Université Autonome de Barcelone
Département de Mathématiques

Mémoire de Master
En Mathématiques Avancées

Les orbites périodiques et la non–intégrabilité des systèmes hamiltoniens de Hénon–Heiles

Fatima Ezzahra Lembarki

Dirigé par le Dr. Jaume Llibre

Juillet 2011

Table des matières

Introduction générale

Dans la nature et dans la vie des hommes, de nombreux processus, sont en constante évolution. Nous parlons donc de systèmes dynamiques. Généralement ces changements incessants sont souvent difficiles à prédire et modéliser car ils surviennent de manière non linéaire et n'obéissent pas pleinement aux simples lois du hasard.

0.1 Système dynamique

Tout processus en mouvement, une entité ou un système constamment en évolution, parfois de façon complexe et imprévisible est dit ***système dynamique***.

D'un moment à l'autre, un système dynamique n'est jamais tout à fait le même, à moins qu'il ne bouge plus et devienne statique et, dans ce cas, nous parlons d'un système mort.

En mathématiques, en physique théorique et en ingénierie, un système dynamique est un système classique qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

- ***causale***, c'est-à-dire que son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent ;
- ***déterministe***, c'est-à-dire qu'à une « condition initiale » donnée à l'instant « présent » va correspondre à chaque instant ultérieur *un et un seul* état « futur » possible.

La modélisation de l'évolution ***déterministe*** du système dynamique peut peut se faire de deux façons distinctes :

- une évolution ***continue*** dans le temps, représentée par une équation différentielle ordinaire. Et, c'est là, a priori, la plus naturelle physiquement, puisque le paramètre temps nous semble continu ;
- une évolution ***discontinue*** dans le temps. Et c'est ce cas-là qui est souvent le plus simple à décrire mathématiquement, même s'il peut sembler moins réaliste. Physiquement, cependant, l'étude théorique de ces modèles discrets est fondamentale, car elle permet de mettre en évidence des résultats importants, qui se généralisent souvent aux évolutions dynamiques continues.

0.2 Classification des dynamiques

On peut diviser les systèmes dynamiques en deux grandes catégories ayant des propriétés très distinctes :
- les systèmes ***dissipatifs***, qui sont soumis à des frottements et
- les systèmes ***non dissipatifs, ou Hamiltoniens***, sans frottements ni entretien, dont l'énergie se conserve au cours du temps.

Les mouvements des corps célestes, planètes, étoiles, astéroïdes dont les frottements sont négligeables sont des exemples de mouvements Hamiltoniens. Et c'est sur ces mouvements que sera basé le mémoire.

0.3 La mécanique hamiltonienne

C'est une reformulation de la mécanique classique présentée en 1833 par le mathématicien Hamilton [1] qui a surgi de la Mécanique lagrangienne, une

1. **Sir William Rowan Hamilton** (1805–1865) est un mathématicien, physicien et astronome irlandais . Il est connu pour sa découverte des quaternions, mais il contribua aussi au développement de l'optique, de la dynamique et de l'algèbre. Ses recherches se révélèrent importantes pour le développement de la mécanique quantiques .

autre reformulation de mécanique classique, présentée par Joseph Louis Lagrange [2] en 1788.

Les équations de Hamilton sont des équations différentielles du premier ordre et donc plus faciles à résoudre que les équations de Lagrange qui sont du second ordre.

Cependant, les étapes qui conduisent à ces équations sont plus complexes que celles de la mécanique lagrangienne : à partir des coordonnées généralisées et du lagrangien, il faut calculer l'hamiltonien, exprimer les vitesses généralisées en fonction des moments conjugués et remplacer celles-ci dans la définition de l'hamiltonien.

La méthode de Lagrange est moins lourde en termes de manipulations mathématiques. L'avantage principal de l'approche hamiltonienne est de fournir, grâce à la simplicité de son formalisme, un fondement théorique en mécanique.

Un système hamiltonien c'est un système mécanique régi par les équations de Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases}$$

avec H l'hamiltonien,
$x_i (i = 1, \cdots, n)$ fonctions des grandeurs (penser à des positions ou angles),
$p_i (i = 1, \cdots, n)$ fonctions des grandeurs (penser à des impulsions).

