

Sistemes dinàmics associats a transformacions de Landen

Mireia Llorens Massana

Treball dirigit pel
Dr. Armengol Gasull Embid

30 de juny de 2009

Índex

Introducció	7
1 Transformacions geomètriques	11
1.1 Integrals el·líptiques	12
1.2 Mitjana aritmètico-geomètrica	14
1.3 Mitjana geomètrico-harmònica	17
1.4 Transformacions de Gauss-Landen	18
1.5 Altres exemples usant mitjanes aritmètiques i geomètriques	27
2 Transformades en integrals racionals	31
2.1 Funcions racionals amb denominador de grau 4	31
2.2 Integrals racionals amb denominador de grau múltiple de 4 i simètric . .	35
2.2.1 Teorema de reducció	35
2.2.2 Aplicació al cas del denominador de grau 4	40
2.2.3 Aplicació al cas del denominador de grau 6	42
2.2.4 Aplicació al cas del denominador de grau 8	47
3 Aplicacions	53
3.1 Algoritme de Brent-Salamin	53
3.2 Càlcul aproximat d'integrals	62
3.2.1 Funcions trigonomètriques	62
3.2.2 Funcions racionals amb denominador de grau 6	62
3.2.3 Funcions racionals amb denominador de grau 8	63
4 Sistemes dinàmics, una primera visió	67
4.1 Transformacions geomètriques	67
4.2 Transformacions racionals	71
A Resultats generals de combinatòria	77
Bibliografia	87

Introducció

Sistemes dinàmics associats a transformacions de Landen¹, aquest és el títol que trobem ja de bon començament. Ara bé, que són les transformacions o també anomenades, transformades de Landen?

Les transformades de Landen són un canvi dels paràmetres d'una integral, de manera que la deixen invariant. Ara bé, què volem dir concretament? Per exemple, si considerem, la integral el·líptica

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}},$$

per a i b nombres positius i, el canvi donat per la funció

$$F(a, b) = \left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab} \right),$$

aleshores tenim que $I(a, b) = I(F(a, b))$.

En aquest primer exemple, veiem doncs que es compleix:

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{((a+b)/2)^2 \cos^2 \theta + ab \sin^2 \theta}},$$

és a dir, que tot i efectuant un canvi en els paràmetres a i b de la integral, ens l'ha transformada en una altra del mateix tipus i, igual valor (aquest exemple, desenvolupat per Gauss i tractat en la secció 1.4, va significar el començament de l'estudi iniciat per Landen).

¹John Landen (1719-1790) era un topògraf que treballava per al Compte Fitzwilliam a Milton (prop de Peterborough) i, que no era un matemàtic professional, sinó que el seu interès per a les matemàtiques era per a ell una activitat de lleure.

Hom podria pensar però, de què ens serveix fer un canvi en la integral, si ens la deixa exactament igual i, aparentment no ens ajuda per tal de trobar el seu valor? Doncs bé, el canvi sí que és interessant, donat que si està ben escollit, després d'aplicar-lo reiteradament ens permetrà de calcular la integral de manera aproximada, fent només un pas al límit sota el signe de la integral (veure capítol 3).

Concretament, en l'exemple que hem plantejat, veurem que:

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{AGM(a, b)},$$

on $AGM(a, b)$ denota la mitjana aritmètico-geomètrica dels nombres a i b . Els detalls d'aquest resultat estan desenvolupats al teorema 1.4.2 i, s'han aplicat al càlcul d'integrals el·líptics (veure capítol 3), al càlcul de la longitud L de la lemniscata $r^2 = \cos(2\theta)$:

$$L = \frac{2\pi}{AGM(\sqrt{2}, 1)}$$

i, de la relació que manté amb el nombre

$$\varpi = 2 \int_0^1 (1 - z^4)^{-1/2} dz.$$

Aquesta, ve donada per $L = 2\varpi$, és a dir,

$$AGM(\sqrt{2}, 1) = \frac{\pi}{\varpi}.$$

Val a dir que Gauss va conjecturar aquesta relació abans de provar-la, basant-se en càlculs numèrics, tal i com va afirmar en la nota 98 (30 de maig de 1799) en el seu diari [11], on hi va escriure: *“He demostrat fins a l'onzena xifra decimal, que el límit de la mitjana aritmètico-geomètrica entre els nombres $\sqrt{2}$ i 1 és igual a $\frac{\pi}{\varpi}$; aquesta demostració obrirà segurament una àrea totalment nova en l'anàlisi”*. S'ha seguit essencialment el llibre [3] i, l'article [8].

