

ESTUDI D'ALGUNS PROBLEMES DE TEORIA QUALITATIVA AL PLA, AMB APLICACIONS ALS SISTEMES DEPREDADOR-PRESA

Antoni Guillamon i Grabolosa

Memòria presentada per a aspirar al
grau de doctor en Ciències Matemàtiques.

Departament de Matemàtiques,
Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, Juny de 1995.

CERTIFICO que la present memòria
ha estat realitzada per
L'Antoni Guillamon i Grabolosa,
i dirigida per mi, al Departament de
Matemàtiques de la Universitat Autònoma
de Barcelona.

Bellaterra, Juny de 1995.

Dr. Armengol Gasull i Embid.

Als meus pares, al meu germà, i a l'Assumpta.

ÍNDIX

INTRODUCCIÓ	iv
-------------------	----

Capítol I: SOBRE LES SOLUCIONS PERIÓDIQUES D'UNA EQUACIÓ DE LIÉNARD GENERALITZADA, AMB APLICACIONS ALS SISTEMES DEPRÉDADOR-PRESA

Resum	1
1. Introducció	2
2. Resultats principals	3
3. La transformació de Filippov generalitzada	6
4. Demostracions dels teoremes i resultats relacionats	8
5. Exemples	14
Bibliografia	29

Capítol II: ESTUDI DE SISTEMES LOTKA-VOLTERRA PERTORBATS VIA INTEGRALS ABELIANES

Resum	32
1. Introducció	33
2. Formulació en termes d'integrals abelianes	34
3. Sistemes amb un nombre qualsevol de cicles límit	37
4. Una funció de pertorbació simple	39
5. Funció de pertorbació amb termes lineals, quadràtics i exponencials	50
Apèndix A. Càlcul de les constants de Liapunov	59
Apèndix B. Nombre de tangents a una corba que passen per un punt	62
Bibliografia	64

Capítol III: CONDICIONS GEOMÈTRIQUES PER A L'ESTABILITAT D'ÒRBITES EN SISTEMES AL PLA

Resum	66
1. Introducció	67
2. Eines principals	70
3. Punts crítics en sistemes orbitalment dissipatius	74
4. Estabilitat de les òrbites periòdiques en sistemes orbitalment dissipatius	82
5. Existència d'òrbites periòdiques en sistemes orbitalment dissipatius	86
6. Estabilitat asimptòtica global	87
Apèndix A. Demostració del Teorema 4.3	90
Apèndix B. Una demostració de $\operatorname{div}_g \left(\frac{X(x)}{\ X(x)\ _g} \right) = K_g^\perp(x)$	94
Bibliografia	94

Capítol IV: APLICACIONS DE MÈTRIQUES DE RIEMANN A SISTEMES D'EQUACIONS DIFERENCIALS AL PLA

Resum	96
1. Introducció	97
2. Generalització del Criteri de Bendixson-Dulac	98
3. Sobre el nombre de configuracions de cicles límit	100
4. Conques d'atracció de punts crítics	105
Apèndix A. Demostració autocontinguda del Teorema 4.3	112
Bibliografia	115

Capítol V: CÀLCUL DE CONSTANTS DE LIAPUNOV I DE PERÍODE

Resum	117
1. Introducció	118
2. Organització del capítol	119
3. Definicions i resultats preliminars	121
4. Estudi del sistema general i exemples	131
5. Sistemes amb part no lineal homogènia	146
Apèndix A. Un mètode analítico-numèric per al càlcul de constants	165
Apèndix B. Un mètode especial per a l'equació d'Abel	169
Bibliografia	181

Introducció

La història de la ciència i la tècnica s'alimenta de la necessitat de l'home d'explicar-se els fets naturals, de predir objectivament el futur i, en última instància, d'intervenir-hi activament. És indubtable que les matemàtiques, en la seva vessant de llenguatge de la ciència, prenen un paper important en l'assoliment d'aquestes necessitats. Les equacions diferencials, des que Newton i Leibniz van introduir el càlcul diferencial el 1682, han estat possiblement una de les eines més eficaces a l'hora de modelar directament en un llenguatge abstracte allò que passa a la realitat i s'han convertit avui en dia en un dels pilars de la filosofia matemàtica. Així ho vaticinava ja I. Newton en el missatge críptic que deixà en forma d'anagrama, "*Data aequatione quocunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa*", que ben ordenat i en llenguatge actual ens diu que resoldre equacions diferencials és útil.

