



Facultat de Ciències
Departament de Matemàtiques

Estudi qualitatiu dels centres per a camps vectorials al pla.

Víctor Mañosa Fernández.

Estudi qualitatiu dels centres per a
camps vectorials al pla.

Víctor Mañosa Fernández.

Els Drs. Armengol Gasull i Embid,
i Francesc Mañosas i Capellades,
professors del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona,
CERTIFIQUEM que la present memòria
ha estat realitzada sota la nostra direcció
a l'esmentat departament.

als meus pares i l'Anna.

L'únic misteri és que hi hagi qui pensi en el misteri.
Aquell que s'està al sol i acluca els ulls
comença a no saber què és el Sol
i a pensar un munt de coses plenes de calor.
Però obre els ulls i veu el Sol,
i ja no pot pensar en res,
car la llum del Sol val més que els pensaments
de tots els filòsofs i de tots els poetes.
La llum del Sol no sap què fa,
i per tant no s'erra, i és comuna i bona.

Fernando Pessoa, El guardià dels ramats,
(Poemes d' Alberto Caeiro).

Índex

Introducció (Introduction), p. viii

1 Ressenya d'alguns problemes de la teoria qualitativa de les Equacions
diferencials ordinàries al pla, p. viii

2 Contingut de la memòria, p. xiv

Agraïments, p. xvi

1 Algebraic properties of the Liapunov and period constants, p. 1

1 Introduction, p. 2

2 Definitions, p. 8

3 Algebraic properties, p. 12

4 Computation of the constants, p. 31

5 Study using normal forms, p. 48

References, p. 61

2 Liapunov and period constants for systems with homogeneous nonlinearities,
p.67

1 Introduction, p. 68

2 An explicit expression of the Liapunov and period constants, p. 69

2.1 Statement and proof of the main result, p. 69

2.2 An application: On the origin of Hamiltonian systems of type (1), p.76

2.3 An application: On a result of Conti, p. 77

3 An integral expresion of the Liapunov and period constants, p. 79

3.1 The integral expression, p. 79

3.2 Application to the cases $n = 2, 3$, p. 83

References, p. 89

3 Phase portrait of Hamiltonian systems with homogeneous nonlinearities, p. 93

1	Introduction, p.	94
2	Statements and proofs of the main results, p.	96
2.1	Compactification of the system, p.	96
2.2	Main results in the classification of finite and infinite critical points, p.	97
2.3	Proof of Theorem 1, p.	99
2.4	Proof of Theorem 2, p.	102
2.5	Proof of Proposition 3, p.	105
3	An algorithm to depict the phase portrait, p.	106
3.1	Preliminary questions, p.	106
3.2	Study of saddle points and their separatrices, p.	108
3.3	The algorithm, p.	109
4	Examples and applications of the algorithm, p.	112
4.1	The quadratic case, p.	112
4.1.1	Classification of phase portraits, p.	112
4.1.2	Bifurcation diagram, p.	113
4.2	The cubic case, p.	117
4.2.1	Classification of phase portraits, p.	117
4.2.2	Bifurcation diagram of cubic reversible systems, p.	117
5	Figures, p.	121
	References, p.	130
4	The period function of hamiltonian systems with homogeneous nonlinearities, p.	133
1	Introduction, p.	134
2	Hyperbolic sectors at the infinity and proof of Theorem C, p.	137
3	Proofs of Theorems A and B, p.	139
4	An outline on other Hamiltonian systems, p.	146
5	Figures, p.	148

References,	p. 149
5 The focus–centre problem for a type of degenerate systems,	p. 151
1 Introduction,	p. 152
2 Focus–centre conditions for systems defined by the sum of two homogeneous vector fields,	p. 158
2.1 Necessary conditions,	p. 158
2.2 Sufficient conditions in a generic case,	p. 160
2.3 Monodromy for semi–homogeneous systems,	p. 168
3 On the stability of the origin,	p. 173
3.1 Systems without characteristic directions,	p. 173
3.2 Systems with characteristic directions,	p. 175
3.2.1 Preliminary results,	p. 175
3.2.2 Proof of Theorem B,	p. 195
3.2.3 Proof of Proposition C,	p. 196
3.3 Examples,	p. 200
3.4 Appendix,	p. 203
4 Figures,	p. 206
References,	p. 210
Appendix,	p. 215

