



Universitat Autònoma de Barcelona

Facultat de Ciències.

Departament de Matemàtiques.

Constants de Liapunov i de Període per a camps vectorials al pla.

Víctor Mañosa i Fernàndez.

a l'Anna.

Índex.

Índex, i

Introducció, ii

1. Propietats algebraiques de les Constants de Liapunov i de Període, 1

1.1 Introducció, 2

1.2 Definicions, 5

1.3 Propietats algebraiques, 9

1.4 Càlcul de les constants i aplicacions, 28

2. Càlcul de les Constants de Liapunov i de Període emprant formes normals, 45

2.1 Introducció, 46

2.2 Sistemes Reals, 48

2.2.1 Resultats preliminars, 48

2.2.2 Demostració del Teorema 2, 51

2.3 Sistemes Complexos, 54

2.4 Demostració de la Proposició 1, 57

2.5 Apèndix: Descripció del mètode emprat a la secció 2.2, en general, 58

Bibliografia, I

Introducció.

En el present treball es consideren qüestions relacionades amb el problema de centre-focus i d'isocronicitat dels sistemes dinàmics definits per equacions diferencials del tipus:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + P(x, y), \\ \dot{y} = x + Q(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

a on $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ són funcions analítiques en un entorn de l'origen, amb termes d'almenys segon ordre. Tot i que Poincaré i Liapunov van donar un mètode per a decidir si l'origen de (1) és un focus o un centre, donades una equació o una família d'equacions en concret hom es troba amb dificultats pràctiques per a finir el problema. Malgrat tot, poc a poc s'acumulen coneixements sobre famílies concretes d'equacions; citarem per exemple, sense la pretensió de donar una llista exhaustiva els treballs de Bautin [Ba], Li [Li], i Żołądek [Z1] per a sistemes polinomials quadràtics; o bé els treballs de Sibirskii [S1], i Żołądek [Z2] pel que fa als sistemes polinomials amb terme no lineal homogeni cúbic; L'equació de Liénard ha estat estudiada per Zuppa a [Zu]. Actualment Chavarriga i Giné, [CG], estan aconseguint resultats en el cas de focus febles amb part no lineal homogènia de grau n . Desde una visió més global del problema de centre-focus, no podem deixar de citar el treball de Żołądek [Z3].

L'estudi del problema centre-focus per al sistema (1) pot ésser reduït a l'estudi de l'*aplicació de Retorn de Poincaré* Π . Podem pensar l'aplicació de Poincaré com a una funció definida sobre un interval $(0, \alpha)$ del semieix OX^+ , $\Pi : (0, \alpha) \in \mathbf{R}^+ \longrightarrow (0, \beta) \in \mathbf{R}^+$, de manera que a tot punt $(x, 0) \in \mathbf{R}^2$ amb $0 < x < \alpha$ li associa el *primer retorn* al semieix OX^+ de l'òrbita que passa per $(x, 0)$. Si considerem el desenvolupament en sèrie de Taylor de l'aplicació de retorn, tenim:

$$\Pi(x) = x + \sum_{n \geq 2} \frac{\Pi^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

És prou conegut, veure per exemple [ALGM], que la primera derivada de $\Pi(x)$, a l'origen, no nul·la és d'ordre imparell, i que el signe d'aquesta determina l'estabilitat del sistema. Sigui $n = 2k + 1$ el primer enter tal que $\Pi^{(2k+1)}(0) \neq 0$, anomenem k -èsima Constant de Liapunov a $\frac{\Pi^{(2k+1)}(0)}{2k+1!}$, i la denotem per v_{2k+1} . L'origen del sistema (1) és un centre si i només si totes les derivades de $\Pi(x)$ a l'origen són nul·les.

Si en lloc de considerar un sistema concret, prenem una família de sistemes del tipus (1), és també ben conegut el fet que les Constants de Liapunov són polinomis en els coeficients de $P(x, y)$ i de $Q(x, y)$. Per tant si ens restringim al cas en que $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ són polinomis de grau menor o igual que n , el *Teorema de la Base de Hilbert* ens diu que existeixen

$m_1, \dots, m_r$ de manera que si $v_{m_1}, \dots, v_{m_r}$ s'anul·len, aleshores $v_m = 0$, $\forall m \geq 1$, i per tant una equació de la família per la qual es compleixin tals condicions té un centre a l'origen. El nostre objectiu és estudiar sota quines condicions l'origen del sistema (1) és un centre, mitjançant l'estudi i el càlcul de les Constants de Liapunov.