Malgrat que les afirmacions de Newton van ser fetes ja fa tres segles, l'esplendor en l'estudi de les equacions diferencials no va arribar fins ara fa cent anys, aproximadament, de la mà d'H. Poincaré. De tota manera, en l'intermedi, nombrosos matemàtics s'hi van dedicar, però en una línia ben diferent de la que el matemàtic francès havia d'encetar. La preocupació dels seus predecessors se centrava principalment en la integració o quadratura de les equacions diferencials. En l'època de Poincaré, s'entreveia ja que era un camí massa costós pels fruits que donava.

L'originalitat del treball de Poincaré, exposat en un article en 4 parts entre 1881 i 1886 rau en una concepció diferent de les equacions diferencials. Per a ell, deixen de ser objectes purament formals subjectes a regles de càlcul, i passen a tenir un sentit geomètric, donant peu al que s'ha anomenat *Teoria Qualitativa d'Equacions Diferencials*.

Tot i que considera únicament equacions en dues variables, moltes de les idees que va introduir s'han aplicat igualment a dimensions més altes. Poincaré proposa descriure el *retrat de fase* de l'equació diferencial, que no és res més que el recull de la informació

mínima sobre les òrbites capaç de determinar la seva estructura topològica. Ell és qui encunya el nom de “cicle límit” i desenvolupa conceptes teòrics tan importants com el d'*aplicació de retorn* o el *Teorema de la Regió Anular*, que amb la contribució del matemàtic suec I. Bendixson el 1901 desembocaria en el cèlebre Teorema de Poincaré-Bendixson. Aquest resultat afirma que les solucions que realment ens interessin són les anomenades *singulars* (punts crítics, òrbites periòdiques i separatrius), ja que -sota condicions de compacitat- tota altra corba solució tendeix a un conjunt de corbes singulars, també anomenat conjunt límit. Així, el retrat de fase ve determinat pel caràcter i la configuració de les solucions singulars.

Fent servir el mateix terme diríem que la Teoria Qualitativa fa un retrat de l'equació diferencial, fixant-se només en allò més significatiu: les solucions singulars.

Si bé des dels nostres dies valorem altament la contribució de Poincaré, la introducció de la nova teoria va ser lenta fins a la segona dècada d'aquest segle, tot i que el ressò va ser important: a Rússia, l'equip d'A. Liapunov s'havia interessat també pels nous mètodes i hi estava treballant, mentre que el matemàtic alemany D. Hilbert, el 1900, proposava entre els seus celebrats “problemes” el següent (segona part del problema 16è):

Quin és el màxim nombre $H(n)$ de cicles límit d'un camp polinomial de grau n ,

$$\begin{cases} \dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y)? \end{cases}$$

Quina és la seva configuració?

Tal com veurem, el problema és massa complex per ser atacat tot d'una.

Dels anys posteriors, ens agradaria destacar diverses aportacions:

- (1) L'any 1923, H. Dulac demostra (erròniament, segons es va provar més tard) la finitud de cicles límit en un camp polinomial determinat al pla. Malgrat el forat que deixa en la demostració, les idees que hi empra són aprofitables. És el primer pas en la direcció que marcà Hilbert el 1900.
- (2) A. Andronov i L. Pontryagin es preocupen durant els anys 30 d'un dels temes fonamentals de la Teoria Qualitativa: l'estabilitat estructural. Es tracta de saber quins retrats de fase no alteren la seva topologia sota petites variacions dels coeficients de l'equació diferencial. Quan això no es compleix, cal entrar en l'estudi de les *bifurcacions*.

