'aquesta sèrie és deguda a Euler i data de 1737, i la prova que presentem s'inspira en la seva.

Fixat $2 \leq n \in \mathbb{N}$, denotem per $\mathbf{P}_n$ el conjunt de tots els primers $p \leq n$. Tenim que

$$\prod_{p\in\mathbf{P}_n}\left(\frac{p}{p-1}\right) = \prod_{p\in\mathbf{P}_n}\left(\frac{1}{1-1/p}\right) = \prod_{p\in\mathbf{P}_n}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\cdots\right) \tag{19}$$

Com que tot enter positiu $k \leq n$ descomposa com a producte de primers menors o iguals que n elevats a potencies enteres positives, és segur que $1/k$ surt com un terme del desenvolupament del producte de la dreta de (19). Per tant

$$\prod_{p\in\mathbf{P}_n}\left(\frac{p}{p-1}\right) > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Prenent logaritmes en la desigualtat anterior, i tenint en compte que el logaritme és una funció creixent,

$$\sum_{p\in\mathbf{P}_n}\big(\log(p)-\log(p-1)\big) > \log\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right).$$

Per altra banda,

$$\sum_{p\in\mathbf{P}_n}(\log(p)-\log(p-1)) = \sum_{p\in\mathbf{P}_n}\int_{p-1}^{p}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x < \sum_{p\in\mathbf{P}_n}\left(\frac{1}{p-1}\right) \leq \sum_{p\in\mathbf{P}_n}\frac{2}{p}.$$

Usant les dues desigualtats obtingudes arribem a

$$\sum_{p\in\mathbf{P}_n}\frac{1}{p} > \frac{1}{2}\log\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$$

i com que la sèrie harmònica és divergent obtenim el resultat desitjat.

Anem a veure com aquest resultat, a part de provar un cop més l'existència d'infinits nombres primers, ens dona també una informació força bona sobre el creixement de la sèrie.

Comparant les sumes superior i inferiors de la funció $1/x$ als intervals $[1,n]$ i $[1,n+1]$ amb la seva integral no és difícil veure que

$$\log(n+1) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq \log(n)+1.$$

Per tant,

$$\sum_{p\in\mathbf{P}_n}\frac{1}{p} > \frac{1}{2}\log\left(\log(n+1)\right).$$

Aquest resultat és bastant fi, ja que se sap que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{p\in\mathbf{P}_n}\frac{1}{p}}{\log(\log(n))} = 1.$$

De fet, el 1/2 que apareix davant de la fita inferior prové del 2 de la desigualtat $1/(p-1) \le 2/p$, vàlida per a tot $p \ge 2$. Aquest 2 es pot disminuir i acostar-lo tant com es vulgui a 1, per sobre, prenent p prou gran.

7.3. **La suma d'Euler.** Donarem, seguint [83], una prova ben senzilla de la fascinant igualtat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{20}$$

Sembla ser, que el càlcul d'aquesta suma, també conegut com *Problema de Basilea*, va ser proposat per primer cop per Pietro Mengoli el 1644. Més endavant, Jakob Bernoulli s'hi va interessar, i d'ell prové el seu nom, ja que la seva residència estava a Basilea. Euler el va resoldre per primer cop l'any 1734. Una altra prova d'una dificultat semblant a la que detallarem es dona a [70]. A [56] es donen sis demostracions diferents. La prova que presentem es basa en la també sorprenent relació

$$C_2(m) := \sum_{k=1}^{m} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) = \frac{m(2m-1)}{3}, \tag{21}$$

la qual, per completitud, també demostrarem.

Per a tot $0 < x < \pi/2$ es compleix que $\sin(x) < x < \tan(x)$, per tant prenent recíprocs i elevant al quadrat, $\cot^2(x) < 1/x^2 < 1+\cot^2(x)$. Substituint a $x = k\pi/(2m+1)$ amb $k, m \in \mathbb{N}$ complint $1 \le k \le m$ i sumant, s'obté

$$\sum_{k=1}^{m} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < m + \sum_{k=1}^{m} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right).$$

Multiplicant la relació anterior per $\pi^2/(2m+1)^2$ i usant (21) s'arriba a

$$\frac{m(2m-1)}{3(2m+1)^2}\pi^2 < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < \left(m + \frac{m(2m-1)}{3}\right) \frac{\pi^2}{(2m+1)^2} = \frac{2m(m+1)}{3(2m+1)^2}\pi^2.$$

Fent tendir m a infinit ja és té (20) donat que ambdues fraccions tendeixen a $\pi^2/6$.

La prova de (21) necessita una mica més de treball. Observem que

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) &= (\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n = \sin^n(\theta)\,(\cot(\theta) + \mathrm{i})^n \\ &= \sin^n(\theta) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{i}^k \cot^{n-k}(\theta). \end{aligned}$$

Per tant, prenent $n = 2m+1$, i igualant les parts imaginaries de la relació anterior, obtenim

$$\sin\big((2m+1)\theta\big) = \sin^{2m+1}(\theta) \sum_{\ell=0}^{m} \binom{2m+1}{2\ell+1} (-1)^\ell \cot^{2(n-\ell)}(\theta) = \sin^{2m+1}(\theta) P_m(\cot^2(\theta)), \tag{22}$$

on P_m és el polinomi de grau m,

$$P_m(x) = \sum_{\ell=0}^{m} \binom{2m+1}{2\ell+1} (-1)^\ell x^{n-\ell}.$$

A partir de (22) és clar que les k arrels del P_m són $x_k = \cot^2\big(k\pi/(2m+1)\big)$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Ara bé, si un polinomi $Q(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0$, amb $a_m \neq 0$, té

les m arrels $y_1, y_2, \ldots, y_m$ aleshores es compleix que $y_1 + y_2 + \cdots + y_m = -a_{m-1}/a_m$. Per tant,

$$\sum_{k=1}^{m} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) = \sum_{k=1}^{m} x_k = -\frac{-\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{m(2m-1)}{3},$$

tal i com volíem veure.

La mateixa idea serveix per a provar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}. \tag{23}$$

Vegem els passos principals. En primer lloc, el polinomi $Q(x)$ es pot escriure també com $Q(x) = a_m(x-y_1)(x-y_2)\cdots(x-y_m)$. Per tant

$$\sum_{j\neq k=1}^{m} y_j y_k = a_{m-2}/a_m.$$

Ara bé, usant la relació entre polinomis simètrics

$$\sum_{k=1}^{m} y_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{m} y_k\right)^2 - 2 \sum_{j,k=1,\, j\neq k}^{m} y_j y_k,$$

quan les $y_k = x_k$ obtenim

$$\sum_{k=1}^{m} \cot^4\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) = \left(\sum_{k=1}^{m} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)^2 - 2\frac{\binom{2m+1}{5}}{\binom{2m+1}{1}}.$$

Per tant, usant (21),

$$\begin{aligned} C_4(m) := \sum_{k=1}^{m} \cot^4\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) &= \left(\frac{m(2m-1)}{3}\right)^2 - \frac{m(2m-1)(m-1)(2m-3)}{15} \\ &= \frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)}{45}. \end{aligned}$$

Per altra banda, elevant al quadrat la desigualtat $\cot^2(x) < 1/x^2 < 1 + \cot^2(x)$ es té

$$\cot^4(x) < 1/x^4 < 1 + 2\cot^2(x) + \cot^4(x).$$

Avaluant aquestes darreres desigualtats a $x = k\pi/(2m+1), k = 1, 2, \ldots, m$, i sumant-les obtenim

$$C_4(m) < \frac{(2m+1)^4}{\pi^4} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^4} < m + 2C_2(m) + C_4(m).$$

Multiplicant per $\pi^4/(2m+1)^4$ i operant,

$$\frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)\pi^4}{45(2m+1)^4} < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^4} < \frac{(8m^4+16m^3+32m^2-21m+45)\pi^4}{45(2m+1)^4}.$$

Prenent límits quan m tendeix a infinit s'obté (23).

De fet, Riemann va estudiar la funció coneguda com a zeta de Riemann,

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s},$$

que tal i com ve donada, està ben definida per $s \in \mathbb{R}$, amb $s > 1$, i quan $s \in \mathbb{N}$ coincideix amb les sèries considerades abans. A més, la va estendre per s prenent valors complexos. En particular se sap que per a $n \in \mathbb{N}$,

$$\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1} B_{2n} (2\pi)^{2n}}{2(2n)!},$$

on B_n són els anomenats números de Bernoulli, vegeu [32]. Aquests números són racionals i es poden calcular, per exemple, fent la sèrie de Taylor següent

$$h(x) := \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

Com que

$$h(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + \frac{1}{30240}x^8 - \frac{1}{1209600}x^7 + \frac{1}{47900160}x^{10} + O(x^{12}),$$

tenim $B_0 = 1$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, $B_8 = -1/30$, $B_{10} = 5/66$, $B_{12} = -691/2730\ldots$ Aleshores

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{12}} = \frac{691\pi^{12}}{638512875}, \ldots$$

Per altra banda, se sap molt poc sobre els sumes dels inversos dels naturals elevats a potències senars. Així, no va ser fins a 1978 que Apéry va provar que

$$\zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \approx 1.202056903\ldots$$

és un número irracional.

8. Integrals

8.1. **Àrea sota la campana de Gauss.** A [22] es calcula d'onze maneres diferents l'àrea sota la campana de Gauss. El primer cop que es veu un d'aquests càlculs no deixa de sorprendre com es pot obtenir una àrea sense usar la primitiva de la funció involucrada. Un encara es sorprèn més quan s'assabenta que la primitiva de la funció a integrar no admet cap expressió finita en termes de *funcions elementals*. Anem a provar que

$$I = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

amb una de les demostracions més senzilles, deguda a Laplace. S'assembla a la més famosa, deguda a Poisson, que també consisteix en relacionar-la amb una integral doble. La diferencia principal és que Poisson la calcula fent un canvi a coordenades polars, mentre que en la prova de Laplace el canvi de variables que s'usa és per integrals d'una variable. Tenim que

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right) = \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &\overset{(\star)}{=} \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} y\,\mathrm{e}^{-y^2(t^2+1)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y = \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} y\,\mathrm{e}^{-y^2(t^2+1)}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

A $(\star)$ hem fet el canvi de variable $x = yt$ en la integral entre parèntesi i a l'última igualtat hem canviat l'ordre d'integració gràcies al Teorema de Fubini. Finalment, com que per a $a > 0$,

$$\int_0^\infty y\mathrm{e}^{-ay^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2a}\mathrm{e}^{-ay^2}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2a},$$

obtenim

$$I^2 = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty y\,\mathrm{e}^{-y^2(t^2+1)}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{2(t^2+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\arctan(t)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4},$$

com volíem demostrar.