Suposem que l'origen de (1) és un centre. El nostre objectiu és estudiar les condicions sota les quals l'origen del sistema (1) correspon a un centre isòcron, és a dir un sistema pel qual l'*Aplicació de Període* T , que donada una condició inicial (x_0, y_0) situada sobre un eix R , li associa el *temps* necessari per recórrer l'òrbita i tornar a l'eix R , és constant. Veurem que podem procedir d'una manera anàloga a l'estudi del problema Centre-Focus: Podem pensar l'aplicació Període com a una funció definida sobre un interval $(0, \alpha)$ de l'eix OX^+ , $T : (0, \alpha) \in \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^+$, de manera que a tot punt $(x, 0) \in \mathbf{R}^2$ amb $0 < x < \alpha$ li associa el temps emprat per recórrer l'òrbita periòdica que passa per $(x, 0)$. Considerarem el desenvolupament en sèrie de Taylor de la *funció* de Període, tenim:

$$T(x) = 2\pi + \sum_{n \geq 1} \frac{T^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

Sigui $n = 2k$ el primer enter tal que $T^{(2k)}(0) \neq 0$, - veurem en aquest treball que n és un número parell-, anomenem k -èssima Constant de Període a $\frac{T^{(2k)}(0)}{2k!}$, i la denotem T_{2k} . El sistema (1) és un centre isòcron si i només si totes les derivades de $T(x)$ a l'origen són nul·les.

Si en lloc de considerar un sistema concret, prenem una família de sistemes del tipus (1), veurem que les Constants de Període són polinomis en els coeficients de $P(x, y)$ i de $Q(x, y)$, per tant si (1) és una família d'equacions diferencials polinomials de grau menor o igual que n , el *Teorema de la Base de Hilbert* afirma que existeixen $m_1, \dots, m_s$ de manera que si $T_{m_1}, \dots, T_{m_s}$ s'anul·len, aleshores $T_m = 0$, $\forall m \geq 1$, i per tant una equació de la família satisfent tal condició té un centre isòcron a l'origen.

L'estudi de la funció de Període, ha despertat força interès en els darrers anys. Resulta especialment interessant veure si aquesta té o no punts crítics -veure [CS], [Ch1],[ChD1], [ChD2], [ChJ1], o [RT] per exemple-. Els centres isòcrons per camps polinomials homogenis han estat classificats en el cas quadràtic i cúbic, per Loud i Pleshkan en [Lo] i [P], els anys 1964 i 1969 respectivament. Recentment l'estudi dels centres isòcrons ha suscitat de nou interès tant pel que fa a la seva recerca i classificació com pel que fa a la bifurcació de cicles límit [ChJ2], les seves propietats generals [CD], o l'estudi de la geometria dels canvis de variable que linalitzen els mateixos [MRT]. L'any passat J. Devlin va trobar un exemple de coexistència d'un centre isòcron amb un de no isòcron, qüestió que recentment s'havia plantejat [D]-.

En el Capítol 1 es demostren un seguit de propietats algebraiques i geomètriques de les Constants de Liapunov i de Període referents a la quasi-homogeneïtat i la invariança per rotacions de les mateixes. Amb aquestes propietats és possible desenvolupar un mètode per al càlcul de les constants. Els resultats d'aquest capítol formen part d'un treball conjunt amb l'Anna Cima, l'Armengol Gasull i en Francesc Mañosas, [CGMM]. L'estructura complexa de les constants de Liapunov i de Període. Exposada en el Teorema 9, és fruit de la col·laboració amb l'Antoni Guillamon, [GGM1].

En el Capítol 2 es desenvolupa una tècnica per al càlcul de les constants de Liapunov i Període, emprant formes normals, tant per a sistemes reals com per sistemes complexos. També es reflexiona sobre la possibilitat de considerar el problema de la recerca d'isòcrons com un problema "dual" al de centre-focus.

La present memòria, és una versió revisada del Treball de Recerca [M], presentat al Departament de Matemàtiques de la U.A.B. el dia 13 de Juny del 1995, per tal de superar nou crèdits del programa de doctorat. La diferència entre l'anterior versió i la que ara presentem, consisteix en que l'apartat (i) del Teorema 9 d'aquest treball apareixia en la versió abans esmentada, com un apèndix al primer capítol. Hem optat per incorporar-lo al cos del Capítol 1, eliminant l'apartat (i) del Teorema 7 de [M], així com les definicions i lemes preliminars, que aquest requeria. Aquest canvi es palès en algunes modificacions que s'introdueixen en els exemples d'aplicacions, aprofitant així la major eficiència que proporciona el resultat, ara incorporat.

Vull donar les gràcies als membres de grup de Sistemes Dinàmics de la U.A.B. per haver-me acollit i per l'estímul que suposa el seu ambient de treball, així com als companys del departament de Matemàtica Aplicada III de la U.P.C. també per haver-me acollit, i pel seu suport. També donar les gràcies als companys del tercer cicle, especialment la Montserrat Corbera, la Moira Chas, l'Omar El Idrissi i l'Antoni Guillamon, per escoltar i suggerir.

Sense l'estímul, la dedicació i la paciència dels meus directors l'Armengol Gasull i en Francesc Mañosas, aquest treball no existiria, vull doncs, expressar la meua gratitud envers a ells.