- (3) El 1926, B. van der Pol obté una equació diferencial per descriure les oscil·lacions d'amplitud constant en un tríode al buit i usa mètodes gràfics per provar l'existència d'una òrbita periòdica. Més endavant, el 1929, A. Andronov establiria la relació amb la idea de cicle límit de Poincaré. És la primera constatació a les aplicacions de l'existència de cicles límit.
- (4) El 1928, l'enginyer francès A. Liénard publica un treball a la *Révue générale d'électricité*, la formulació matemàtica del qual guarda una forta relació amb la de l'oscil·lador de van der Pol.
- (5) A mitjans dels anys vint, el biòleg italià U. D'Ancona busca en l'ajut del matemàtic V. Volterra una explicació de les dades sobre les captures de selacis al port de Fiume (Itàlia) entre 1914 i 1923. La resposta de Volterra és en forma d'equació diferencial al pla, agrupant en una variable les preses i en l'altra els depredadors. És l'inici de les aplicacions al camp de la biologia.

El problema de la finitud tractat per Dulac des de 1889 fins a 1923 es va donar per cert fins a 1981. Finalment, la demostració va resultar ser falsa. El 1985, i per vies ben diferents, Y. Ilyashenko i J. Écalle van resoldre l'esmentada conjectura. Actualment, hi ha un nodrit grup de matemàtics que investiguen en problemes de finitud.

No obstant, durant tot aquest segle s'han obtingut molts resultats parcials sobre el 16è problema de Hilbert. Hi ha diversos resultats del tipus $H(n) \geq h_n$ obtinguts constructivament. N. Bautin (1952) afirmà que $H(2) \geq 3$ i I. Petrovskii i E. Landis (1955), que $H(2) = 3$. Els mateixos I. Petrovskii i E. Landis, el 1967, reconegueren un error en un lema que invalidava el resultat. Més tard, simultàniament, Shi S. (1979) i Chen L. i Wang M. (1979) trobaren un exemple que mostrava que $H(2) \geq 4$. D'altra banda, Li J. i Huan Q. (1987) demostraren que $H(3) \geq 11$. Però queda encara molta feina per tal de conèixer millor $H(n)$.

La propietat d'estabilitat estructural és de gran utilitat a les aplicacions, ja que la modelització matemàtica dels sistemes dinàmics acostuma a comportar l'aparició de paràmetres. El grau d'estabilitat estructural d'un sistema ens indicarà la fiabilitat del seu retrat de fase al variar sensiblement els paràmetres i, per tant, si el podem utilitzar per tal d'interpretar el fenomen que s'ha modelat. Quan un sistema no és estructuralment estable, diem que presenta una bifurcació en l'espai de paràmetres.

Quant als altres tres problemes, a part del seu valor intrínsec, van suposar un pas important en l'aplicació de les equacions diferencials. Nombrosos treballs en el camp de la tecnologia electrònica, especialment a la Unió Soviètica, van seguir el camí obert

per l'equació de van der Pol. D'altra banda, amb els treballs de Kolmogorov (1934) i Gause (1936), la teoria de models depredador-presa va agafar un fort impuls, en un intent de generalitzar i refinar la idea inicial de Lotka i Volterra. No hi ha dubte que l'interès des d'altres camps de la ciència per l'ús de les equacions diferencials, n'ha estimulat l'estudi. Avui, els models amb equacions diferencials s'han estès a molts altres problemes de biologia, física, química, economia, teoria de control, epidemiologia,... fins a convertir-les en una eina indispensable per a les aplicacions.

A part d'aquest repàs històric de les primeres manifestacions de la Teoria Qualitativa i de les seves continuacions, voldríem també citar alguns dels temes que han despertat interès en el transcurs d'aquest segle i que encara són motiu de treball. No són temes independents, ja que les relacions i encavalcaments entre ells són nombroses, però han marcat línies de recerca importants:

(6) *Teoria de cicles límit.*

A partir dels anys 40, hi ha hagut un interès creixent per aquest aspecte de la Teoria Qualitativa. Tot i que curta, la història d'aquest tema està farcida de noms propis dels quals és difícil destacar-ne. És remarcable, quant a conjunt, la contribució dels matemàtics soviètics i xinesos. Els problemes que més han centrat l'atenció han estat els de la no existència, la unicitat (en general, el nombre), l'estabilitat i la configuració dels cicles límit. Donada la seva dificultat, hi ha relativament pocs resultats de caire general, i els esforços s'han centrat en famílies particulars. La més estudiada ha estat la dels sistemes quadràtics. El llibre de Ye Y. (1965) i el compendi bibliogràfic de J.Reyn (1989) en són excel·lents referències.