Figura 31. Gauss i la seva campana al bitllet de 10 marcs alemanys.

8.2. **Integrals per mandrosos.** És ben conegut que les simetries ens poden ajudar algunes vegades a calcular de manera senzilla integrals definides. Seguint [35] veurem una fórmula general que es pot aplicar per a obtenir fàcilment algunes integrals que d'entrada poden semblar complicades.

Tot comença amb la identitat

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-u)\,\mathrm{d}u,$$

que es pot provar, per exemple, fent el canvi de variables $u = a - x$. Ara bé, si a més, per a tot $x \in [0, a]$, f compleix que $f(x) + f(a-x) = 1$ aleshores l'anterior igualtat entre integrals implica que $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = a/2$.

Observem ara, que si prenem

$$f(x) = \frac{g(x)}{g(x) + g(a-x)},$$

on g és qualsevol funció contínua a $[0, a]$ tal que $g(x)+g(a-x)$ no s'anul·la en aquest interval, estem sota les hipòtesis que hem imposat i, per tant,

$$\int_0^a \frac{g(x)}{g(x) + g(a-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}. \tag{24}$$

Veiem un exemple paradigmàtic d'aplicació de (24). Per a $\alpha \geq 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{(1+y^\alpha)(1+y^2)} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^\alpha(x)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^\alpha(x)}{\cos^\alpha(x)+\sin^\alpha(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^\alpha(x)}{\cos^\alpha(x)+\cos^\alpha(\pi/2-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

on a la primera igualtat hem fet el clàssic canvi de variables $y = \tan(x)$, a la penúltima hem usat que $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$, i finalment hem pres $g(x) = \cos^\alpha(x)$ i $a = \pi/2$ a (24). Curiosament, la integral que buscàvem no depèn d'α.

8.3. **Una integral amb substància.** Dedicarem aquesta secció a demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}. \tag{25}$$

Abans de entrar en matèria no podem deixar de dir que la funció $\operatorname{sinc}(x) := \sin(x)/x$, té nom propi i es coneix com *sinus cardinal* degut a la seva aparició freqüent al processament digital de senyals i en la teoria de la informació. De vegades, s'introdueix una normalització d'ella definint-la com $\sin(\pi x)/(\pi x)$.

La igualtat (25) és interessant ja que l'integrand és un dels exemples més naturals de funció integrable Riemann, però no Lebesgue, ja que $\int_0^\infty |\sin(x)/x|\,\mathrm{d}x$ és divergent. Ja apareix calculada als treballs d'Euler, Laplace i Dirichlet i de vegades es coneix com integral de Dirichlet. Per exemple, Hardy dedica l'article [47] a presentar i comparar vuit proves de (25) fent una classificació numèrica de les mateixes, en funció de la seva naturalitat i complexitat. Per veure l'estudi d'aquesta integral des de diferents punts de vista, consulteu també [101].

Tot i que la meva prova preferida és la que s'obté aplicant la fórmula dels residus a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}/z$ en un domini adient ([17]), presentarem una prova basada en la derivació respecte a paràmetres sota el signe integral, ja que usa tècniques menys sofisticades. Aquesta pot semblar més complicada que d'altres que es poden trobar buscant per internet o en altres textos, però el nostre objectiu és usar amb cura els resultats estàndard de teoria de la mesura, com per exemple, la derivació sota el signe integral per funcions que depenen d'un paràmetre o la commutació entre un limit i una integral.

Per a entendre el perquè de la prova que presentarem, farem una cosa no gaire usual. Començarem presentant dues pseudo proves, i usarem el símbol $\bowtie$ quan escriguem una igualtat que pensem que no està recolzada per cap resultat teòric clar. Aquests "iguals" especials són els que apareixen en certes fonts consultades com iguals tradicionals, en la meva opinió, sense cap explicació convincent.

Usarem les dues relacions següents, fàcils de provar,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}, \qquad \int_0^\infty \sin(x)\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Primera pseudo prova: Considerem, per a $t \geq 0$, la funció

$$G(t) = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x.$$

Per a $t > 0$ és derivable i

$$G'(t) = -\int_0^\infty \sin(x)\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{1+t^2}.$$

Per tant, $G(t) = K - \arctan(t)$, per a $t > 0$ i $K \in \mathbb{R}$. Usant que

$$0 \bowtie \lim_{t\to\infty} G(t) = -\lim_{t\to\infty}\left(K - \arctan(t)\right) = K - \frac{\pi}{2}.$$

trobem el valor de K. (Que el limit sigui zero és un fet que caldria justificar ja que només sabem la convergència puntual de l'integrand cap a 0). A partir de la relació

anterior obtenim que $G(t) \bowtie \frac{\pi}{2} - \arctan(t)$. Finalment, utilitzant que

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = G(0) \bowtie \lim_{t\to 0} G(t) \bowtie \lim_{t\to 0}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(t)\right) = \frac{\pi}{2},$$

obtenim la pseudo prova de que el valor de la integral que ens interessa és $\pi/2$. Aquí hi ha un segon punt que necessitaria justificació, la continuïtat de G en 0.

Segona pseudo prova: Aquesta segona prova sembla encara més senzilla, però es basa en un ús no prou justificat del Teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \sin(x)\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \sin(x)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\ &\bowtie \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \sin(x)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan(t)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

No coneixem cap versió del Teorema de Fubini que asseguri que el canvi d'ordre en les integrals iterades es pugui fer en aquest cas. L'exemple típic del perill de canviar l'ordre d'integració és

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y &= \int_0^1\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\Big|_{x=0}^{x=1}\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{-1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4}, \\ \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x &= \int_0^1\left(\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{y=0}^{y=1}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

El fet que les dues integrals iterades anteriors no coincideixen diu, en particular, que la funció $(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2$ no és integrable a $[0,1]^2$.

La nostra prova. El primer pas consisteix a establir que la integral és convergent, buscant una igualtat entre dues integrals impròpies. Tenim que

$$\int_0^M \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^M \frac{(1-\cos(x))'}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\cos(x)}{x}\Big|_0^M + \int_0^M \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

La integral de la dreta és absolutament convergent (de fet és una funció no negativa) ja que a l'origen l'integrand té limit i a l'infinit és pot acotar per $2/x^2$. Obtenim

$$I := \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Per a calcular I introduïm per $\lambda > 0$, una funció $I(\lambda)$ tal que $\lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = I$. Concretament,

$$I(\lambda) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2}\mathrm{e}^{-(x/\lambda)^2}\,\mathrm{d}x,$$

funció ben definida i derivable per $\lambda > 0$. A més, la derivada es pot passar dins de la integral sense problemes i, com que $(1-\cos(x))/x^2$ és absolutament integrable podem commutar el limit amb la integral quan λ tendeix a infinit o a zero. Aleshores

$$I'(\lambda) = \frac{2}{\lambda^3}\int_0^\infty \big(1-\cos(x)\big)\mathrm{e}^{-(x/\lambda)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda^2/4}\big)}{\lambda^2}, \tag{26}$$

$$\lim_{\lambda\to 0} I(\lambda) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = I, \tag{27}$$

on ens falta justificar la darrera igualtat de (26). Això ho farem més endavant. La solució de l'equació diferencial (26) és

$$I(\lambda) = \sqrt{\pi} \int_0^\lambda \frac{1 - \mathrm{e}^{-s^2/4}}{s^2}\, \mathrm{d}s,$$

on hem usat la primera igualtat de (27). La primitiva d'aquesta funció involucra la funció error de Gauss

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t,$$

que compleix

$$\operatorname{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\infty} \operatorname{erf}(x) = 1, \tag{28}$$

on precisament, la darrera igualtat és el que hem provat a la Secció 8.1. Així,

$$I(\lambda) = \frac{\pi}{2} \operatorname{erf}(\lambda/2) - \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda} \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda^2/4}\right),$$

com es pot comprovar derivant. Aleshores, usant (27) i (28),

$$I = \lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{erf}(\lambda/2) - \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda} \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda^2/4}\right) \right) = \frac{\pi}{2},$$

tal i com volíem demostrar.

Ens falta provar la darrera igualtat de (26). Aquesta és conseqüència de la igualtat més general

$$J(t) := \int_0^\infty \big(1 - \cos(tx)\big) \mathrm{e}^{-(x/\lambda)^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\lambda\sqrt{\pi}\big(1 - \mathrm{e}^{-(t\lambda)^2/4}\big)}{2}, \tag{29}$$

que demostrarem usant de nou derivació sota el signe integral, aquest cop respecte a t. Fixat $\lambda > 0$, la derivació es pot commutar sense problemes amb la integració per a tot t real, i també es pot commutar el límit amb la integral, quan t tendeix a zero, degut a la presència de l'exponencial amb $\lambda > 0$. També farem servir que $J(0) = 0$ i que

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x/\lambda)^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\lambda\sqrt{\pi}}{2},$$

com és dedueix de nou del càlcul de la Secció 8.1, fent un canvi de variables.

Tenim que

$$\begin{aligned} J'(t) &= \int_0^\infty \sin(tx) x \mathrm{e}^{-(x/\lambda)^2}\, \mathrm{d}x = -\frac{\lambda^2}{2} \int_0^\infty \sin(tx) \left(\mathrm{e}^{-(x/\lambda)^2}\right)' \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\lambda^2}{2} \left[\mathrm{e}^{-(x/\lambda)^2} \sin(tx) \Big|_{x=0}^{x=\infty} - t \int_0^\infty \cos(tx) \mathrm{e}^{-(x/\lambda)^2}\, \mathrm{d}x \right] \\ &= \frac{t\lambda^2}{2} \int_0^\infty \cos(tx) \mathrm{e}^{-(x/\lambda)^2}\, \mathrm{d}x = \frac{t\lambda^2}{2} \left(\frac{\lambda\sqrt{\pi}}{2} - J(t) \right). \end{aligned}$$

Per tant,

$$J(t) = \frac{\lambda\sqrt{\pi}}{2} + K \mathrm{e}^{-(t\lambda)^2/4}.$$

Usant que $J(0) = 0$ obtenim que $K = -\lambda\sqrt{\pi}/2$ i (29) se segueix.

