



Luiz Fernando da Silva Gouveia

Classificação de centros e estudo de ciclos limite para sistemas lineares por partes em duas zonas no plano

ABSTRACT

This work is divided into two parts. At first part we introduce the nomenclature of Fillipov and the basics concepts and then we will study the classification of centers in piecewise linear systems in the plan. To this end we find a change of variables that allows us to reduce the initial twelve parameters to five. In the second part of this work we study the emergence of limit cycles for this class of systems through the Poincaré applications in each region of the plan. In this work we will consider only the case where the set of discontinuity has no sliding regions.

Key-words: Fillipov, Center Problem-Focus, Applications Poincaré Regions Sewing

SUMÁRIO

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Sistemas Lineares por Partes em Duas Zonas no Plano	3
1.2 Pontos Singulares Monodrômicos	6
1.3 Formas Normais	7
2 Problema do Centro-Foco em Duas Zonas	14
2.1 Caso 1	14
2.2 Caso 2	19
2.3 Caso 3	20
2.4 Caso 4	20
2.5 Caso 5	21
2.6 Caso 6	21
2.7 Caso 7	22
2.8 Caso 8	22
2.9 Caso 9	23
2.10 Caso 10	23
2.11 Caso 11	24
2.12 Caso 12	25
2.13 Caso 13	25
3 Aplicação de Poincaré e Ciclos Limites	29
3.1 A Aplicação de Poincaré $P_L(y)$	33
3.2 A Aplicação de Poincaré $P_R(y)$	37
3.3 A Aplicação Geral de Poincaré	40

3.4 Ciclos Limites	43
4 Conclusão	49
Bibliografia	50
A Unicidade do Ciclo Limite	52

INTRODUÇÃO

O surgimento de ciclos limites na teoria clássica de Sistemas Dinâmicos Contínuos é um dos problemas mais intrigantes e que até hoje não se tem uma resposta completa. Ao migrarmos para o estudo de Sistemas Dinâmicos Descontínuos, é natural que certos problemas da teoria clássica sejam migrados também, e o surgimento de ciclos limites não foge a regra.

No estudo de Sistemas Dinâmicos Descontínuo, buscamos, sempre que possível, estender os resultados da teoria clássica do caso contínuo. Entretanto em vários problemas estas ferramentas não se aplicam ou necessitam de novas reformulações e estratégias para serem utilizadas. Além disso, no caso descontínuo, muitas vezes surgem resultados inesperados que fogem a nossa intuição. Por exemplo, o surgimento de ciclos limites em sistemas lineares por partes.

Sistemas lineares por partes constituem uma classe de sistemas diferenciais que são amplamente utilizados para modelar muitos problemas reais em diferentes ambientes e são, muitas vezes motivados por problemas da engenharia e biomatemática [3]. Após o trabalho pioneiro de Filippov [7], deve-se destacar nesta área os trabalhos de Coll, Gasull e Prohens [2], Giannakopoulos e Pliete [8], Huan e Yang [12], Kuznetsov, Rinaldi e Gragnani [17], Llibre, Ponce e Torres [13], Shui, Zhang e Li [16] e o trabalho minucioso de Guardia, Seara e Teixeira [9].

O caso dos sistemas lineares por partes em duas zonas no plano é a mais simples configuração possível em sistemas suaves por partes e tal família de sistemas, no caso contínuo, foi completamente estudado em [6], no qual, em particular, foi estabelecida a existência de no máximo um ciclo limite. No entanto, este resultado está longe de ser um resultado geral, pois como mencionado em [12], o estudo dos sistemas lineares por partes no plano, além de ser uma tarefa trabalhosa, apresenta um alto grau de dificuldade, devido à falta de uma forma canônica que possa lidar com uma classe suficientemente ampla de sistemas. Por isso, os resultados apresentados até então são referentes a casos particulares, como os apresentados na segunda parte deste nosso trabalho. Mais precisamente, estudamos sistemas da forma

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = Z(u, v) = \begin{cases} X^+(u, v) = A^+ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + B^+ & \text{se } u \geq 0 \\ X^-(u, v) = A^- \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + B^- & \text{se } u \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

onde $A^\pm = a_{ij}^\pm$ são matrizes constantes 2×2 e $B^\pm$ são vetores constantes de $\mathbb{R}^2$, permitindo apenas regiões de costura. Neste caso, mostramos que o sistema acima apresenta no máximo um ciclo limite (veja a Seção 3.4 do Capítulo 3).

Ainda para sistemas lineares por partes em duas zonas no plano, um dos problemas mais clássicos foi o *Problema do Centro-Foco*, que consiste em determinar condições necessárias e suficientes que nos permita classificar quando uma singularidade monodrômica é centro ou foco. Para resolvermos tal problema podemos calcular a solução explícita do campo e encontrarmos as constantes de Lyapunov através da Aplicação de Poincaré. Em [11] é apresentada uma outra ferramenta que nos permite também resolver o *Problema do Centro-Foco*. No nosso trabalho resolvemos o problema em questão através de treze casos, nos quais em oito casos mostramos a existência de centros e nos demais a existência de focos. Estes casos estão detalhados no Capítulo 2.