(7) *Conjectura de Markus-Yamabe.*

L'any 1960, L.Markus i H.Yamabe establien la següent conjectura:

Sigui $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camp vectorial de classe C^1 amb $F(0) = 0$, tal que per a tota $x \in \mathbb{R}^n$ els valors propis de la matriu jacobiana $JF(x)$ tenen part real negativa. Llavors, $x = 0$ és un punt globalment asimptòticament estable.

El problema de l'estabilitat global, tant de punts crítics com d'òrbites periòdiques té una especial rellevància en les aplicacions, ja que assegura la tendència asimptòtica de qualsevol òrbita del flux del camp cap a una determinada solució singular o estat d'equilibri. La conjectura de Markus-Yamabe va ser provada per al cas $n = 2$ per C.Gutiérrez i R.Fessler, per separat, l'any 1993. Des del 1988, hi havia també un contraexemple (amb algunes imprecisions) de N.Barabanov que implicava la falsedat de la conjectura per a $n \geq 4$; el 1994, J.Llibre i J.Bernat

van corregir aquest error, redemostrant així la falsedat de la conjectura. A part del cas $n = 3$ queden encara moltes qüestions obertes.

(8) *Problema centre-focus*

La determinació de la multiplicitat d'un focus, així com la seva ciclicitat (nombre de cicles límit a què pot donar lloc sota pertorbacions), i les condicions per a l'existència de centres són els objectius principals d'aquest problema. A partir de l'aplicació de retorn de Poincaré, A.Liapunov considerà la importància dels termes de l'expansió en sèrie d'aquesta aplicació (les *constants de Liapunov*) en el cas d'un punt crític amb valors propis imaginaris purs. El Teorema de Hartman no classifica aquest tipus de punts i cal aprofundir més en el seu tractament. No obstant, les constants de Liapunov involucren una gran quantitat de càlculs que ben aviat col·lapsen les computadores actuals i s'han calculat principalment per a sistemes o famílies de sistemes concrets. Són de destacar les contribucions en aquest problema de H.Zoladek, que el 1992 escriví un article sobre la solució del problema de centre-focus, i del grup de col·laboradors de N.Lloyd, els quals han treballat el problema tant des d'un punt de vista teòric com computacional.

Un subtema que també ha suscitat interès darrerament és el dels centres isòcrons, en els quals totes les òrbites tancades tarden el mateix en donar una volta a l'origen. En lloc de les constants de Liapunov s'hi estudien les *constants de període*. Els treballs de W.Loud (1964) per a sistemes quadràtics i d'I.Pleshkan (1969) per a sistemes amb part no lineal cúbica donen els exemples més rellevants.

(9) *Pertorbacions de sistemes hamiltonians.*

Donada l'envergadura del problema 16è de Hilbert, la qüestió que s'hi proposava s'ha anat atacant parcialment des de moltes vessants. La més general de totes elles, coneguda també com el *problema 16è de Hilbert afeblit* o *problema d'Arnold-Hilbert* planteja el següent:

Estudiar el nombre de zeros de la integral

$$M(h) = \int_{\Gamma(h)} \frac{P \, dx + Q \, dy}{R},$$

on $\Gamma(h)$ són les corbes de nivell $H(x, y) = h$ del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases}$$

H , P i Q són polinomis de grau n i R un factor integrant. Les integrals $M(h)$ són conegudes com a *integrals abelianes* o, en un context més ampli, com a *funcions*

de Melnikov. El nombre de zeros simples de $M(h)$ i les seves multiplicitats determina el nombre de cicles límit que apareixen a partir de les òrbites periòdiques al pertorbar el sistema hamiltonià amb els polinomis P i Q :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon P, \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon Q, \end{cases}$$

i d'aquí la seva relació amb el problema de Hilbert. Durant l'última dècada han estat moltes les contribucions en aquesta teoria. En destaquem les aportacions d'A.Varchenko; L.Gavrilov i E.Horozov; B.Drachman, S.van Gils i Zhang Z.; Chow S., Li C. i Wang D.; i H.Zoladek, entre altres. Val a dir que la condició no polinòmica de les funcions que apareixen en el problema ha estat poc tractada.