9.1. **Solució explícita de les equacions de grau menor que 5.** La resolució d'equacions ha estat un dels problemes que ha fet evolucionar les matemàtiques al llarg de tota la seva història. L'equació més senzilla $ax + b = 0$, $a \neq 0$, s'ha sabut resoldre des de fa moltíssims anys. L'ús de la notació algebraica facilita encara més la tasca i la seva solució és $x = -b/a$.

El pas següent consisteix en resoldre l'equació de segon grau $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. La seva solució es coneix des de fa més de 3500 anys i es té constància que ja la coneixien els babilonis. Més tard, els grecs antics la van retrobar. Amb la notació moderna és molt senzilla d'obtenir ja que l'equació és equivalent a

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

d'on s'obté que

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

L'equació de tercer grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$, va haver d'esperar fins al segle XVI per ser resolta. La paternitat de la seva solució va ser molt disputada. No entrarem aquí a explicar les baralles que hi va haver. Tres matemàtics italians hi van estar involucrats: Scipione del Ferro, Niccolò Fontana (Tartaglia) i Gerolamo Cardano.

Detallem a continuació una manera de trobar les seves solucions a partir de les d'una equació equivalent. En primer lloc, escrivim l'equació com $x^3 + bx^2/a + cx/a + d/a = 0$. Prenent $x = y - \frac{b}{3a}$, aquesta darrera equació s'escriu com

$$y^3 + py + q = 0, \tag{30}$$

on

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \quad \text{i} \quad q = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

Veiem ara com resoldre (30). Per això busquem solucions de la forma $y = u + v$. Substituint, obtenim $u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0$. Per a resoldre aquesta última equació busquem u i v que satisfacin simultàniament $u^3 + v^3 + q = 0$ i $3uv + p = 0$, tot i que en principi no tindrien perquè existir. Per a fer-ho, construïm el nou sistema

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u^3 v^3 = -\dfrac{p^3}{27}, \end{cases}$$

que conté totes les solucions de l'anterior. Aïllant u^3 i v^3 de la primera equació i substituint-les en la segona obtenim que tant $z = u^3$ com $z = v^3$ satisfan $z^2 + qz - p^3/27 = 0$. Resolent aquesta equació de segon grau i usant que $y = u + v$ arribem a la coneguda com fórmula de Cardano,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Aquesta darrera fórmula necessita una mica més d'explicació. Observem que s'han de fer arrels cúbiques de nombres que poden no ser reals (cas $q^2/4 + p^3/27 < 0$). Recordem que un número distint de zero té sempre tres arrels cúbiques. Per tant, la fórmula anterior dóna en general nou candidats a ser solucions. Pel teorema

fonamental de l'àlgebra ja sabem que només tres d'aquests valors poden ser solucions de l'equació (30). De fet, una manera millor d'expressar-les, sempre i quan la primera arrel cúbica no sigui 0, és

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}},$$

on hem usat que $uv = -p/3$.

Abans de continuar augmentant el grau de l'equació polinomial que volem resoldre, comentarem l'aproximació diferent de François Viète (Vieta) par a resoldre les equacions cúbiques. El seu inici és la identitat trigonomètrica

$$4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) - \cos(3\theta) = 0.$$

Així, si per a $p \neq 0$, fem a (30) el canvi de variable $y = u\cos(\theta)$, amb $u = 2\sqrt{-p/3}$ i multipliquem el resultat obtingut per $4/u^3$ obtenim

$$4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) - \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}} = 0.$$

Si es compleix que $p < 0$ i $\left|\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}\right| \leq 1$, aleshores les tres solucions es poden obtenir a partir de

$$y = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)\right),$$

prenent els diferents valors de la funció arccosinus. Si les desigualtats no es compleixen es pot usar l'extensió de la funció cosinus als complexos o també que, de manera similar al cosinus, la funció cosinus hiperbòlic ($\cosh(x) := (\exp(x) + \exp(-x))/2$) també compleix

$$4\cosh^3(\theta) - 3\cosh(\theta) - \cosh(3\theta) = 0.$$

L'equació de quart grau $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, $a \neq 0$ va ser resolta poc després de la de tercer grau per Ludovico Ferrari. Dividint-la per a i completant quadrats podem escriure-la de manera equivalent com

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}x\right)^2 = \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)x^2 - \frac{d}{a}x - \frac{e}{a}.$$

Tornem a intentar completar quadrats als dos costats afegint a les dues bandes $\left(x^2 + \frac{b}{2a}x\right)y + \frac{y^2}{4}$. És a dir, busquem una y de manera que

$$\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)x^2 - \frac{d}{a}x - \frac{e}{a} + \left(x^2 + \frac{b}{2a}x\right)y + \frac{y^2}{4}$$

sigui un quadrat perfecte en x. En altres paraules, busquem y tal que existeixin expressions α i β que compleixin

$$\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} + y\right)x^2 + \left(\frac{b}{2a}y - \frac{d}{a}\right)x + \left(\frac{y^2}{4} - \frac{e}{a}\right) = (\alpha x + \beta)^2. \tag{31}$$

Un cop trobades α i β tindríem

$$\left(x^2+\frac{b}{2a}x\right)^2+\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)y+\frac{y^2}{4}=(\alpha x+\beta)^2,$$
$$\left(x^2+\frac{b}{2a}x+\frac{y}{2}\right)^2=(\alpha x+\beta)^2,$$

i, per tant, les solucions inicials s'obtindrien resolent les dues equacions de segon grau

$$x^2+\frac{b}{2a}x+\frac{y}{2}=\alpha x+\beta,\quad x^2+\frac{b}{2a}x+\frac{y}{2}=-\alpha x-\beta, \tag{32}$$

on y s'ha de buscar de forma que es compleix la relació (31). Com que una expressió Ax^2+Bx+C és un quadrat perfecte si $B^2-4AC=0$, en el nostre cas, tenim que y ha de ser tal que

$$\left(\frac{b}{2a}y-\frac{d}{a}\right)^2-4\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}+y\right)\left(\frac{y^2}{4}-\frac{e}{a}\right)=0. \tag{33}$$

Calculant arribem a que y ha de ser solució d'una equació de tercer grau, que ja sabem resoldre.

Resumint, per a resoldre l'equació de quart grau, hem de buscar una solució y, de l'equació de tercer grau (33). A partir d'aquesta y podem buscar α i β que compleixin (31). Un cop obtingudes α, β i y, podem resoldre les dues equacions de segon grau (32) i obtindrem les quatre solucions x de la primera equació.

A partir d'aquests dos èxits amb els graus 3 i 4, es va intentar resoldre les equacions de grau més elevat. Es va necessitar més de dos segles per a aconseguir deduir que era impossible donar fórmules que permetessin resoldre les equacions generals de grau n, $n\geq 5$ usant només un nombre finit de sumes, restes, multiplicacions, divisions i càlculs amb radicals. Lagrange, Abel i Galois, a principis del segle XIX, van provar aquest resultat que constitueix el cor del que avui en dia es coneix com *teoria de Galois*.

9.2. **El teorema fonamental de l'àlgebra.** La prova d'aquest teorema va interessar a molts matemàtics il·lustres, com Euler, d'Alembert, Gauss, Lagrange, Laplace, veure per exemple les introduccions de [5, 61]. Moltes de les demostracions que s'anaven presentant o no eren del tot correctes, o els faltava el rigor al que estem acostumats avui en dia. Per molts autors, la primera demostració complerta d'aquest resultat, que recordem afirma que tot polinomi no constant $P\in\mathbb{C}[x]$ té arrels (a $\mathbb{C}$), es deguda al poc conegut matemàtic amateur francès Jean Robert Argand, en treballs de 1806 i 1814. El nom del teorema prové no pas de que sigui una eina bàsica per a l'àlgebra actual, sinó per què en els segles XVIII i XIX sovint es confonia l'àlgebra amb l'estudi dels polinomis.

Presentarem a continuació una versió moderna de la prova d'Argand, que s'ha extret de [34] i [51, App. II].

Considerem $P\in\mathbb{C}[x]$, $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$, amb $a_n\neq 0$. Començarem demostrant que hi ha un $z_0\in\mathbb{C}$, no necessàriament únic, tal que

$$|P(z_0)|\leq|P(z)|\quad\text{per a tot}\quad z\in\mathbb{C}. \tag{34}$$

Per veure això, demostrem en primer lloc que

$$\lim_{|z|\to\infty}|P(z)|=\infty. \tag{35}$$

Per a tot $a, b \in \mathbb{C}$, $|a+b| \geq |a| - |b|$. Per tant, com que per a $z \neq 0$,

$$\frac{P(z)}{z^n} = a_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{z^k},$$

tenim que

$$\frac{|P(z)|}{|z|^n} = \left| a_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{z^k} \right| \geq |a_n| - \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_{n-k}|}{|z|^k}.$$

Per altra banda, existeix $L > 0$, tal que si $|z| \geq L$ el sumatori de la part dreta de la desigualtat és menor o igual que $|a_n|/2$, i com a conseqüència,

$$\frac{|P(z)|}{|z|^n} \geq \frac{1}{2}|a_n| \quad \Longrightarrow \quad |P(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n, \quad \text{per a} \quad |z| \geq L,$$

i això implica el que volíem veure.

Per altra banda, com que $|P(z)|$ és una funció contínua, podem definir

$$0 \leq m_r := \min_{D_r} |P(z)|,$$

on $D_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$. A més, existeix $z_r \in D_r$ (no necessàriament únic), tal que $|P(z_r)| = m_r$. A partir de (35), podem triar $R \geq 1$, tal que

$$|P(z)| \geq m_1, \quad \text{si} \quad |z| \geq R. \tag{36}$$

Aleshores m_R és el valor mínim de P a tot $\mathbb{C}$, ja que si $z \in D_R$, per definició $|P(z)| \leq m_R$, mentre que si $z \notin D_R$, usant (36), $|P(z)| \geq m_1 \geq m_R$, ja que $R \geq 1$ i $D_1 \subset D_R$. Per tant, hem demostrat (34) amb $z_0 = z_R$.

