Sobre el problema 16 de Hilbert

por

Jaume Llibre

Resumen. Presentamos un breve resumen de algunos resultados recientes sobre la segunda parte del problema 16 de Hilbert, poniendo un especial énfasis en los ciclos límite algebraicos.

1. Introducción

En este breve resumen únicamente consideramos ecuaciones diferenciales en $\mathbb{R}^2$ de la forma

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \tag{1}$$

donde P y Q son polinomios de grado a lo más d. Recordemos que un *ciclo límite* de la ecuación diferencial (1) es una órbita periódica de esta ecuación aislada en el conjunto de todas las órbitas periódicas de la ecuación.

La noción de ciclo límite apareció entre los años 1891 y 1897 en los trabajos de Poincaré, quien demostró que una ecuación diferencial polinomial (1) sin conexiones entre sus sillas tenía un número finito de ciclos límite [31].

Hilbert [15], en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París en 1900, propuso una lista de 23 problemas relevantes que a su entender tenían que ser resueltos durante el siglo XX. El problema 16 de esta lista, tal como lo anunció Hilbert, es:

> 16. *Problema de la topología de las curvas algebraicas y superficies.*
>
> *El número máximo de ramas cerradas y separadas que puede tener una curva algebraica de grado n fue determinado por Harnack. Aparece la siguiente cuestión: ¿cuál es la posición relativa de estas ramas en el plano? Para las curvas de grado* 6 *yo mismo he visto —después de un complicado proceso— que pueden aparecer* 11 *ramas de acuerdo con Harnack, pero en modo alguno todas las ramas pueden ser externas respecto a otra rama, sino que debe existir una rama en cuyo interior haya otra rama y en cuyo exterior haya nueve ramas, o a la inversa. Una investigación de las posiciones relativas de las ramas separadas cuando su número sea máximo me parece de gran interés, y no menos la investigación del número, forma, y posición de las hojas de una superficie algebraica en el espacio. Hasta ahora no se conoce el número máximo de hojas que una superficie de grado* 4 *en un espacio de dimensión tres pueda tener.*