

具有全局中心的平面多项式 Hamilton 系统

何鸿锦¹, Jaume Llibre², 肖冬梅^{1*}

1. 上海交通大学数学科学学院, 上海 200240;

2. Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona 08193, Spain

E-mail: hehongjin000@126.com, jllibre@mat.uab.cat, xiaodm@sjtu.edu.cn

收稿日期: 2020-07-12; 接受日期: 2020-09-23; 网络出版日期: 2021-03-25; * 通信作者

上海市自然科学基金 (批准号: 20ZR1428700)、国家自然科学基金 (批准号: 11931016)、the Ministerio de Economía, Industria y Competitividad, Agencia Estatal de Investigación (Grants No: MTM2016-77278-P (FEDER)), the Agència de Gestió d'Ajuts Universitaris i de Recerca (Grants No: 2017SGR1617) 和 the H2020 European Research Council (Grants No: MSCA-RISE-2017-777911) 资助项目

摘要 本文给出平面多项式 Hamilton 系统具有全局中心的充要条件, 这刻画出整个实平面有叶层结构, 即它被该系统对应的多项式 Hamilton 函数的水平集 (即实代数曲线) 分层, 而每一层对应的实代数曲线都是卵形线 (即紧闭分枝). 进一步地, 本文证明, 对于任意正整数 n 和任意一种类型中心 (即线性型、幂零型和退化型), 都存在 $2n+1$ 次平面多项式 Hamilton 系统使其具有该类型的全局中心, 而 $2n$ 次平面多项式 Hamilton 系统没有全局中心. 作为特殊情形, 本文也给出平面三次多项式 Hamilton 系统具有退化型中心的充要条件.

关键词 平面多项式 Hamilton 系统 全局中心 实代数曲线 卵形线

MSC (2020) 主题分类 34C05, 34C08, 37J35

1 研究背景和主要结果

微分方程定性理论中一个经典而困难的问题是给出平面多项式微分系统的全局相图, 特别是含有平衡点为中心的平面多项式微分系统的相图, 这与 Hilbert 第 16 问题紧密相关. 设 $H(x, y)$ 是实系数的 $n+1$ 次多项式, n 为非负整数. 对于任意实数 h , 实代数曲线 $H(x, y) = h$ 有多少卵形线以及这些卵形线之间的相对位置问题可转化为研究以 $H(x, y)$ 为 Hamilton 函数的 n 次多项式 Hamilton 系统

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial H(x, y)}{\partial y} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = Q(x, y) \end{aligned} \quad (1.1)$$

的中心分布和全局相图问题 (参见文献 [1]), 而平面多项式微分系统极限环个数问题 (即 Hilbert 第 16 问题第二部分) 的弱化版本就是研究含有中心的 n 次多项式 Hamilton 系统在多项式小扰动下的极限

英文引用格式: He H J, Llibre J, Xiao D M. Planar polynomial Hamiltonian differential systems with global centers (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 617–628, doi: 10.1360/SCM-2020-0602