Considerant el nou polinomi

$$Q(z) = P(z + z_0),$$

(que pren els mateixos valor que P) queda clar que només cal demostrar el teorema en el cas que el polinomi tingui el mínim en $z = 0$ i, per tant, el seu valor és el valor absolut del terme independent. Acabarem, doncs, la prova suposant que $a_0 \neq 0$ i arribant a una contradicció.

Escrivim

$$P(z) = a_0 + a_k z^k + z^{k+1} S(z), \quad a_k \neq 0, \quad k \geq 1,$$

on S és un polinomi de grau $n-k-1$ si $k < n$ i $S = 0$ si $k = n$. Prenem w una solució qualsevol de $a_0 + a_k w^k = 0$. És a dir, una arrel k-èsima de a_0/a_k. Observem que en aquest punt usem que el resultat que volem provar és cert per a aquest tipus particular de polinomis. Anem a avaluar P en el segment tw, $t \in [0,1]$.

$$P(tw) = (1-t^k)a_0 + t^k(a_0 + a_k w^k) + (tw)^{k+1} S(tw) = (1-t^k)a_0 + (tw)^{k+1} S(tw).$$

Per tant,

$$|P(tw)| \leq |a_0| - t^k |a_0| + t^{k+1} |w^{k+1} S(tw)| = |a_0| - t^k \big(|a_0| - t |w^{k+1} S(tw)| \big).$$

Si $|a_0| > 0$, per a t suficientment petit, tenim que $|a_0| - t|w^{k+1} S(tw)| > 0$ i per a aquests valors de t, $|P(tw)| < |a_0|$ en contradicció amb el fet que $|a_0|$ és el valor mínim de $|P|$. Per tant, $|P(0)| = 0$ tal i com volíem demostrar.

A partir de l'existència d'una arrel per a P és molt fàcil veure que existeixen $z_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ no necessàriament diferents, tals que $P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$. De vegades, el fet que P es pugui factoritzar així és el que es coneix

com teorema fonamental de l'àlgebra. Anem a veure-ho. Per a tot $c \in \mathbb{C}$, usant el binomi de Newton,

$$P(z) = P\big((z-c)+c\big) = \sum_{k=0}^{n} a_k \big((z-c)+c\big)^k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_k \binom{k}{j} (z-c)^j c^{k-j}.$$

Com que tots els termes de la dreta amb $j > 0$ tenen el factor $z - c$ obtenim

$$P(z) = (z-c)T(z) + \sum_{k=0}^{n} a_k c^k = (z-c)T(z) + P(c),$$

on T és un polinomi de grau $n-1$, el qual de fet és el quocient entre P i $z-c$. Si prenem com valor de c l'arrel de P que acabem de veure que existeix, diem-li z_1, obtenim que $P(z) = (z-z_1)T(z)$. Continuant aquest procés arribem al resultat desitjat.

En general, les proves dels teoremes es tornen més i més senzilles, si ens basem en resultats més i més potents. En la prova anterior, el resultat en què ens hem basat és que tota funció contínua en un compacte agafa el seu mínim. Per exemple, si usem el Teorema de Liouville ([17]), que ens diu que si una funció holomorfa definida a tot $\mathbb{C}$ és acotada, aleshores és una funció constant, la prova és quasi immediata. Si suposem que $P(z) \neq 0$ aleshores la funció $1/P$ és holomorfa a tot $\mathbb{C}$. La propietat (35) implica que la funció $1/P$ és acotada a $\mathbb{C}$ i per tant constant. Així, els únics polinomis sense zeros són els constants, no idènticament nuls.

9.3. **Els zeros de P i els de P'.** El Teorema de Rolle ens diu que entre dos zeros de una funció derivable de variable real sempre hi ha, com a mínim, un zero de la seva derivada. En el cas de polinomis ens assegura molt més: si un polinomi té totes les arrels reals, aleshores totes les arrels de la seva derivada estan contingudes a l'interval més petit que conté les arrels del polinomi inicial.

De fet, aquest resultat té una extensió preciosa a $\mathbb{C}$, potser no prou coneguda, que s'anomena Teorema de Gauss-Lucas. Aquest resultat diu que, per a tot polinomi $P \in \mathbb{C}[z]$, l'envolupant convexa K de totes les seves arrels (és a dir el polígon convex més petit, potser degenerat a un interval o a un punt, que les conté totes), conté les arrels de P'. Vegeu la Figura 32 per a polinomis de grau 3, on a_j i b_j són respectivament les arrels de P i P', i, genèricament, K és un triangle.

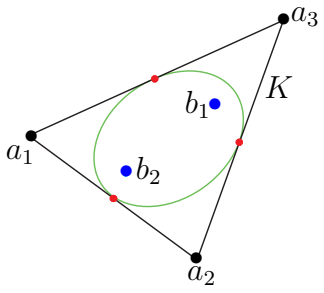

Figura 32. Teorema de Gauss-Lucas per grau 3.

La demostració no és complicada. Podem escriure $P(z) = c\prod_{j=1}^{n}(z-a_j)$, amb $c, a_j \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ i els a_j no necessàriament diferents. Prenent derivades logarítmiques

obtenim

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - a_j}.$$

Si $b \in \mathbb{C}$ és al mateix temps una arrel de P' i de P, és un dels vèrtexs de K i no hi ha res a demostrar. Per tant, per a demostrar-lo suposarem que b és una arrel de P' i no ho és de P. Substituint $z = b$ a l'expressió anterior obtenim

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{b - a_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{b} - \overline{a}_j}{|b - a_j|^2} = \overline{b} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|b - a_j|^2} \right) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{a}_j}{|b - a_j|^2}.$$

Conjugant, i aïllant b arribem a

$$b = \sum_{j=1}^{n} u_j a_j, \quad \text{on} \quad u_j := \frac{|b - a_j|^{-2}}{\sum_{k=1}^{n} |b - a_k|^{-2}} > 0. \tag{37}$$

Com que $\sum_{j=1}^{n} u_j = 1$, la relació (37) és precisament la condició que defineix una combinació lineal convexa i demostra que $b \in K$.

El resultat que acabem de provar va ser usat per Gauss l'any 1836 en el context de certs camps de forces, creats per partícules localitzades als zeros de P, i va ser demostrat per Lucas l'any 1879, consulteu [67].

Pel cas particular en què P té grau 3, i els zeros no estan alineats, el resultat encara es pot fer més precis. El que succeeix és que els dos zeros de P' estan a l'interior de l'el·lipse inscrita al triangle format per a_1, a_2 i a_3, que passa pels punts mitjos dels costats d'aquest triangle i és tangent als tres costats, vegeu de nou la Figura 32. De fet, es pot demostrar que els dos zeros de P' són el focus d'aquesta el·lipse !, vegeu [57, 58].

9.4. **Una versió feble de la regla de Descartes.** Demostrarem que un polinomi real amb $k+1$ monomis i no idènticament zero,

$$P(x) = a_0 x^{n_0} + a_1 x^{n_1} + \cdots + a_k x^{n_k} \in \mathbb{R}[x], \quad 0 \le n_0 < n_1 < \cdots < n_k, \tag{38}$$

té com a molt k arrels positives, tenint en compte la seva multiplicitat. Un corol·lari evident és que el número màxim d'arrels reals és $2k+1$ (k positives, k negatives i eventualment el zero, que té multiplicitat n_0). Així, el màxim número d'arrels reals, tenint en compte multiplicitats és $2k + n_0$. No és difícil veure que les fites donades són òptimes. El polinomi

$$P(x) = x^{n_0}(x^2 - 1)(x^2 - 2^2)\cdots(x^2 - k^2)$$

mostra que aquestes fites són òptimes.

Farem la demostració d'aquesta versió de la regla de Descartes per inducció sobre k. Si $k = 0$, $P(x) = a_0 x^{n_0}, a_0 \neq 0$ i clarament no té arrels reals positives. Suposem ara que el resultat és cert per a $k = K - 1 \ge 0$. Pel Teorema de Rolle sabem que si una funció analítica g té M zeros reals (tenint en compte les seves multiplicitats), aleshores la seva derivada g' en té com a mínim $M - 1$, tenint en compte també les seves multiplicitats. De fet, entre cada dos zeros diferents i consecutius de g i ha un zero de g' i si x_0 és un zero de g de multiplicitat M, aleshores ho és de g' amb multiplicitat $M - 1$. Per tant, si la regla de Descartes no fos certa per a $k = K$, existiria un polinomi de la forma (38) amb $K + 1$ arrels positives (tenint en compte les seves multiplicitats). Ara bé $Q(x) = P(x)/x^{n_0}$ és també un polinomi a $\mathbb{R}[x]$ amb les mateixes arrels positives. Per tant, pel Teorema de Rolle, $Q'(x)$, que té

nomes $K-1$ monomis, en tindria K de positives, en contradicció amb la hipòtesi d'inducció.

La regla de Descartes ens assegura una mica més. Ens diu que el número d'arrels reals positives, tenint en compte les seves multiplicitats, és també congruent mòdul 2 amb k. De fet, aquesta regla és conseqüència d'un resultat més general, el Teorema de Budan-Fourier, que s'ocupa del mateix problema a un interval $[a,b]$ i també ha estat estesa per a funcions analítiques, vegeu [21, 26].

La conjectura de Kouchnirenko va ser proposada com un intent d'estendre la regla de Descartes al context de varies variables. Per al cas de dues variables aquesta conjectura afirmava que *un sistema polinomial real* $P_1(x,y)=P_2(x,y)=0$ *tindria com a màxim* $(m_1-1)(m_2-1)$ *solucions simples amb coordenades positives, on* m_i *és el nombre de monomis de cada* f_i. Aquesta conjectura va ser proposada per Kouchnirenko a finals dels anys 70, i va ser publicada en un treball de Khovanskiĭ, [59]. L'any 2000, Haas ([45]) va donar una familia de contraexemples formada per dos polinomis amb 3 monomis cadascun, essent 106 el grau menor de tots els contraexemples. L'any 2007 una familia més senzilla de grau 6, també formada per polinomis amb tres monomis, va ser estudiada a [30]. Ambdós exemples tenien exactament 5 solucions (simples) amb coordenades positives, en lloc de les 4 previstes per la conjectura. El contraexemple més senzill donat a [30] és

$$\begin{cases} x^6+\frac{44}{31}y^3-y=0,\\ y^6+\frac{44}{31}x^3-x=0. \end{cases}$$

Pel que sabem, trobar per a tot m_1 i m_2 una fita realista i independent del grau dels polinomis, encara és un problema obert.