Introducció

1. Ressenya d'alguns problemes de la teoria qualitativa de les Equacions diferencials ordinàries al pla.

Des de la seva invenció per Newton (1642–1727), les equacions diferencials han estat una eina fonamental per a l'elaboració dels models matemàtics amb els quals intentem comprendre les lleis de la natura i el comportament dels processos socials. Les principals ocupacions dels matemàtics del període inicial de la teoria d'equacions diferencials (com ara Euler (1707–1738), Lagrange (1736–1813) Cauchy (1789–1857) i Gauss (1777–1855)) van ser l'intent de resoldre les equacions diferencials, la seva utilització per expressar lleis físiques – el que avui en dia diríem modelització – i l'estudi de la teoria de les “oscil·lacions petites”, i en conseqüència l'estudi dels sistemes lineals d'equacions. En un famós anagrama Newton es vanagloriava de saber integrar totes les equacions diferencials. La seva tècnica consistia a expandir les funcions incògnites en sèrie de potències i substituir-les a l'equació, i així, trobar cadascun dels coeficients terme a terme. Calgué esperar Cauchy per obtenir una teoria rigorosa d'aquest sistema de resolució, que en la pràctica no era gaire satisfactori ja que els radis de convergència de les sèries podien ser molt petits i el nombre de termes necessaris per efectuar càlculs numèrics amb una precisió raonable podia ser altíssim. De fet, semblava raonable pensar que la solució d'una equació diferencial concreta es pogués expressar com a combinació de funcions elementals; per aquest motiu molts esforços se centraren en la solució per mitjà de quadratures. Els treballs de Liouville (1809–1882), però, van demostrar que no totes les equacions diferencials admeten una solució expressable en termes de funcions elementals. Aquest descobriment succeeix cronològicament al descobriment de Galois (1811–1832) del fet que les equacions algebraïques no són en general resolubles per radicals, i és el seu anàleg diferencial. Els treballs de Liouville suposen l'inici del que avui en dia coneixem com a teoria de Galois diferencial. El problema de la integració en termes de funcions elementals va ser el motiu pel qual S. Lie (1842–1899) inicià l'estudi dels grups de difeomorfismes, que donà lloc a la moderna teoria de grups de Lie.

Malgrat no poder esperar en general poder resoldre (si per “resoldre” entenem obtenir una solució explícita expressable en termes de funcions elementals) les equacions diferencials, una nova manera d’enfocar el seu estudi va nèixer gràcies a les contribucions de matemàtics com Poincaré (1854–1912) i Liapunov (1857–1918). Es tractava de deduir les propietats de caràcter topològic de les solucions d’una equació diferencial $dx/dt = f(t, x)$ amb $x \in \mathbf{R}^n$, sense haver d’integrar-la, això és, a partir de l’estudi de les propietats de f .

El programa de Poincaré consisteix a recollir la informació suficient sobre les solucions del l’equació per tal de determinar-ne l’estructura topològica, el que anomenem *retrat de fase*. En particular, per les equacions diferencials ordinàries al pla. El teorema de Poincaré–Bendixon ens afirma que, sota certes condicions de compacitat, allò que determina l’estructura topològica global de les solucions d’una equació diferencial al pla és la configuració de les seves *solucions singulars*, és a dir els seus *punts crítics*, les seves *òrbites periòdiques* i les òrbites que uneixen els seus punts crítics, és a dir les seves *separatrius*. A l’estudi d’aquests objectes es consagra doncs la teoria qualitativa de les equacions diferencials al pla. La principal contribució de Liapunov va ser fonamentar les bases del que entenem avui per teoria de l’estabilitat.