A la secció 1.1 recordarem algunes de les propietats de les integrals el·líptiques. De fet anomenarem també aquestes integrals i altres similars, integrals geomètriques, per les seves interpretacions en termes de longituds.

De la mateixa manera i tal com hem vist en aquest primer exemple, també introduïm un parell de seccions al capítol 1 per tal d'aprofundir en l'estudi de la mitjana aritmètico-geomètrica i, per extensió, la geomètrica-harmònica (de la qual també tenim una transformació de Landen associada detallada al Teorema 1.4.4). El primer capítol l'acabem amb una extensió d'aquestes transformacions, extreta de [6].

En el capítol 2, seguint [4] i [15], ampliarem les transformacions de Landen a certes integrals racionals, concretament a les que estan formades per funcions polinòmiques parells tals que el grau del denominador superi en dues unitats al del numerador. El teorema principal (veure Teorema 2.2.1 i Apèndix), ens permetrà d'obtenir noves transformacions. Compte, doncs no estem dient que el teorema ens dongui les transformades directament, de fet, com veurem, s'han de realitzar varis passos per a obtenir-les (com per exemple, simetritzar el polinomi del denominador).

Per exemple, si considerem a tall d'exemple la funció

$$I(a, b, c) = \int_0^\infty \frac{bx^2 + c}{x^4 + ax^2 + 1} dx,$$

per $a > -2$ i, definim

$$F(a, b, c) = \left(2, \frac{b+c}{(a+2)^{1/2}}, \frac{b+c}{(a+2)^{1/2}}\right),$$

tenim que $I(a, b, c) = I(F(a, b, c))$. Com en el primer exemple descrit, l'aplicació reiterada de F ens permet calcular² la integral (veure secció 2.1), obtenint:

$$I(a, b, c) = \frac{\pi}{2} \frac{b+c}{\sqrt{a+2}}.$$

A més, i per completar el capítol 2, detallem les transformacions de Landen associades a integrals d'aquest estil, amb denominadors de grau 6 i 8.

Queda obert, l'existència d'altres transformacions per a funcions racionals parells amb denominador arbitrari, de la mateixa manera que també queda pendent l'estudi de funcions racionals que continguin algun terme senar.

Al capítol 3, hi trobem aplicacions diverses del què s'ha vist fins al moment. Primerament, presentem un algorisme que ens permet de calcular de manera aproximada el nombre π (veure secció 3.1), tot fent ús de la mitjana aritmètico-geomètrica i les seves relacions amb les transformacions geomètriques.

Aquest algorisme, anomenat de Brent-Salamin (veure [2], [3] i [9]), es basa en la construcció d'una successió $\{z_n\}_n$ que convergeix quadràticament al nombre π i, pren la forma següent:

$$z_n = \frac{(a_n + b_n)^2}{1 - \sum_{k=1}^n 2^{k+1}(a_k^2 - b_k^2)},$$

²És clar que aquest resultat es pot obtenir d'altres maneres més directament, però veurem que el mètode desenvolupat a [4] es pot usar per funcions racionals molt més generals.

on a_k i b_k venen definits per

$$a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}, \quad b_{k+1} = \sqrt{a_k b_k},$$

amb $a_0 = 1$ i $b_0 = 1/\sqrt{2}$.

El reste del capítol el dediquem al càlcul aproximat de certes integrals racionals, tot usant les diferents transformades de Landen obtingudes en el capítol 2.

Finalment, en el capítol 4, donem una primera visió de dos dels sistemes dinàmics generats usant alguna de les transformacions presentades fins al moment. Concretament, presentem el cas del sistema dinàmic generat en la transformació geomètrica donada com a primer exemple, la qual no presenta massa dificultat (ja que disposem d'una integral primera) i, també considerem el sistema dinàmic generat per la transformació de Landen associada a una integral definida d'una funció racional amb denominador parell de grau 6:

$$G(a, b) = \left(\frac{5a + 5b + ab + 9}{(a + b + 2)^{4/3}}, \frac{a + b + 6}{(a + b + 2)^{2/3}} \right).$$

Per aquest darrer, el seu comportament en la regió de convergència de la integral de la qual prové

$$\int_0^\infty \frac{cx^4 + dx^2 + e}{x^6 + ax^4 + bx^2 + 1} dx,$$

és molt conegut (veure [7], [14]), però en canvi, per a la regió de no convergència, les coses no són tant simples. Això ens obre una porta a estudis posteriors, que serà el punt de partida del nostre treball futur.

En resum, en aquest treball recollim les transformacions de Landen aparegudes a la literatura, demostrem que efectivament ho són i, plantegem l'estudi d'aquestes transformacions com a sistemes dinàmics discrets.