9.5. **Polinomis estables.** En moltes qüestions de Teoria de Control o de Sistemes Dinàmics el coneixement de l'estabilitat d'una solució donada es redueix a saber quan un cert polinomi amb coeficients reals $p(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ té totes les seves arrels amb part real negativa. Els polinomis que compleixen aquesta propietat s'anomenen *polinomis estables*. La caracterització dels polinomis estables està totalment resolta i s'obté imposant que certes relacions polinomials entre els coeficients de p siguin positives. Aquestes relacions es poden obtenir, per exemple, calculant els menors principals d'una certa matriu construïda a partir dels valors a_j, anomenada matriu de Routh-Hurwitz, veure [36]. Aquest mètode és molt més potent, ja que també permet determinar exactament el número d'arrels amb part real negativa de p.

L'any 1977, Strelitz ([105]) va donar una demostració alternativa, senzilla i bonica, de com caracteritzar els polinomis estables, que és la que farem a continuació.

Denotarem les n arrels de p com $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, escrivint cadascuna d'elles tants cops com multiplicitat tingui. Considerem un segon polinomi $q(z)$, mònic i de grau $m=n(n-1)/2$, que té com arrels $\alpha_j+\alpha_k$ per a tot $1\le j<k\le n$. És a dir,

$$p(z)=\prod_{1\le j\le n}(z-\alpha_j),\quad q(z)=\prod_{1\le j<k\le n}\big(z-(\alpha_j+\alpha_k)\big).$$

Escrivim $q(z)=z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1z+b_0$. Observem que $b_j\in\mathbb{R}$ ja que donada qualsevol arrel de q la seva conjugada també és arrel amb la mateixa multiplicitat.

Demostrarem a continuació que p és un polinomi estable si i només si tots els coeficients de p i tots els de q són positius, és a dir, si $a_j > 0$ per $j = 0, 1, \ldots, n-1$ i $b_k > 0$ per a $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Si un polinomi mònic és estable i te grau 1 o 2 és clar que els seus coeficients són positius: si té grau 1 perquè s'escriu com $z - \alpha_1$ amb $\alpha_1 < 0$ i si té grau 2, per què, o bé és $(z-\alpha_1)(z-\alpha_2) = z^2 - (\alpha_1+\alpha_2)z + \alpha_1\alpha_2$ amb $\alpha_1 < 0$ i $\alpha_2 < 0$, o bé com $\big(z-(u+v\mathrm{i})\big)\big(z-(u-v\mathrm{i})\big) = z^2 - 2uz + u^2 + v^2$, amb $u < 0$. A més, com que tot polinomi amb coeficients reals descomposa com a producte de polinomis amb coeficients reals de graus 1 o 2, i el producte de polinomis amb coeficients positius també té coeficients positius, tenim que els coeficients de tot polinomi estable són positius. Com que si p és estable també ho és q, tenim que els coeficients d'ambdós polinomis són positius.

Anem a demostrar el recíproc. Si tots els coeficients de p són positius les seves arrels reals han de ser negatives, ja que si $x \geq 0$, clarament $p(x) > 0$. A més, donat un parell $u \pm v\mathrm{i}$ d'arrels complexes de p, $(u+v\mathrm{i}) + (u-v\mathrm{i}) = 2u$ és una arrel real de q i de nou, com que els coeficients de q són positius, obtenim $2u < 0$ com volíem veure.

Ara bé, perquè aquest resultat sigui útil hauríem de ser capaços de trobar els b_k sense conèixer els α_j. Anem a veure que això sempre és possible.

Començarem amb un parell d'exemples senzills. Per a $n = 2$, $p(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2) = z^2 - (\alpha_1+\alpha_2)z + \alpha_1\alpha_2$. Per tant, $a_1 = -(\alpha_1+\alpha_2)$ i $a_0 = \alpha_1\alpha_2$. Així, $q(z) = z - (\alpha_1+\alpha_2) = z + a_1$. Per tant $b_0 = a_1$ i les condicions necessaries i suficients quan $n = 2$, per a què p sigui estable són que $a_1 > 0$ i $a_0 > 0$. Per $n = 3$,

$$\begin{aligned} p(z) &= (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3) \\ &= z^3 - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)z^2 + (\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3)z - \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \end{aligned}$$

i per tant $a_2 = -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$, $a_1 = \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3$ i $a_0 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3$.

Per altra banda,

$$\begin{aligned} q(z) =& \big(z-(\alpha_1+\alpha_2)\big)\big(z-(\alpha_1+\alpha_3)\big)\big(z-(\alpha_2+\alpha_3)\big) \\ =& z^3 - 2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)z^2 + \big(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+3(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3)\big)z \\ & - (\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_2+\alpha_3) = z^3 + 2a_2z^2 + (a_2^2+a_1)z + (a_1a_2 - a_0). \end{aligned}$$

Així, en aquest cas, les condicions necessàries i suficients per a que p sigui estable són $a_2 > 0$, $a_1 > 0$ i $0 < a_0 < a_1a_2$.

En general, tant els coefficients de p com els de q són polinomis simètrics (invariants per permutacions) de les arrels de p. Les relacions entre els coeficients d'un polinomi i polinomis simètrics de les seves arrels són ben conegudes i s'anomenen fórmules de Newton-Girard. Usant de forma sistemàtica aquestes fórmules es poden obtenir les relacions desitjades, per a més detalls veure [105, 107].

Seguint [107] veiem que hi ha una manera alternativa i molt compacta de trobar q en funció de p que usa l'anomenada resultant. Recordem que, donats dos polinomis $r(z)$ i $s(z)$ de graus respectius j i k, la seva resultant $\mathrm{Res}_z(r,s)$ és un polinomi que depèn dels seus coeficients i que s'anul·la si i només si r i s tenen una arrel (a $\mathbb{C}$) en comú. Aquesta resultant es calcula com un determinant. Si $r(z) = r_jz^j + r_{j-1}z^{j-1} +$

$\cdots + r_1 z + r_0$ i $s(z) = s_k z^k + s_{k-1} z^{k-1} + \cdots + s_1 z + s_0$, la resultant és

$$\mathrm{Res}_z\big(r(z), s(z)\big) = \begin{vmatrix} r_j & r_{j-1} & r_{j-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_j & r_{j-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_1 & r_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_2 & r_1 & r_0 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_k & s_{k-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_1 & s_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_2 & s_1 & s_0 \end{vmatrix},$$

on les primeres k files contenen els coeficients de $r(z)$ i el segon bloc de j files conté els de $s(z)$, veure [24].

Si definim un nou polinomi semblant a $q(z)$ com

$$Q(z) = \prod_{1 \le j,k \le n} \big(z - (\alpha_j + \alpha_k)\big),$$

és fàcil veure que $Q(z) = 2^n p(z/2)(q(z))^2$. Per tant q es pot obtenir a partir de Q i p. Ara bé, a partir de la definició de resultant s'obté

$$Q(z) = \mathrm{Res}_t\big(p(t), p(z-t)\big),$$

ja que, fixat z, els zeros comuns de $p(t)$ i $p(z-t)$ venen donats per $t = \alpha_i$ i $z - t = \alpha_\ell$, per a qualssevol i i ℓ, no necessàriament diferents, obtenint que $z = t + \alpha_\ell = \alpha_i + \alpha_\ell$. Malgrat l'elegància d'aquest càlcul de q, aquest punt de vista no és eficient computacionalment i només és aconsellable usar-lo per n baixos.

Finalment cal observar que si el polinomi inicial p té coeficients complexos es pot usar la mateixa aproximació, començant pel nou polinomi amb coeficients reals $p(z)\overline{p(\overline{z})}$.

9.6. **Polinomis positius.** Un polinomi de varies variables $P \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ es diu semidefinit positiu si $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0$ per a tot $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Com veurem, no és difícil demostrar que si $n = 1$ tots els polinomis semidefinits positius es poden escriure com la suma de dos polinomis al quadrat. Sembla ser que Minkowski, durant la lectura de la seva tesi doctoral el 1885, va convencer a Hilbert de que un resultat similar, però sumant potser més polinomis al quadrat, no seria cert per a polinomis de varies variables. Tres anys més tard, el mateix Hilbert va provar l'existència de contraexemples, però sense donar-ne cap d'explícit. No va ser fins l'any 1967, que Motzkin va considerar, motivat per altres questions ([73]), un polinomi concret de dues variables,

$$P(x, y) = 1 + x^2 y^4 + x^4 y^2 - 3x^2 y^2,$$

que acabaria sent el primer contraexemple explícit al problema que ens ocupa. Aquest fet li va fer notar Taussky-Todd, després de sentir-lo explicar en un seminari. Hilbert, l'any 1893, també va provar que quan $n = 2$, tot polinomi semidefinit positiu es pot escriure com la suma de quatre funcions racionals al quadrat. Veure per exemple [6, 8, 95] per a més detalls sobre polinomis semidefinits positius.

El que hem explicat va motivar a Hilbert a plantejar com a Problema XVII en la seva famosa llista de 23 problemes de 1900 la pregunta de si, independentment

del número de variables, tot polinomi semidefinit positiu es podia escriure com una suma finita de funcions racionals al quadrat. La resposta a aquesta qüestió va ser positiva i la va donar Artin l'any 1927.

Nosaltres només detallarem els resultats més senzills per a $n = 1, 2$. Comencem demostrant que quan $n = 1$ tot polinomi semidefinit positiu és igual a la suma de dos polinomis al quadrat. Aquest polinomi es pot escriure com

$$Q(x) = d\prod_{j=1}^{k}(x-c_j)^2\prod_{j=1}^{m}\left((x-a_j)^2+b_j^2\right),$$

amb $d > 0$ i a_j, b_j, c_j reals, on evidentment un dels productoris pot no ser-hi. Si definim

$$R(x) = \sqrt{d}\prod_{j=1}^{k}(x-c_j)\prod_{j=1}^{m}(x-a_j-b_j\mathrm{i}) \in \mathbb{C}[x],$$

aleshores

$$Q(x) = |R(x)|^2 = \big(\operatorname{Re}(R(x))\big)^2 + \big(\operatorname{Im}(R(x))\big)^2,$$

tal i com volíem provar, ja que $\operatorname{Re}(R), \operatorname{Im}(R) \in \mathbb{R}[x]$.