Potser un dels problemes més notables de la teoria qualitativa de les equacions diferencials ordinàries és la coneguda segona part del 16è problema plantejat per Hilbert (1862–1943) a París l’any 1900, durant el Segon Congrés Internacional de Matemàtics [*Bulletin Amer. Math. Soc.* núm. 8 (1902), p. 465], que planteja el següent: *Quin és el nombre màxim H_n de cicles límit d’un camp polinomial de grau n ,*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$$

i quina és la seva configuració ?

L’interès per l’estudi dels cicles límit prové del fet que en nombrosos fenòmens de la natura o de l’àmbit de les ciències socials hi apareixen associats comportaments periòdics. Això ja es constata en ple segle XIX, abans que poguéssim parlar amb propietat de la idea de cicle límit. Com és costum, destaquem entre d’altres les experiències de Rayleigh (1842–1912) sobre acústica, els treballs de B. van der Pol

(1889–1959) i de l'enginyer A. Liénard; van der Pol determinà l'any 1926 amb mitjans gràfics l'existència de comportaments periòdics en oscil·ladors electrònics. Liénard publicà l'any 1928 un treball en el qual es demostrava l'existència d'una òrbita periòdica aïllada de determinades equacions (fortament relacionades amb les que apareixen en el problema estudiat per van der Pol) que modelitzen les oscil·lacions d'un circuit RCL. Més endavant, Andronov (1901–1952) –qui juntament amb Pontriaguin va introduir el concepte de sistema estructuralment estable o robust per designar la idea d'aquells sistemes les propietats qualitatives dels quals persisteixen davant l'acció de petites pertorbacions– i els seus col·laboradors van abordar amb ànim exhaustiu l'estudi de les oscil·lacions electròniques i mecàniques donant una gran preponderància a l'anàlisi dels cicles límit. Les equacions de van der Pol i Liénard han estat sovint generalitzades, i avui en dia es porta a terme una gran activitat pel que fa a l'estudi dels cicles límit en aquests models generalitzats.

Tornant al problema de Hilbert, en primer lloc cal saber si, fixat un sistema polinomial concret aquest tindrà infinits cicles límit o bé en tindrà un nombre finit. Aquesta qüestió es coneix com problema de Dulac o de finitud de cicles límit. Poincaré va resoldre genèricament aquest problema de la següent manera: si considerem Ξ_n com l'espai de tots els camps vectorials $X = (P, Q)$ on $P, Q \in \mathbf{R}[x, y]$, són polinomis de grau menor o igual que n ; llavors, a cada camp de Ξ_n li podem associar biunívocament un punt de $\mathbf{R}^{(n+1)(n+2)}$. Poincaré, aleshores, va demostrar que hi ha un subconjunt de Ξ_n amb interior buit, fora del qual tot $X \in \Xi_n$ té un nombre finit de cicles límit.

Dulac [*Bull. Soc. Math. France* núm. 51 (1923), p. 45–188] creia haver resolt el problema. El seu treball va ser donat per vàlid fins als anys vuitanta, però va cometre un error, tal com va demostrà Yu S. Il'yashenko l'any 1985 [*Func. Anal. and Appl.* núm. 18 (1985), p. 189–209]. El treball d'Il'yashenko emprava moltes de les idees originals de Dulac i va ser el primer pas cap a la solució definitiva del problema en demostrar que un cicle de separatrius els vèrtexs del qual són *punts de sella* no degenerats no pot ser acumulació de cicles límit. Fent servir aquest resultat, l'any 1987 R. Bamón provà que cap sistema quadràtic podia tenir un nombre infinit de cicles límit [*I.H.E.S. Publ. Math.* núm. 64 (1987), p. 111–142]. Finalment l'any 1990, i de manera independent, s'obtingueren dues proves de la finitud de cicles límit per a camps polinomials al pla degudes a J. Écalle [*Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*. París: Hermann, 1992] i

a Y. Il'yashenko [*Finiteness theorems for limit cycles*, Providence R.I.: Amer. Math. Soc., 1991]. Cal dir –emprant paraules de S. Smale– que aquests treballs encara han de ser digerits per la comunitat matemàtica.