(10) *Resolució de singularitats.*

El Teorema de Hartman classifica els punts crítics hiperbòlics al pla, però no dóna cap informació sobre els demés. Els centre-focus són un cas particular de punts no hiperbòlics, que tal com hem comentat reben un tractament especial. Per a la resta de punts, la tècnica més emprada a l'hora de detectar el tipus i nombre de sectors d'un punt crític és la dels "*blowing-up*", consistent en fer "explotar" el punt crític de manera que s'observi millor el comportament de les òrbites al seu entorn. Els treballs efectuats per F.Dumortier, R.Roussarie i J.Sotomayor des de 1977 són fonamentals per a comprendre aquesta tècnica.

En aquesta memòria, es contribueix modestament a alguns dels temes que acabem d'exposar, sempre des de sistemes d'equacions diferencials ordinàries al pla.

Els Capítols I i II estan dedicats a aplicacions a sistemes depredador-presa, des de punts de vista diferents.

En el Capítol I, es planteja un sistema d'equacions diferencials que generalitza els sistemes de Liénard i, alhora, engloba bona part dels models depredador-presa construïts a partir del de Lotka-Volterra. Generalitzem i utilitzem la transformació de Filippov, que explota una certa simetria de les òrbites, per donar bàsicament tres resultats: un criteri de no existència d'òrbites periòdiques, un altre sobre les condicions de centre i un tercer, d'unicitat i hiperbolicitat de cicles límit. El capítol es completa amb exemples d'aplicació, tant en sistemes biològics com en equacions de Liénard generalitzades.

En el Capítol II ens aproximem d'una altra manera als sistemes depredador-presa. S'aprofita la transformació del sistema de Lotka-Volterra en un sistema hamiltonià per treballar a continuació amb les seves pertorbacions, tal com hem introduït al punt (9).

L'objectiu és determinar el nombre de cicles límit generats per bifurcació de les corbes de nivell tancades del hamiltonià, igual que en el problema 16è de Hilbert afeblit. Cal assenyalar que tant la funció hamiltoniana H com algunes de les funcions de pertorbació P i Q que considerem en el capítol, no són polinòmiques. Primerament, per a una funció de pertorbació quadràtica i per a una altra amb un terme exponencial, obtenim sengles resultats d'unicitat. En la darrera secció, considerem una combinació d'ambdues funcions i hi observem certs entrebancs en el tractament via integrals abelianes; desgraciadament, no podem determinar el nombre exacte de cicles que bifurquen, però en donem evidències recolzades en experiments numèrics, en consideracions geomètriques i en l'estudi del problema de centre-focus. Efectivament, el coneixement de la multiplicitat de l'origen a través del càlcul de les constants de Liapunov, efectuat a l'Apèndix A d'aquest capítol, dona la informació necessària sobre el nombre de cicles límit que es poden generar al seu entorn. Així, contrastant el resultat amb la informació teòrico-numèrica que faciliten les integrals abelianes, intuïm el nombre màxim de cicles límit que poden aparèixer.

Per calcular les constants de Liapunov, en el Capítol II, utilitzem un nou mètode eminentment numèric, però que dona resultats fiables des del punt de vista teòric. No obstant, la punxa d'inseguretat que deixen els tractaments numèrics, unit amb l'interès de diverses persones de l'àrea de Sistemes Dinàmics de la U.A.B, ens va impulsar a l'estudi teòric de les constants de Liapunov, que hem desenvolupat en el Capítol V. De tota manera, el mètode numèric presentat a l'Apèndix A del Capítol II no el volem menysprear i, per això, a l'Apèndix A del Capítol V l'utilitzem per a calcular una de les constants de Liapunov generals. A més, les conclusions de l'Apèndix A del Capítol II es refermen a l'Exemple 4.a del Capítol V, en el qual s'obté el mateix resultat a partir de fórmules obtingudes de manera exacta.