A continuació, estudiem el polinomi de Motzkin P, provant que $P \geq 0$, i a més, que P no es pot escriure com una suma finita de polinomis al quadrat.

Recordem que, donats tres números positius, u, v, w, la seva mitjana geomètrica és sempre menor o igual que la seva mitjana aritmètica, és a dir,

$$\sqrt[3]{u\,v\,w} \leq \frac{u+v+w}{3}.$$

Prenent $u = 1$, $v = x^4y^2$ i $w = x^2y^4$, obtenim $x^2y^2 \leq (1 + x^4y^2 + x^2y^4)/3$, o equivalentment,

$$P(x,y) = 1 + x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 \geq 0.$$

Per demostrar que P no es pot escriure com una suma finita de polinomis al quadrat, començarem suposant el contrari, per tal d'arribar a una contradicció. Siguin $P_j \in \mathbb{R}[x, y]$ i $m \in \mathbb{N}$, tals que

$$P = P_1^2 + P_2^2 + \cdots + P_m^2.$$

La relació anterior implica que el grau més gran de cada un dels polinomis P_j és 3. Com que $P(x, 0) = P(0, y) = 1$ i $P_j^2(x, y) \leq P(x, y)$, es compleix que els polinomis d'una variable $P_j(x, 0)$ i $P_j(0, y)$ són polinomis acotats superiorment a tot $\mathbb{R}$, i per tant són constants. Aleshores,

$$P_j(x,y) = a_j + b_jxy + c_jx^2y + d_jxy^2.$$

El coeficient de x^2y^2 de $\sum_{j=1}^{m} P_j^2$ és $\sum_{j=1}^{m} b_j^2 \geq 0$, mentre que el de P és -3, arribant per tant a la contradicció desitjada.

Acabem aquesta secció donant una expressió de P com a suma de quatre funcions racionals al quadrat,

$$\begin{aligned}1 + x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 = &\left(\frac{x^3y + y^3x - 2xy}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{x(x^3y + y^3x - 2xy)}{x^2+y^2}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{y(x^3y + y^3x - 2xy)}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2.\end{aligned}$$

Ja sabíem que una descomposició d'aquest tipus havia d'existir segons el resultat provat per Hilbert per a polinomis de dues variables.

10. Mètodes de demostració

10.1. **Els perills de la pseudo inducció.** Hi ha resultats que són certs per als primers valors d'un paràmetre natural $n \in \mathbb{N}$ i això ens pot fer pensar que són certs per a tot n. A continuació desenvoluparem un quants exemples que ens mostren el perill d'aquest raonament.

Un dels més famosos consisteix en considerar el polinomi $P(n) = n^2 + n + 41$, donat per Euler el 1772, que proporciona valors primers per a $n = 0, 1, 2, \ldots, 38, 39$. Per exemple, $P(0) = 41$, $P(39) = 1601$. Això podria fer pensar que $P(n)$ sempre és primer, però res més lluny de la veritat. Per exemple $P(40) = 40 \times 41 + 41 = 41^2$. De fet, l'any 1752 Goldbach ja va provar que no hi ha cap polinomi amb coeficients enters $Q \in \mathbb{Z}[x]$ de manera que per a tot $n \in \mathbb{N}$, $Q(n)$ sigui un primer, observant que $p = Q(0)$ divideix $Q(kp)$ per a tot $k \in \mathbb{N}$.

Fermat també va pensar que els avui en dia coneguts com números de Fermat, $\mathcal{F}_n = 2^{2^n} + 1$, podien ser tots primers ja que ho eren per a $n = 0, 1, 2, 3$ i 4, tot i que ell mateix va precisar que no ho sabia demostrar. Euler el 1732 ja va provar que per a $n = 5$ no s'obtenia un primer ja que $\mathcal{F}_5 = 641 \times 6700417$. De fet, avui en dia no es coneix cap més número de Fermat primer.

El tercer resultat té a veure amb els polinomis ciclotòmics. Recordem que per a cada $0 < n \in \mathbb{N}$, el polinomi ciclotòmic Φ_n és l'únic polinomi irreductible amb coeficients a $\mathbb{Z}$ que és divisor de $x^n - 1$, però no és divisor de $x^k - 1$ per a cap $k < n$. Les seves arrels són les arrels primitives de la unitat, és a dir el números $e^{2\pi ki/n}$ amb k i n primers entre si. Es compleix que, per a tot $n \leq 104$, els coeficients de $\Phi_n(x)$ són $0, 1$ o -1. Per exemple

$$\Phi_{10}(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1, \quad \Phi_{24}(x) = x^8 - x^4 + 1, \quad \Phi_{27}(x) = x^{18} + x^9 + 1,$$
$$\Phi_{42}(x) = x^{12} + x^{11} - x^9 - x^8 + x^6 - x^4 - x^3 + x + 1, \quad \Phi_{80}(x) = x^{32} - x^{24} + x^{16} - x^8 + 1,$$
$$\Phi_{99}(x) = x^{60} - x^{57} + x^{51} - x^{48} + x^{42} - x^{39} + x^{33} - x^{30} + x^{27} - x^{21} + x^{18} - x^{12} + x^9 - x^3 + 1.$$

En canvi, per a $n = 105 = 3 \times 5 \times 7$, el primer natural producte de tres primers senars diferents,

$$\Phi_{105}(x) = x^{48} + x^{47} + \cdots - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} + \cdots - x^8 - 2x^7 - x^6 + \cdots + x + 1,$$

i per tant apareix un -2 entre els coeficients del polinomi ciclotòmic. Més endavant, també apareix un 2 entre els coeficients de Φ_{165}. De fet, se sap que, si $A(n)$ denota el més gran dels valors absoluts dels coeficients de $\Phi_n(x)$, $A(n)$ pren tots els valors possibles, veure [106]. Per exemple $A(3 \times 5 \times 7 \times 11) = 3$, $A(3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) = 23$,

$$A(3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17) = 532 \quad \text{o} \quad A(3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19) = 669\,606.$$

Acabem aquesta secció amb uns exemples sorprenents sobre el valor de certes integrals de Riemann impròpies i convergents, veure [13, 98]. El primer és que

$$\int_0^\infty \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\big(x/(2k-1)\big)}{x/(2k-1)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{si} \quad n = 1,2,3,4,5,6,7,$$

però

$$\int_0^\infty \prod_{k=1}^{8} \frac{\sin\big(x/(2k-1)\big)}{x/(2k-1)}\,\mathrm{d}x = \frac{467807924713440738696537864469}{935615849440640907310521750000}\,\pi \approx \frac{\pi}{2} - 2.31\times 10^{-11}.$$

De manera semblant,

$$\int_0^\infty 2\cos(x) \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\big(x/(2k-1)\big)}{x/(2k-1)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{si} \quad n = 1,2,\dots,56,$$

però

$$\int_0^\infty 2\cos(x) \prod_{k=1}^{57} \frac{\sin\big(x/(2k-1)\big)}{x/(2k-1)}\,\mathrm{d}x < \frac{\pi}{2}.$$

Les proves d'aquests resultats no són senzilles. Per exemple, el primer cas està basat en la igualtat

$$\int_0^\infty \prod_{j=1}^{m} \cos(c_j x) \frac{\sin(x)}{x} \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\big(a_k x\big)}{a_k x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{si} \quad \sum_{k=1}^{n} |a_k| + \sum_{j=1}^{m} |c_j| \le 1, \tag{39}$$

demostrada a [13] i relacionada amb resultats de Störmer ([104]) de 1895.

Així, la raó de la primera sorpresa és essencialment deguda a que $1/3 + 1/5 + \cdots + 1/13 < 1$, però $1/3 + 1/5 + \cdots + 1/13 + 1/15 > 1$.

La integral de $\sin(x)/x$ és precisament la que hem fet a la Secció 8.3. Només demostrarem, usant tècniques semblants a les de la secció esmentada, que

$$J(a) = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin(ax)}{ax}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } 0 < a \le 1, \\ \frac{\pi}{2a} & \text{si } a > 1. \end{cases} \tag{40}$$

A partir d'aquest resultat ja s'entén el paper que juga el fet que a sobrepassi el valor 1 en el càlcul de la integral buscada, i per tant, que la suma $\sum_{k=1}^{n} |a_k| \le 1$, pugui tenir influència en el valor de la integral.

Per a demostrar (40) considerem, per a $\lambda > 0$ i $a > 0$, la funció

$$H_a(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin(ax)}{x} \mathrm{e}^{-x^2/\lambda^2}\,\mathrm{d}x.$$

Tenim

$$H_a'(\lambda) = \frac{2}{\lambda^3}\int_0^\infty \sin(x)\sin(ax)\mathrm{e}^{-x^2/\lambda^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda^2}\left[\mathrm{e}^{-(a-1)^2\lambda^2/4} - \mathrm{e}^{-(a+1)^2\lambda^2/4}\right],$$

on aquest resultat es pot obtenir usant la igualtat $\sin(u)\sin(v) = (\cos(u-v) - \cos(u+v))/2$ i argumentant de manera similar a la prova de (29).

Usant que $\lim_{\lambda\to 0} H_a(\lambda) = 0$, ja que el límit es pot permutar amb la integral degut a que $|\sin(x)\sin(ax)|/x^2$ és integrable, i calculant tenim que

$$\begin{aligned} H_a(\lambda) = {} & \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda}\left[\mathrm{e}^{-(a+1)^2\lambda^2/4} - \mathrm{e}^{-(a-1)^2\lambda^2/4}\right] \\ & + \frac{\pi}{4}\left[(a+1)\operatorname{erf}\left((a+1)\lambda/2\right) - (a-1)\operatorname{erf}\left((a-1)\lambda/2\right)\right]. \end{aligned}$$

on apareix de nou la funció erf. Usant que $\lim_{x\to\pm\infty}\operatorname{erf}(x) = \pm 1$ tenim

$$\lim_{\lambda\to\infty} H_a(\lambda) = \begin{cases} \frac{a\pi}{2} & \text{si } 0 < a \le 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } a > 1 \end{cases}.$$

De nou, podem permutar el límit amb la integral que defineix $H_a(\lambda)$ i com que, fixat $x > 0$,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin(ax)}{x}e^{-x^2/\lambda^2} = \frac{\sin(x)}{x}\frac{\sin(ax)}{x},$$

tenim $\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{a}H_a(\lambda) = J(a)$ i (40) queda provat.