Pel que fa als nombres de Hilbert H_n , podem dir que, mentre que l'obtenció de cotes superiors no ha estat possible, respecte a la de cotes inferiors s'han anat obtenint nombrosos resultats parcials. Per exemple, el 1952 Bautin demostrà que $H_2 \geq 2$, i el 1955 Petrovskii i Landis afirmaren que $H_2 = 3$, però ells mateixos reconegueren el 1967 un error que invalidava el resultat. De fet l'any 1979, paral·lelament, Shi S. per un cantó i Chen L. i Wang M. per un altre trobaren un exemple que mostrava que $H_2 \geq 4$. Pel que fa a les equacions cúbiques, Li J. i Huan Q. demostraren el 1987 que $H_3 \geq 11$. El 1994 Żołądek ha trobat també un exemple interessant d'equació cúbica amb 11 cicles límit. Lloyd el 1988 va conjecturar que H_n és $O(n^3)$ quan n tendeix a infinit. De moment Christopher i ell mateix han pogut demostrar que es almenys $O(n^2 \log(n))$.

Fortament relacionats amb el 16è problema de Hilbert i amb una gairebé innumerable llista de contribucions antigues i recents tenim el problema de centre-focus i el problema de la bifurcació de cicles límit per petites pertorbacions de focus febles. Considerem el següent sistema,

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + P(x, y), \\ \dot{y} &= x + Q(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

on P i Q són funcions analítiques en un entorn de l'origen amb termes d'almenys segon ordre. El problema de centre-focus consisteix a decidir quan en un entorn de l'origen les solucions del sistema són tancades (aleshores diem que l'origen és un *centre*) o quan les òrbites descriuen espirals al voltant de l'origen (aleshores diem que l'origen de (1) és un *focus feble*). Moltes vegades, en comptes d'un sistema concret tenim que (1) representa una família d'equacions i volem obtenir les condicions sobre els coeficients de P i de Q que ens defineixen els centres de la família.

A falta de criteris de caràcter global, un dels diversos mètodes que hi ha per abordar el problema de centre-focus consisteix en el càlcul de les anomenades constants de Liapunov (definides al primer capítol de la memòria), que són polinomis en els coeficients del desenvolupament en sèrie de P i Q . Quan totes aquestes constants són nul·les l'origen és un centre, i si el sistema és polinomial de grau fixat només cal

imposar que un nombre finit d'aquestes constants s'anul·li.

L'extraordinària complicació de càlcul que implica la obtenció de les constants de Liapunov, fa que aquest càlcul no hagi estat exhaustivament explotat fins que no hem disposat d'ordinadors prou potents; i encara ha calgut desenvolupar algorismes a vegades molt sofisticats per tal d'optimitzar al màxim els recursos de velocitat i de memòria, i poder arribar més lluny.

Tammateix hi ha el problema de decidir quan les condicions necessàries esdevenen suficients, a aquest efecte, l'ús de les bases de Gröbner i d'altres eines de la geometria algebraica sembla, ara per ara, indefugible per al futur desenvolupament d'aquesta línia de treball –un nou exemple de l'indeturable procés d'algebrització que ha viscut la matemàtica del nostre segle. En el futur caldrà però no descuidar esforços en l'estudi de la geometria dels centres que permeti el desenvolupament de criteris de caracter global, com ara la tècnica de Cherkas [*Differential Equations* núm. 12 (1976), p. 201–206] i Christopher i Lloyd [*Non linear Differential Equations* núm. 3 (1996), p. 183–190] per a equacions de Liénard.

El problema de la bifurcació de cicles límit per pertorbacions petites (o problema de la *ciclicitat dels focus febles*) forma part del programa d'obtenció de cicles límit encaminat a la solució del problema de Hilbert i està fortament vinculat al problema de centre–focus. La idea és que, si l'origen és un centre, podem pertorbar els coeficients del desenvolupament en sèrie de P i Q , de manera que de l'origen en bifurquin cicles límit –els anomenats *cicles límit de petita amplitud*, que apareixen en l'anomenada *bifurcació de Hopf degenerada*.