Els Capítols III i IV tracten aspectes més bàsics de Teoria Qualitativa, però des de punts de vista menys habituals.

En el Capítol III, s'explota la consideració d'un nou operador, la curvatura ortogonal $K^\perp(X)$ d'un camp vectorial X , com a substitut de la divergència (on $K^\perp(X)(x)$ és la curvatura de l'òrbita del camp ortogonal a X que passa per x). Al llarg del capítol revisem, amb hipòtesis sobre $K^\perp$, totes aquelles qüestions de Teoria Qualitativa en les quals hi intervé la divergència i en donem resultats paral·lels (sobre tipus de punts crítics, existència d'òrbites periòdiques i estabilitat de cicles límit). L'estudi culmina amb una modificació en termes de la curvatura ortogonal de la Conjectura de Markus-Yamabe, on enunciem un criteri d'estabilitat global de l'origen. La idea fonamental

del capítol rau en què la divergència controla la tendència de les òrbites a acostar-se o allunyar-se entre sí, tenint en compte el temps de les solucions, mentre que la curvatura de les òrbites del camp ortogonal es fixa únicament en aspectes geomètrics, prescindint del temps de l'equació. Això dona una manera més essencial d'observar l'estabilitat de qualsevol òrbita.

En el Capítol IV, desenvolupem alguns resultats de Teoria Qualitativa en el supòsit que el pla $\mathbb{R}^2$ estigues dotat d'una mètrica de Riemann g , $(\mathbb{R}^2, g)$. El punt clau és que, encara que canviem la mètrica, no canviem la topologia del retrat de fase i, per tant, l'estabilitat de les òrbites del sistema no s'altera. Aquest avantatge l'aprofitem especialment per calcular conques d'atracció de punts crítics. En el capítol, donem una versió generalitzada del Teorema de Bendixson-Dulac, vàlida per a mètriques de Riemann, en funció del grup fonamental de la regió on la g -divergència no canvia de signe. Sota les mateixes hipòtesis, fem un estudi combinatori del nombre de configuracions de cicles límit. Finalment, generalitzem a $(\mathbb{R}^2, g)$, un mètode de N.Krasowskii (1954) per trobar conques d'atracció de punts crítics. Aquest darrer resultat també presenta una relació amb la Conjectura de Markus-Yamabe, ja que quan la conca d'atracció és tot el pla, tenim que el punt crític és globalment asimptòticament estable.

Finalment, en el Capítol V, es dona un mètode per calcular les constants de Liapunov i les constants de període, en el qual és fonamental el manteniment de l'estructura del sistema d'equacions en variable complexa. Utilitzem aquests resultats per trobar expressions generals de les tres primeres constants de Liapunov i de les dues primeres de període. Pel que sabem, la constant v_7 de Liapunov que facilitem, és la primera vegada que es dona explícitament. N.Lloyd i J.Pearson tenen un programa que pot calcular-la, però dona una expressió molt més intractable. Els mètode s'adapta especialment a l'equació d'Abel i, en particular, als sistemes amb part no lineal homogènia de grau n . En concret, deduïm la classificació de centres i de centres isòcrons per a $n = 2, 3$ (obtingudes prèviament per diversos autors) i donem les primeres constants de cada tipus per a $n = 5$.

Cadascun dels capítols es pot llegir independentment dels demés, ja que han estat redactats de manera autocontinguda, amb les referències al final de cada un d'ells. A més, tots contenen una introducció on s'explica més detalladament les qüestions que s'hi tracten.