10.2. **El principi del colomar i algunes aplicacions.** El conegut com *Principi del colomar*, o també com *Principi de Dirichlet* consisteix en un resultat molt clar i de sentit comú: *Si repartim $N+1$ objectes en $K \le N$ categories, com a mínim hi ha una categoria amb 2 o més objectes.* Aquest fet va ser usat per Dirichlet en qüestions de Teoria de Números. El que més sorprén, no és el principi en sí, sinó que tingui aplicacions matemàtiques interessants. El seu primer nom és degut a que sovint s'introdueix parlant de N coloms que van a un colomar dividit en K compartiments.

Figura 33. Principi del colomar: 10 coloms i 9 compartiments.

Per exemple, una conseqüència sorprenent i divertida, extreta de [84], és que, donat un conjunt de 10 naturals entre 1 i 106, sempre hi ha dos subconjunts disjunts, no buits, que tenen la mateixa suma.

Per a demostrar-ho, les caixes del colomar seran els possibles valors de les sumes de tots els conjunts formats per, com a molt, 10 números menors que 107. Aquestes sumes van des de 1 fins a $97 + 98 + \cdots + 106 = 1015$. Qualsevol conjunt A format per 10 números naturals ()menors que 107) té $2^{10} = 1024$ parts, que seran els coloms, i la suma de tots els elements de cada part ens dirà a quina casella del colomar va aquesta part. Com que el nombre total de valors possibles de les sumes és 1015, és segur que hi ha dues parts diferents, diguem A_1 i A_2, que tenen la mateixa suma. Si aquests dos subconjunts són disjunts, ja hem provat el que volíem. Si no ho són, podem treure $A_1 \cap A_2$ de tots dos, obtenint dues parts de A, més petites, disjuntes no buides i de la mateixa suma, tal i com volíem provar.

Un altre resultat força interessant que es pot provar usant aquest principi és el Teorema d'aproximació de Dirichlet: *per a tot número real* $\alpha \in \mathbb{R}$, *hi ha infinits números racionals* $p/q \in \mathbb{Q}$ *tals que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}. \tag{41}$$

De fet, Borel, l'any 1903, va millorar d'aquest teorema, provant que el mateix era cert, però amb una fita superior més petita:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}.$$

Es pot veure, prenent $\alpha = \phi := (1+\sqrt{5})/2$ com el número d'or, que aquest resultat de Borel és òptim.

Com es veu a la Secció 2.5 com la "velocitat" amb la que els números racionals es poden acostar a un número irracional, controlada en termes del exponent del seu denominador, està relacionada, per exemple, amb el fet que α sigui algebraic o transcendent.

Anem a demostrar en primer lloc l'existència d'un número racional complint (41). Podem suposar que $\alpha > 0$, i a més irracional, ja que si no el resultat és trivial prenent com p/q el mateix α.

Per aplicar el principi del colomar, comencem dividint el conjunt $[0,1)$ en N caixes, $C_1, C_2, \ldots, C_N$, on $C_i = [(i-1)/N, i/N)$. Cada un d'aquest conjunts serà un compartiment del colomar.

Ara necessitem els "coloms". Donat un número real no negatiu qualsevol x, es defineix la seva *part sencera* com el número natural més proper a ell, d'entre tots els nombres naturals més petits. Aquesta part sencera es denota per $[x]$. El número $\{x\} = x - [x]$ s'anomena *part decimal* de x. Així, $x = [x] + \{x\}$, amb $[x] \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $0 \le \{x\} < 1$. Per exemple, $[\pi] = 3$ i $\{\pi\} = 0.141592\ldots$ Prenem com a "coloms" els $N+1$ números reals:

$$\{0\}, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \ldots, \{j\alpha\} \ldots \{N\alpha\}.$$

Com que α és irracional, tots ells són diferents i estan a l'interval $[0,1)$. Pel principi de Dirichlet, n'hi ha com a mínim dos d'ells, diem $\{j\alpha\}$ i $\{k\alpha\}$, amb $k > j$, a la mateixa caixa. Per tant $|\{k\alpha\} - \{j\alpha\}| < 1/N$. Així,

$$\left|k\alpha - [k\alpha] - (j\alpha - [j\alpha])\right| < \frac{1}{N}.$$

Prenent $q := (k-j) \in \mathbb{N}$ i $p := [k\alpha] + [j\alpha] \in \mathbb{N}$, obtenim que $|q\alpha - p| < 1/N$. Dividint per q i usant que $q \le N$, ja que k i j són menors que N, es té

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qN} \le \frac{1}{q^2},$$

tal i com volíem provar. Per acabar, hem de veure que hi ha infinits nombres racionals complint (41). Donat p/q satisfent la desigualtat podem considerar un nou $N' > N$ tal que

$$\frac{1}{N'} < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|.$$

Usant el mateix mètode obtenim un nou $p'/q' \in \mathbb{Q}$ complint (41) i tal que

$$\left|\alpha - \frac{p'}{q'}\right| < \frac{1}{q'N'} < \frac{1}{N'} < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|,$$

per tant diferent a p/q. Repetint el procés indefinidament obtenim els infinits nombres racionals desitjats i el Teorema de Dirichlet queda demostrat.

Agraïments. L'autor vol agrair Gregori Guasp, Maria Jolis i Francesc Mañosas, els seus comentaris i suggeriments durant la redacció d'aquest treball. A més, de nou a Gregori Guasp la seva ajuda en la preparació de moltes de les il·lustracions que conté. L'autor està recolzat pels projectes MINECO MTM2016-77278-P FEDER i per la Generalitat de Catalunya, projecte 2017SGR1617.

Referències

[1] M. Aigner, G. M. Ziegler, Proofs from The Book. Fifth edition. Including illustrations by Karl H. Hofmann. Springer-Verlag, Berlin, 2014.
[2] C. Alsina, R. B. Nelsen, Charming Proofs: A Journey into Elegant Mathematics, Dolciani Mathematical Expositions 42, 2010. AMS/MAA Press.
[3] T. M. Apostol, *Ptolemy's inequality and the chordal metric*. Mathematics Magazine 40 (1967), 233–235.
[4] N. Backhouse, *Pancake functions and approximations to* π. Note 79.36, Math. Gazette 79 (1995), 371–374.
[5] C. Baltus, *D'Alembert's proof of the fundamental theorem of algebra*. Historia Math. 31 (2004), 414–428.
[6] O. Benoist, *Writing positive polynomials as sums of (few) squares*. Eur. Math. Soc. Newsl. 105 (2017), 8–13.
[7] M. Bicknell-Johnson, *Pythagorean triples containing Fibonacci numbers: solutions for* $F_n^2 \pm F_k^2 = K^2$. Fibonacci Quart. 17 (1979), 1-–12.
[8] G. Blekherman, *Nonnegative polynomials and sums of squares*. Semidefinite optimization and convex algebraic geometry, 159–202, MOS-SIAM Ser. Optim., 13, SIAM, Philadelphia, PA, 2013.
[9] L. M. Blumenthal, B. E. Gillam, *Distribution of points in n-space*. Amer. Math. Monthly 50 (1943), 181–185.
[10] A. Bogomolny, *Cut the dot, Proofs*. http://www.cut-the-knot.org/proofs/index.shtml
[11] A. Bogomolny, *Cut the dot, Geometry, proof 1094: Morley's Miracle*. http://www.cut-the-knot.org/geometry.shtml
[12] B. Bollobás, Modern Graph Theory. Springer, New York, NY, 1998.
[13] D. Borwein, J. M. Borwein, *Some remarkable properties of sinc and related integrals*, The Ramanujan Journal 5 (2001), 73–89.
[14] D. Broline, *Renumbering of the faces of dice*. Mathematics Magazine 52 (1979), 312–315.
[15] A. Broman, *Holditch's Theorem (A fresh look at a long-forgotten theorem)*. Mathematics Magazine 54 (1981), 99–108.
[16] W. Burnside, *On the rational solutions of the equation* $x^3+y^3+z^3 = 0$ *in quadratic fields*. Proc. London Math. Soc. 14 (1915), 1–4.
[17] H. Cartan, Teoría elemental de funciones analíticas de una o varias variables complejas. Selecciones científicas. Madrid 1968.
[18] J.-L. Chabert *et al.*, A history of algorithms. From the pebble to the microchip. Translated from the 1994 French original by Chris Weeks. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
[19] M. Chamberland, Single digits. In praise of small numbers. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2015.
[20] H. Cohn, *A Short Proof of the Simple Continued Fraction Expansion of e*. The American Mathematical Monthly 113 (2006), 57–62.

