TOPOLOGIE. — *Sur le nombre d'orbites périodiques d'une application continue du cercle en lui-même.* Note (*) de **Jaume Llibre** et **Agusti Reventós,** présentée par René Thom.

Soit f une application continue du cercle en lui-même, et soit $P(f)$ l'ensemble des entiers positifs n pour lesquels f a un point périodique de période n. Si N désigne l'ensemble des entiers positifs et $\{1, 2, 3\} \subset P(f)$, alors $P(f)=N$ et nous donnons une borne inférieure du nombre d'orbites périodiques de période m pour tout $m \in N$.

Let f be a continuous map of the circle into itself, and let $P(f)$ denote the set of positive integers k such that f has a periodic point of period k. If N denotes the set of positive integers and $\{1, 2, 3\} \subset P(f)$, then $P(f)=N$ and we give a lower bound of the number of periodic orbits of period m for all $m \in N$.

1. Introduction. — On désigne par S^1 le cercle et par $C^0(S^1, S^1)$ l'espace des applications continues du cercle en lui-même. Si $f \in C^0(S^1, S^1)$, alors $P(f)$ désigne l'ensemble des entiers positifs n pour lesquels f a un point périodique de période n, et $N(f, m)$ désigne le nombre des orbites périodiques de période m.

On sait que si $\{1, 2, 3\} \subset P(f)$ alors $P(f)=N$, où N est l'ensemble des entiers positifs (*cf.* [1]). Dans cette communication nous améliorons ce résultat.

Théorème A. — *Soit $f \in C^0(S^1, S^1)$. Si $\{1, 2, 3\} \subset P(f)$ alors on vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *il existe un entier $N(m)$ (facilement calculable, voir le numéro* 3) *tel que* $N(f, m) \geqq N(m)$, *pour tout* $m \in N$;

(ii) *il existe une application* $g \in C^0(S^1, S^1)$ *telle que* $\{1, 2, 3\} \subset P(g)$ *et* $N(g, m)=N(m)$, *pour tout* $m \in N$.

La preuve de ce résultat sera donnée au numéro 3. Dans le tableau on donne $N(m)$ par $m=1, 2, \ldots, 50$.

2. Définitions préliminaires et résultats. — Soit $f \in C^0(S^1, S^1)$. On désigne par f^0 l'application identité de S^1 et pour tout $n \in N$ on définit f^n inductivement par $f^n=f \circ f^{n-1}$.

Soit $p \in S^1$. On dit que p est un point fixe de f si $f(p)=p$. Si p est un point fixe de f^n, pour quelque $n \in N$, on dit que p est un point périodique de f. Dans ce cas le minimum de $\{n \in N : f^n(p)=p\}$ est appelé la période de p.

On définit l'orbite de p comme $\{f^n(p) : n=0, 1, 2, \ldots\}$. Si p est un point périodique de f de période n, on dit que l'orbite de p est une orbite périodique de période n. Dans ce cas l'orbite de p contient exactement n points, chaque point est un point périodique de période n.

Soit $p \in S^1$ et $q \in S^1$ avec $p \neq q$. On désigne par $[p, q]$ [respectivement (p, q)] l'intervalle fermé (respectivement ouvert) qui va de p à q dans le sens contraire aux aiguilles de l'horloge.

Soit $f \in C^0(S^1, S^1)$ et soit $[p, q]$ un intervalle fermé du cercle. Alors $f | [p, q]$ désigne la restriction de f à l'intervalle $[p, q]$.

Si $f \in C^0(S^1, S^1)$, alors on peut représenter le graphique de l'application f sur le tore T^2. Le tore T^2 est homéomorphe à l'espace obtenu en identifiant dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ les points $(0, y)$ et $(1, y)$ et les points $(x, 0)$ et $(x, 1)$.

Soient $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$, r points de S^1 tels que $(p_i, p_{i+1}) \cap \{p_1, p_2, \ldots, p_r\} = \emptyset$ si $i=1, 2, \ldots, r-1$, et $(p_r, p_1) \cap \{p_1, \ldots, p_r\} = \emptyset$. Si $f \in C^0(S^1, S^1)$ on dit que l'intervalle $[p_i, p_{i+1}]$ (ou $[p_r, p_1]$) f-recouvre $[p_j, p_k]$ s'il existe un sous-intervalle K de $[p_i, p_{i+1}]$ tel que $f(K)=[p_j, p_k]$ et on dit que $[p_i, p_{i+1}]$ f-recouvre n-fois $[p_j, p_k]$ s'il existe n sous-intervalles $K_1, \ldots, K_n$ de $[p_i, p_{i+1}]$ avec $\operatorname{Int} K_i \cap \operatorname{Int} K_j = \emptyset$, $i \neq j$, tels que $f(K_i)=[p_j, p_k]$ où $i=1, \ldots, n$.