Tots els resultats aquí presentats estan fets en col·laboració amb el Dr.Armengol Gasull. A més, el Capítol II forma part del treball conjunt amb el Dr.Li Chengzhi

i la Dra. Zhang Zhifen; el Capítol III és fruit de la col·laboració amb el Dr. Ronaldo A. Garcia; les discussions sobre els resultats del Capítol IV les vam compartir amb el Dr. Gregori Guasp; mentre que en el Capítol V, hem treballat conjuntament amb en Víctor Mañosa.

La major part dels resultats del Capítol I estan recollits en el treball titulat "*On the periodic solutions of a generalized Liénard equation with applications to predator-prey systems*", que està pendent d'acceptació a la revista *Differential Equations and Dynamical Systems*, després de les correccions post-referee. Una primera versió del Teorema A, juntament amb l'Exemple 5.6 i altres exemples estan publicats als *Proceedings d'Equadiff'91* sota el títol "*Non-existence of limit cycles for some predator-prey systems*".

Els resultats del Capítol II, amb l'excepció de l'Apèndix B, conformen el treball titulat "*Study of perturbed Lotka Volterra systems via Abelian integrals*", que està pendent d'acceptació a la revista *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, després de les correccions post-referee.

Els resultats del Capítol III estan com a *preprint* sota el títol "*Geometrical conditions for the stability of orbits in planar systems*".

Part dels resultats del Capítol IV van aparèixer als *Proceedings del XII CEDYA* sota el títol "*Applications of Riemannian metrics to systems of planar differential equations*".

Durant l'elaboració d'aquesta memòria, tal com es veu uns paràgrafs més amunt, he col·laborat amb diverses persones. L'experiència ha estat molt gratificant i per això vull agrair-los a tots la seva col·laboració i amistat.

Gran part d'aquest treball ha estat realitzat mentre gaudia d'una beca del Ministeri d'Educació i Ciència de l'Estat Espanyol, a qui he d'agrair aquest suport. També vull adreçar el meu agraïment als companys del Departament de Matemàtiques de la U.A.B, on m'he sentit sempre molt a gust. En especial, a tots aquells doctorands com jo, bons amics, amb qui he compartit preocupacions, més d'un maldecap i, sobretot, molts bons moments. Durant el darrer any, els companys del Departament de Matemàtica Aplicada I de la U.P.C, a l'E.U.P.B, també han facilitat tant com han pogut la meua feina, cosa que els agraeixo sincerament.

Finalment, dono les gràcies a la meua família i amics per saber entendre la manca de temps de dedicació a què m'ha dut de vegades la realització d'aquest treball i, en

particular, a l'Assumpta, la meva dona, per l'estímul que em va ajudar a encetar aquest camí i pel seu suport constant i bon humor.

I em guardo una dosi infinita d'agraïment pel Dr. Armengol Gasull, sense el qual aquest treball constaria només d'unes cobertes sense títol (i encara en dubto). Estic segur que la paciència i el temps que m'ha dedicat són superiors del que em mereixo, però això no es res comparat amb tot el que he après en molts aspectes al seu costat i dels molts consells que he gosat demanar-li i he rebut. Si tinc un bri de formació matemàtica, ben segur que li dec a ell.

Bellaterra, Juny de 1995

Per fer aquesta introducció, a part de les referències més especialitzades, també s'han consultat les següents fonts:

Andronov, A.A., Leontovich, E.A., Gordon, I.I., Maier, A.G., *Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane*, John Wiley and Sons, Nova York-Toronto, 1973.

Arnol'd, V.I., *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, Springer-Verlag New York, Inc., 1988.

Braun, M., *Differential equations and their applications*, Springer-Verlag New York, Inc., 1975.

Guckenheimer, J., Holmes, P., *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Springer-Verlag New York, Inc., 1983.

Il'yashenko, Y.S., *Finiteness theorems for limit cycles*, Translations of Mathematical Monographs, AMS, Providence, Rhode Island, 1991.

Schlomiuk, D., *Bifurcations and periodic orbits of vector fields*, Kluwer Academic Publishers, NATO ASI Series, Dordrecht, Holanda, 1993.

Ye Y.Q. et al., *Theory of limit cycles*, Translations of Mathematical Monographs, AMS, Providence, Rhode Island, 1986.