[21] N. B. Conkwright, *An Elementary Proof of the Budan-Fourier Theorem*. The American Mathematical Monthly 50 (1943), 603–605.
[22] K. Conrad *The Gaussian integral,* http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/analysis/gaussianintegral.pdf
[23] J. L. Coolidge, *A historically interesting formula for the area of a quadrilateral*. American Mathematical Monthly, 46 (1939) 345–347.
[24] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, Using algebraic geometry, Springer-Verlag New York 1998.
[25] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, Geometry Revisited, Math. Assoc. Amer. 1967.
[26] D. R. Curtiss, *Recent extensions of Descartes' rule of signs*. Annals of Mathematics 19 (1918), 251–278.
[27] D. P. Dalzell, *On* 22/7. J. London Math. Soc. 19, (1944), 133–134.
[28] D. P. Dalzell, *On* 22/7 *and* 355/113. Eureka: the Archimedian's Journal 34 (1971), 10-–13.
[29] J.-P. Delahaye, Mathématiques pour le plaisir. Un inventarie de curiosités. Belin, Pour la Science, Paris 2010.
[30] A. Dickenstein, J. M. Rojas, K. Rusek, J. Shih. *Extremal Real Algebraic Geometry and $\mathcal{A}$-Discriminants*. Moscow Math. Journal 7 (2007), 425–452.
[31] W. Dunham, Journey through genius. The great theorems of mathematics. Penguin Books, New York 1991.
[32] R. J. Dwilewicz, J. Minác. *Values of the Riemann zeta function at integers*. Materials Matemàtics 2009, treball 6, 26 pp.
[33] S. N. Elaydi, An introduction to difference equations. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1996.
[34] C. Fefferman, *Classroom Notes: An Easy Proof of the Fundamental Theorem of Algebra*. Amer. Math. Monthly 74 (1967), 854–855.
[35] G. Galperin, G. Ronsse, *Lazy Student Integrals*. Mathematics Magazine 81 (2008), 152–154.
[36] F. R. Gantmacher, The Theory of Matrices, Vol. 2, Chelsea, New York 1959.
[37] M. Gardner, Mathematical Puzzles & Diversions. The University of Chicago Press 1961.
[38] M. Gardner, New Mathematical Diversions. The Mathematical Association of America 1995.
[39] C. E. Garza-Hume, M. C. Jorge, A. Olvera, *Quadrilaterals and Bretschneider's Formula*. The Mathematics Teacher 111 (2018), 310–314.
[40] A. Gasull, *Integració de funcions racionals i π*. Materials Matemàtics 2018, treball 2, 28 pp.
[41] A. Gasull, *Algoritmos sencillos para calcular π*. Gac. RSME 22 (2019), 131–143.
[42] A. Gasull, *Joies Matemàtiques*. Per aparèixer a Nou Biaix.
[43] M. Giaquinto, *Mathematical proofs: the beautiful and the explanatory*. J. Humanist. Math. 6 (2016), 52–72.
[44] M. de Guzmán, Aventuras matemáticas. Una ventana hacia el caos y otros episodios. Ed. Pirámide, Madrid 2004.
[45] B. Haas, *A simple counterexample to Kouchnirenko's conjecture*. Beiträge zur Algebra und Geometrie 43 (2002), 1–8.
[46] R. Hammack, BOOK OF PROOF, 2003. Disponible en versió electrònica a https://www.people.vcu.edu/~rhammack/BookOfProof/BookOfProof.pdf.
[47] G. H. Hardy, *The Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$*. The Mathematical Gazette 80 (1909), 98–103.
[48] G. H. Hardy, A Mathematician's Apology, Cambridge University Press, Cambridge, 1969.
[49] G. H. Hardy, E. M. Wright, An introduction to the theory of numbers. Fifth edition. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979.
[50] A. Hess, *A highway from Heron to Brahmagupta*. Forum Geom. 12 (2012), 191–192.
[51] M. W. Hirsch, S. Smale, Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y algebra lineal. Alianza universidad Textos 61. Alianza Editorial, Madrid 1983.
[52] M. D. Hirschhorn, *An amazing identity of Ramanujan*. Math. Mag. 68 (1995), 199–201.
[53] R. Honsberger, Mathematical gems from elementary combinatorics, number theory, and geometry. The Dolciani Mathematical Expositions, 1. The Mathematical Association of America, Buffalo, N.Y. 1973.
[54] R. Honsberger, Mathematical gems. II. Dolciani Mathematical Expositions, 2. The Mathematical Association of America, Washington, D.C. 1976.

[55] R. Honsberger, Mathematical gems. III. The Dolciani Mathematical Expositions, 9. Mathematical Association of America, Washington, D.C. 1985.

[56] D. Kalman, *Six Ways to Sum a Series*. The College Mathematics Journal 24 (1993), 402–421.

[57] D. Kalman, *An elementary proof of Marden's theorem*. Amer. Math. Monthly 115 (2008), 330—338.

[58] D. Kalman, *The Most Marvelous Theorem in Mathematics*. Math. Horizons, April 2008, 16–17.

[59] A. G. Khovanskiĭ, *On a class of systems of transcendental equations*. Doklady Akad. Nauk. SSSR 255 (1980), 804–807; Soviet Math. Dokl. 22 (1980), 762–765.

[60] D. A. Klain, *An intuitive derivation of Heron's formula*. Amer. Math. Monthly 111 (2004), 709–712.

[61] O. Kouteynikoff, *La démonstration par Argand du théorème fondamental de l'algèbre*. Bulletin de l'APMEP 462 (2006), 122–137.

[62] L. J. Lander, T. R. Parkin, *Counterexample to Euler's conjecture on sums of like powers*. Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 1079.

[63] L. J. Lange, *An elegant continued fraction for* π. Amer. Math. Monthly 106 (1999), 456-–458.

[64] M. Lange, *Explanatory proofs and beautiful proofs*. J. Humanist. Math. 6 (2016), 8–51.

[65] W. G. Leavitt, *The sum of the reciprocals of the primes*. Two-Year College Mathematics Journal, 10 (1979), 198-–199.

[66] K. P. Litchfield, *Proof by game*. Mathematics Magazine 67 (1994), 281.

[67] F. Lucas, *Sur une application de la Mécanique rationnelle à la théorie des équations*. C.R. Hebd. Séances Acad. Sci. LXXXIX (1879), 224–226.

[68] S. K. Lucas, *Integral proofs that* $355/113 > \pi$. Austral. Math. Soc. Gaz. 32 (2005), 263–266.

[69] S. K. Lucas, *Approximations to* π *derived from integrals with nonnegative integrands*. Amer. Math. Monthly 116 (2009), 166-–172.

[70] Y. Matsuoka, *An elementary proof of the formula* $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$. Amer. Math. Monthly 68 (1961), 485–487.

[71] M. Mendès France, *Nombres transcendants et la diagonale de Cantor*. Images des mathématiques 2006. CNRS, Paris.

[72] L. Moser, *On the Series* $\sum 1/p$. The American Mathematical Monthly 65 (1958), 104–105.

[73] T. S. Motzkin. *The arithmetic-geometric inequality*. In Inequalities (Proc. Sympos. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965), pages 205–224. Academic Press, New York, 1967.

[74] W. Narkiewicz, The Development of Prime Number Theory, Springer-Verlag, New York, 2000.

[75] R. B. Nelsen, Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking, Mathematical Association of America, 1997.

[76] R. B. Nelsen, Proofs without Words II: More Exercises in Visual Thinking, Mathematical Association of America, 2000.

[77] J. Neunhäuserer, 12^2 beautiful mathematical theorems with short proofs. Preprint.

[78] D. A. Nield (mal escrit Neild a l'article), *Rational approximations to pi*. New Zealand Math. Mag. 18 (1981/82), 99–100.

[79] I. Niven, *A simple proof that* π *is irrational*. Bull. Amer. Math. Soc. 53, (1947). 509.

[80] I. Niven, Numbers: rational and irrational. New Mathematical Library, 1 Random House, New York-Toronto 1961

[81] O. Ore, *On the Averages of the Divisors of a Number*. The American Mathematical Monthly 55 (1948), 615–619.

[82] T. J. Osler, *A proof of the continued fraction expansion of* $e^{1/M}$. Amer. Math. Monthly 113 (2006), 62-–66.

[83] I. Papadimitriou, *A simple proof of the formula* $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \pi^2/6$. American Mathematical Monthly 80 (1973), 424–425.

[84] J. Pla i Carrera, *El principi de les caselles*. Sessions de Preparació per a l'Olimpíada Matemàtica, Publicacions Electròniques de la Societat Catalana de Matemàtiques, Josep Grané (Ed.), Segona Edició, 2004.

[85] B. Polster, Q.E.D. Beauty in mathematical proof. Wooden Books. Walker & Company, New York, 2004.

[86] B. Pritsker, Geometrical Kaleidoscope. Courier Dover Publications, 2017, 144 pàgines.

[87] H. Rademacher, O. Toeplitz, Números y figuras. Alianza Editorial. Madrid 1970.

[88] C. H. Raifaizen, *A Simpler Proof of Heron's Formula*. Mathematics Magazine. 44 (1971), 27–28.
[89] A. Ralston, A first course in numerical analysis. McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto-London 1965.
[90] S. Ramanujan Aiyangar, The Lost Notebook and Other Unpublished Papers, New Delhi, Narosa, 1988.
[91] P. Ribenboim, The New Book of Prime Number Records, Springer-Verlag, New York, 1996.
[92] D. P. Robbins, *Areas of polygons inscribed in a circle*. Amer. Math. Monthly 102 (1995), 523-–530.
[93] K. H. Rosen, Elementary number theory and its applications. Fourth edition. Addison-Wesley, Reading, MA, 2000.
[94] G.-C. Rota, The Phenomenology of Mathematical Beauty. Indiscrete Thoughts, Chap. 10, pp. 121–133. Edited by Fabrizio Palombi. Basel: Birkhäuser Verlag AG, 1997.
[95] W. Rudin, *Sums of squares of polynomials*. Amer. Math. Monthly 107 (2000), 813–821.
[96] F. Saidak, *A New Proof of Euclides' Theorem*. Amer. Math. Monthly 113 (2006), 937–938.
[97] D. Schattschneider, *Beauty and truth in mathematics*. Mathematics and the Aesthetic: New Approaches to an Ancient Affinity, N. Sinclair, D. Pimm,W. Higgenson (editors), Springer, New York, 2006, pp. 41–57.
[98] H. Schmid, *Two curious integrals and a graphic proof*. Elem. Math. 69 (2014), 11-–17.
[99] D. Shanks, *Improving an approximation for Pi*. The American Mathematical Monthly 99 (1992), 263.
[100] A. Singh, *Comparing Cardinalities of Sets*. Mathematics News Letter, Ramanujan Mathematical Society (2013), 1–6.
[101] J. M. Steele, *A scholium on the integral of $sin(x)/x$ and related topics*. Apunts de classe.
[102] I. Stewart, *Cooking the classics*. Math. Intelligencer 33 (2011), 61-–71.
[103] I. Stewart and D. Tall, The Foundations of Mathematics, Oxford University Press, London, 2000.
[104] C. Störmer, *Sur une généralisation de la formule* $\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{1} - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3}\cdots$. Acta Math. 19 (1895), 341–350.
[105] Sh. Strelitz, *On the Routh-Hurwitz problem*. Amer. Math. Monthly 84 (1977), 542–544.
[106] J. Suzuki, *On coefficients of cyclotomic polynomials*. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 63 (1987), 279–280.
[107] T. Takeshima, *Strelitz test for stable polynomials and its application to design problems of control systems*. J. Japan Soc. Symb. Alg. Comp. 11 (2005), 153–164.
[108] V. G. Tikekar, *Some Interesting Mathematical Gems*. Resonance-Journal of science education 11 (2006), 29–42.
[109] N. Walls, *An elementary proof of Morley's trisector theorem*. Edinburgh Math. Notes 1944, (1944), 12–13.

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona
Email address: gasull@mat.uab.cat