TOPOLOGIE. – *Sur la stabilité des orbites périodiques d'une application continue du cercle en lui-même avec un nombre fini de points périodiques.* Note (*) de **Jaume Llibre**, présentée par René Thom.

Soit $C^0(S^1, S^1)$ l'espace des applications continues du cercle en lui-même muni de la topologie de la convergence uniforme. Si $f \in C^0(S^1, S^1)$ soit $P(f)$ l'ensemble des entiers positifs n pour lesquels f a un point périodique de période n. Dans cette Note on étudie la stabilité des orbites périodiques d'une application $f \in C^0(S^1, S^1)$ sous des petites perturbations. On sait que si $f \in C^0(S^1, S^1)$ et $P(f)$ est fini, alors il existe des entiers $m \geqq 1$ et $n \geqq 0$ tels que $P(f) = \{m, 2m, 4m, \ldots, 2^n m\}$. Si $n \geqq 1$, on démontre qu'il existe un voisinage V de f dans $C^0(S^1, S^1)$ tel que si $g \in V$ alors $\{m, 2m, 4m, \ldots, 2^{n-1} m\} \subset P(g)$.

Let $C^0(S^1, S^1)$ denote the space of continuous mappings of the circle into itself with the topology of uniforme convergence. For $f \in C^0(S^1, S^1)$ let $P(f)$ denote the set of positive integers n such that f has a periodic point of period n. This paper is concerned with stability of periodic orbits of a map $f \in C^0(S^1, S^1)$. It is known that if $f \in C^0(S^1, S^1)$ and $P(f)$ is finite, then there are integers $m \geqq 1$ and $n \geqq 0$ such that $P(f) = \{m, 2m, 4m, \ldots, 2^n m\}$. If $n \geqq 1$, then we prove that there is a neighborhood V of f in $C^0(S^1, S^1)$ such that if $g \in V$ then $\{m, 2m, 4m, \ldots, 2^{n-1} m\} \subset P(g)$.

1. INTRODUCTION. – L'objet de cette Note concerne l'étude du comportement des orbites périodiques d'une application continue du cercle en lui-même sous des petites perturbations. Soit S^1 le cercle et $C^0(S^1, S^1)$ l'espace des applications continues du cercle en lui-même muni de la topologie de la convergence uniforme. Si $f \in C^0(S^1, S^1)$ alors $P(f)$ désigne l'ensemble des entiers positifs n pour lesquels f a un point périodique de période n.

La démonstration du théorème suivant se trouve dans [1].

THÉORÈME 1 (Block). – *Soit $f \in C^0(S^1, S^1)$. Si $P(f)$ est fini, alors il existe des entiers m et n ($m \geqq 1$ et $n \geqq 0$) tels que* $P(f) = \{m, 2m, 4m, \ldots, 2^n m\}$.

Quand on étudie une propriété déterminée des orbites d'une application il est souhaitable de démontrer que cette propriété est stable, c'est-à-dire que si une application f a la propriété alors les applications d'un voisinage de f dans un espace topologique approprié [ici $C^0(S^1, S^1)$] ont aussi la même propriété.

Le résultat principal de cette Note est le suivant :

THÉORÈME A. – *Soit $f \in C^0(S^1, S^1)$ et $P(f) = \{m, 2m, 4m, \ldots, 2^n m\}$, où m et n sont des entiers positifs. Alors il existe un voisinage* V *de f dans $C^0(S^1, S^1)$ tel que si $g \in V$ alors* $\{m, 2m, 4m, \ldots, 2^{n-1} m\} \subset P(g)$.

La preuve de ce résultat sera donnée au numéro 3.

Remarquons que en général si $f \in C^0(S^1, S^1)$ et $k \in P(f)$, alors les perturbations de f peuvent ne pas avoir de points périodiques de période k.

Récemment Block a démontré un théorème dans cette même direction qui montre la stabilité des orbites périodiques du théorème de Sarkovskii (*voir* [2], [3] et [4]).

2. DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES ET RÉSULTATS. – Soit $f \in C^0(S^1, S^1)$ et N l'ensemble des entiers positifs. On désigne par f^0 *l'application identité de* S^1 *et pour tout* $n \in N$ on définit f^n inductivement par $f^n = f \circ f^{n-1}$.

Soit $p \in S^1$. On dit que p est un point fixe de f si $f(p) = p$. S'il existe $n \in N$ tel que p soit un point fixe de f^n, on dit que p est un point périodique de f. Dans ce cas le minimum de $\{n \in N : f^n(p) = p\}$ est appelé le période de p.

On définit l'orbite de p comme $\{f^n(p) : n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Si p est un point périodique de f de période n, on dit que l'orbite de p est un orbite périodique de période n. Dans ce cas l'orbite de p contient exactement n points, chaque point est un point périodique de période n.