L'ensembles de solutions d'un tel système différentiel est dit orbite. Topologiquement parlant, cet orbite peut être des points (des points d'équilibre), des cercles (dans le cas des orbites périodiques) ou des droites (pour le reste des cas).

La fonction H ne dépend pas explicitement du temps, i.e.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = 0,$$

2. **Joseph Louis Lagrange** (1763–1836), est un mathématicien, mécanicien et astronome italien d'origine française, fondateur du calcul des variations avec Euler et de la théorie des formes quadratiques.

et $H =$ Constante s'interprète comme l'énergie totale invariante du système ou ***l'intègrale première*** du système.

S'il arrive que d'autres quantités que l'énergie soient conservées, elles aussi, on les appelle des ***intégrales premières*** du système hamiltonien.

Si un système hamiltonien a assez d'intégrales premières, Joseph Liouville, a démontré au XIX$^{\text{éme}}$ siècle qu'on peut résoudre le système différentiel par des quadratures en calculant des intégrales ; c'est pourquoi on dit que le système est ***complètement intégrable***.

Par contre, beaucoup de systèmes hamiltoniens ne sont pas intégrables, comme par exemple le système hamiltonien de Hénon–Heiles, qui sera l'objet principal de ce mémoire.

L'hamiltonien de Hénon–Heiles

C'est l'Hamiltonien proposé par Michel Hénon [3] et son étudiant Carl Heiles [4] dans un modèle d'évolution des étoiles dans une galaxie

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + xy^2 - \frac{1}{3}x^3$$

Il a été généralisé par l' introduction de deux paramètres A et B pour chacun des deux termes cubiques.

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + Bxy^2 + \frac{1}{3}Ax^3 \tag{1}$$

3. **Michel Hénon** (né en 1931) est un mathématicien et astronome. Il est actuellement à l'Observatoire de Nice. En astronomie, Hénon est bien connu pour sa contribution à la dynamique stellaire.
4. **Carl Heiles** (né en 1939) est un américain astrophysicien réputé par sa contribution à la compréhension de diffusion de la matière interstellaire à travers l'observation radio-astronomique.

Les équations de Hamilton associées à (1) sont données par :

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p_x} = p_x \\ \dot{p}_x = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -x - (Ax^2 + By^2) \\ \dot{y} = \dfrac{\partial H}{\partial p_y} = p_y \\ \dot{p}_y = -\dfrac{\partial H}{\partial y} = -y - 2Bxy \end{cases} \tag{2}$$

On désigne par le point la dérivée par rapport à la variable indépendante temps, t.

Le mémoire sera consacré à l'étude de ce dernier système (2). Nous nous baserons sur l'article de Jaume Llibre et Lidia Jimenez-Lara [1].

Dans le premier chapitre nous allons étudier une méthode clé de ce mémoire, il s'agit de ***« la théorie de la moyenne »***, une méthode simple, bien sûr, si nous la comparons avec d'autres théories antérieures, qui nous permettra d'apporter les conditions suffisantes qui doivent vérifier les deux paramètres A et B de ce système généralisé, afin d'étudier l'existence des orbites périodiques, à tous les niveaux d'énergie positive, et de les calculer numériquement.Ces orbites périodiques obtenues forment dans l'espace de phase une famille continue d'orbites périodiques paramétrisées par l'énergie.

Dans le deuxième chapitre nous allons rappeler le théorème de l'intégrabilité des systèmes hamiltoniens au sens de Liuoville–Arnold, ainsi que certains effets de ce dernier sur les systèmes hamiltoniens, et nous allons présenter le théorème résultat de Poincaré pour démontrer la non-intégrabilité des systèmes hamiltoniens de Hénon–Heiles et toutes ses généralisations au sens de Liouville–Arnold, indépendamment de la classe de différentiabilité de la deuxième intégrale première.

Les deux techniques utilisées, dans le premier et le deuxième chapitre, sont valables pour des systèmes hamiltoniens ayant des nombres arbitraires de degrés de liberté. Dans ce mémoire, l'étude sera limitée à deux degrés de liberté.

Dans la conclusion nous présenterons les résultats obtenus.