De l'estudi de la ciclicitat i els centres per sistemes amb part lineal degenerada, tret del cas nilpotent, ben poca cosa podem dir. Som davant d'una línia de recerca que pertany a un futur que esperem immediat, més que no pas al present. L'eina que ens permeti abordar d'una manera algorísmica l'estudi dels punts crítics *monodròmics* –és a dir amb aplicació de Poincaré definida– degenerats està encara per desenvolupar. Ni tan sols disposem d'una eina com ara el mètode de Liapunov–Poincaré, tret d'alguns casos en què es pot adaptar. Destaquem aquí els treballs pioners de N. Medvedeva (vegeu el capítol cinquè de la memòria).

El 16è problema de Hilbert és un dels problemes seleccionats per S. Smale en la seva proposta de problemes per al segle XXI [*Math. Intelligencer* núm. 20 (1998), p. 7–15]. Es tracta, doncs, d'un problema obert que encara ha de donar molta feina.

Un problema en certa manera paral·lel és el que es refereix a l'estudi de la funció de període associada a un centre d'una equació diferencial. Ha estat un problema tractat clàssicament en les equacions amb especial rellevància física, com l'equació del pèndol, o en certs sistemes conservatius amb un grau de llibertat. En els darrers anys ha aparegut un bon nombre de treballs estudiant condicions per garantir la monotonia o bé l'existència de punts crítics de la funció de període (*períodes crítics*). Bona part d'aquests treballs estudien les propietats de la funció de període associada a centres de sistemes de Lotka-Volterra, o bé a sistemes hamiltonians amb un grau de llibertat, això és, sistemes amb hamiltonià del tipus 'energia cinètica + energia potencial': $H(x, y) = y^2/2 + F(x)$, amb les adequades condicions de regularitat sobre $F(x)$.

Tant pel que fa a la discriminació dels centres de sistemes de tipus (1) pels quals la funció de període és constant (*centres isòcrons*) com a l'estudi de la bifurcació dels períodes crítics, es pot procedir d'una manera anàloga a com s'estudia el problema de centre-focus o el de la bifurcació de cicles límit en els focus febles a partir del càlcul de les constants de Liapunov, fent servir les anomenades constants de període (vegeu el primer capítol de la memòria). Les consideracions computacionals esmentades anteriorment per a les constants de Liapunov són vàlides en aquest context. De fet, una anàlisi de les formes normals associades a l'origen del camp (1) posa de manifest que, en certa manera, les constants de període són un mateix objecte (vegeu el primer capítol de la memòria).

En una línia similar al del problema de Dulac cal fer esment de la prova deguda a Chicone i Dumortier [*Nonlinear Analysis T.M.A.* núm. 20 (1993), p. 315–335], de la finitud de períodes crítics. Pel que fa als casos degenerats, destacarem l'estudi del comportament asimptòtic de la funció de període per centres amb part lineal degenerada, fet per M. Saavedra [*C.R. Acad. Sci. Paris* núm. 319 (1994), p. 563–566]. Ambdós problemes han estat abordats mitjanant l'anàlisi dels temps de trànsit a través de sectors hiperbòlics associats a punts crítics del cicle de separatrïus resultant de la prèvia dessingularització del punt crític.

2. Contingut de la memòria.

L'Objectiu de la present memòria és l'estudi parcial dels problemes de la teoria qualitativa de les equacions diferencials ordinàries al pla, descrits anteriorment.

Al primer capítol es demostren propietats de caràcter algebraic i geomètric, de les constants de Liapunov i període. Aquestes propietats serveixen per fer el càlcul efectiu de les primeres constants per qualsevol sistema analític, i de les constants associades a determinades famílies, com la de Liénard, sense l'ajut d'ordinador. Els resultats exposats formen part d'un treball conjunt amb la Dra. A. Cima [*Rocky Mountain J. of Math.* núm 27 (1997), p. 471–501], i d'un treball conjunt amb el Dr. A. Guillamon per aparèixer al *SIAM J. Num. Anal.* el 1999. La darrera secció del capítol va ser presentada durant el XIV CEDYA celebrat a Vic el 1995, i no està continguda als mencionats articles.

