Dinámica Combinatoria para Funciones skew-product en el Cilindro

Trabajo presentado al Departamento de Matemáticas de la Universitat Autònoma de Barcelona por

Leopoldo Morales López

Bajo la dirección de los profesores

Dr. Alsedà i Soler Lluís

Dr. Mañosas Capellades Francesc

Índice general

Introducción

En el año 1964 Sharkovskiĭ enunció y demostró un célebre teorema que supuso, entre otros aspectos, el inicio del estudio de lo que hoy conocemos como dinámica combinatoria en el intervalo. En dicho teorema se introduce la siguiente ordenación de los números naturales:

$$
\begin{aligned}
&3 \succ 5 \succ 7 \succ 9 \succ \ldots \succ \\
&2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ 2 \cdot 9 \succ \ldots \succ \\
&2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ 2^2 \cdot 9 \succ \ldots \succ \\
&\qquad \vdots \\
&2^n \cdot 3 \succ 2^n \cdot 5 \succ 2^n \cdot 7 \succ 2^n \cdot 9 \succ \ldots \succ \\
&\qquad \vdots \\
&2^\infty \ldots \succ 2^n \succ \ldots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1.
\end{aligned}
$$

El teorema en cuestión afirma lo siguiente:

Teorema 0.0.1 (Sharkovskiĭ) *Sea I un intervalo en la recta real. Sea $f \in \mathcal{C}^0(I, I)$ una función continua que tiene una órbita periódica de periodo q. Entonces, f también tiene una órbita periódica de periodo $p \in \mathbb{N}$ para cada $p \prec q$. Reciprocamente, para cada $q \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ existe una función $f_q \in \mathcal{C}^0(I, I)$ tal que el conjunto de puntos periódicos de f_q es $\{p \in \mathbb{N} \colon p \preceq q\}$.*

Este resultado afirma que la existencia de orbitas periódicas de un determinado periodo en una aplicación del intervalo "fuerza" la existencia de órbitas periódicas de otros periodos. Un refinamiento de este teorema es lo que conocemos como teoría del *forcing de órbitas periódicas en el intervalo*.

Fijado un período, es inmediato observar que hay distintos tipos combinatorios de órbitas del mismo periodo. Sea $P = \{p_1 < \ldots < p_n\}$ una órbita periódica de período n de una función f del intervalo. Podemos asociar a la órbita periódica una permutación σ, de orden n (a partir de ahora, n-ciclo) dada por $\sigma(i) = j$ si y solo si $f(p_i) = p_j$. Asociamos así a una órbita periódica P de período n un n-ciclo σ al que llamamos *pattern* de P.

Diremos que un pattern σ *fuerza* otro pattern τ si toda función del intervalo que tiene una órbita periódica con el pattern σ tiene también una órbita periódica con el pattern τ. La teoría del forcing en el intervalo prueba que la anterior relación es una relación de orden parcial y describe con exactitud el conjunto de patterns forzados por un pattern prefijado.

En el artículo [7] el Teorema de Sharkovskiĭ fue extendido a una clase de funciones triangulares en el cilindro. Concretamente funciones continuas $T : \mathbb{S}^1 \times I \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times I$ donde $T(\theta, x) = (\theta + \omega, f(\theta, x))$ con $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. A esta clase de funciones se las conoce en la literatura como *skew-product en el cilindro*.

Los objetos invariantes considerados en este caso, no son ya órbitas periódicas (ni tan solo objetos minimales) sino una generalización de curvas invariantes, que los autores llaman bandas periódicas. Intuitivamente una banda es un subconjunto compacto del cilindro tal que sus fibras en un conjunto residual de $\mathbb{S}^1$ son intervalos. Una banda n-periódica es un conjunto de n bandas disjuntas que se aplican por la función de manera periódica entre ellas.

El Teorema de Sharkovskiĭ se enuncia en [7] de la siguiente manera:

Teorema 0.0.2 *Sea $T \colon \mathbb{S}^1 \times I \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times I$ una función skew-product. Si T tiene una banda q-periódica y $p \in \mathbb{N}$ es tal que $p \prec q$, entonces T tiene también una banda p-periódica.*

El trabajo que presentamos en esta memoria tiene dos objetivos. El primero de ellos, es refinar el resultado obtenido en [7] para obtener una teoría del forcing entre patterns de bandas periódicas. En particular demostraremos que para una clase muy general de patterns la relación de forcing en el intervalo y en nuestra clase coinciden.

El otro objetivo es responder a la pregunta natural de si existe un análogo del teorema anterior para curvas periódicas. Obtenemos una respuesta negativa al construir un ejemplo de una función skew-product con una pareja de curvas 2-periódica pero sin curvas invariantes. Hasta donde nosotros sabemos este es el primer ejemplo explícito de función skew-product sin curvas invariantes.

La memoria está organizada de la siguiente forma. En la Sección 1.1 desarrollamos el concepto de *núcleo de un conjunto*. El Lema 1.1.10 es el resultado central de dicha sección, por su utilidad, pues establece la manera en que podemos obtener el núcleo de un conjunto a partir de la función fibra. En la Sección 1.2 estudiamos la noción de *pseudo-curva*, que no es más que una reformulación de lo que se denomina banda pinchada núcleo en [7]. El Corolario 1.2.13 es muy importante ya que relaciona ambos conceptos. En la sección 1.3 inroducimos el concepto de banda tal como es considerado en [7]. Finalmente, el Teorema de Sharkovskiĭ lo demostramos en la Sección 1.5 como un corolario de nuestro teorema principal, Teorema 1.5.2 en el cual, demostramos la equivalencia de la relación de forcing introducida por nosotros y la definida en el intervalo.

En el segundo Capítulo, presentamos la construcción de una función con la propiedad de que el único subconjunto propio, compacto y conexo del cilindro invariante por la función es una pseudo-curva que no es una curva. La primera sección de este capítulo está dedicada a la construcción topológica de la pseudo-curva citada. En el Teorema 2.1.10 están enunciadas las propiedades básicas de este objeto. La última sección está dedicada a construir la función que lo dejará invariante. Las propiedades de dicha función se resumen en el Teorema 2.2.10.