Al segon capítol s'obtenen expressions explícites de les primeres constants de Liapunov i de període per a sistemes de tipus (1) amb part no lineal polinòmica homogènia. Aquestes expressions permeten d'obtenir amb facilitat un resultat de no existència d'isocronicitat per als sistemes hamiltonians de la família, així com donar una versió explícita d'un resultat de Conti. Al capítol, també s'obtenen expressions integrals simplificades de les sis primeres constants de Liapunov i període per a aquests sistemes. Aquestes darreres expressions ens permeten de reobtenir les condicions de centre i d'isocronicitat pels casos quadràtic i homogèni cúbic. Per a aquests casos, també es donen les expressions generals dels commutadors associats als sistemes amb centres isòcrons. Els resultats d'aquest capítol apareixen en dos treballs elaborats en col·laboració amb el Dr. A. Guillamon: [*Proc. 2nd Catalan days of Applied Mathematics*, Perpinyà: Presses Univ. Perpignan, 1995, p. 105–116], i [*J. Differential Equations* núm 139 (1997), p. 237–260].

Els capítols tercer i quart, on novament hem treballat amb el Dr. A. Guillamon, estan fortament relacionats. En el tercer, s'estudien els retrats de fase dels sistemes hamiltonians de tipus (1) amb part no lineal polinòmica homogènia, i en el quart, estudiem les funcions de període associades als centres d'aquests sistemes. De fet veurem que les propietats de les funcions de període estan vinculades a certes propietats del retrat de fase. Concretament en el tercer capítol, a part de la descripció de les propietats generals dels retrats de fase, es resol un problema de Conti per als sistemes

esmentats, es reobté el diagrama de bifurcació pel cas quadràtic i s'obté el diagrama de bifurcació del cas homogèni cúbic reversible. Els resultats del capítol tercer formen part d'un treball per aparèixer a *Nonlinear Analysis T.M.A.* Al quart capítol es dona la descripció completa de la funció de període de l'origen per a aquests tipus de sistemes. Aquesta pot ser monòtona creixent, monòtona decreixent, o bé tenir un únic període crític (un mínim). En aquest sentit el nostre estudi es diferencia del treballs que recentment han aparegut sobre la funció de període per altres sistemes, a on o bé s'estableix la monotonia de la funció o bé es donen cotes superiors del nombre de períodes crítics. També s'estudien les propietats de la funció de període d'altres centres diferents de l'origen per a aquests tipus de sistemes. Els resultats del quart capítol apareixen a [*J. Differential Equations* núm. 139 (1997), p. 237–260].

Finalment al cinqué capítol, on hem treballat amb el Dr. J. Llibre, s'inicia l'estudi del problema de centre-focus per a sistemes amb part lineal degenerada. Es donen condicions de gir (*monodromia*) per l'origen d'un conjunt genèric de sistemes definits per la suma de dos camps vectorials homogenis. En particular s'obtenen les condicions de gir per l'origen dels anomenats sistemes semi-homogenis. També s'ha considerat la qüestió de l'estabilitat, de fet el resultat principal del capítol consisteix a donar la primera constant de Liapunov generalitzada, per una família genèrica dels sistemes esmentats que satisfan les condicions de monodromia. Aquesta constant és el coeficient del terme principal de l'aplicació de retorn associada a l'origen, la qual no pot ser estudiada amb els mètodes desenvolupats als capítols anteriors. Per fer l'estudi s'aplica la tècnica Blow-up per tal de dessingularitzar l'origen, i es calcula el coeficient del terme principal de l'aplicació de retorn, analitzant les aplicacions de transició associades als punts singulars que apareixen al polícycle resultant del procés de dessingularització.