Combinatorial dynamics of strip patterns of quasiperiodic skew products in the cylinder

Thesis submitted by Leopoldo Morales López for the degree of Philosophæ Doctor by the Universitat Autònoma de Barcelona under the supervision of Prof. Lluís Alsedà i Soler and Prof. Francisco Mañosas Capellades.

Dr. Alsedà i Soler Lluís

Dr. Mañosas Capellades Francisco

Leopoldo Morales López

Programa de Doctorat en Matemàtiques
Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona
Bellaterra 2016

Contents

Introducción

En las últimas dos décadas, se han hecho muchos trabajos dedicados a encontrar y estudiar *Atractores Extraños no caoticos* (SNA, por sus siglas en inglés). El término SNA fue introducido y estudiado por C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan, y J. A. Yorke, en el artículo *Strange attractors that are not chaotic* [7]. Cabe mencionar que, antes de que la noción de SNA fuera formalizada, ya existían construcciones de funciones que contenían objetos similares, algunas de ellas, se pueden encontrar en [11], [12] y [16]. Pero, después de [7], el estudio de estos objetos se hizo popular rápidamente y apareció un notable número de artículos estudiando diferentes modelos en los cuales también aparecen dichos SNA. Posteriormente, en [10] fue publicado otro modelo importante, *el modelo de Keller*, el cual es una versión abstracta del modelo contenido en [7].

Estrechamente ligados al estudio de dichos objetos, los autores Roberta Fabbri, Tobias Jäger, Russell Johnson y Gerhard Keller publicaron el artículo *A Sharkovskiĭ-type Theorem for Minimally Forced Interval Maps* [9]. En el mismo, el teorema de Sharkovskiĭ fue extendido a una clase de sistemas que son, esencialmente, funciones del intervalo forzadas cuasiperiodicamente. Antes de describir, brevemente, las herramientas y conjuntos que se definen en [9], haremos un breve resumen del Teorema de Sharkovskiĭ y, mencionaremos algunas de sus consecuencias más importantes.

Sharkovskiĭ enunció y demostró su célebre teorema en el año 1964 en [14]. Este resultado supuso, entre otros aspectos, el inicio del estudio de lo que hoy conocemos como dinámica combinatoria en el intervalo. En dicho teorema se introduce la siguiente ordenación de los números naturales:

$$\begin{aligned}
&3 \succ 5 \succ 7 \succ 9 \succ \ldots \succ 2\cdot 3 \succ 2\cdot 5 \succ 2\cdot 7 \succ 2\cdot 9 \succ \ldots \succ \\
&2^2\cdot 3 \succ 2^2\cdot 5 \succ 2^2\cdot 7 \succ 2^2\cdot 9 \succ \ldots \succ 2^n\cdot 3 \succ 2^n\cdot 5 \succ 2^n\cdot 7 \succ 2^n\cdot 9 \succ \ldots \succ \\
&2^\infty \ldots \succ 2^n \succ \ldots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1.
\end{aligned}$$

Observemos que el mínimo es 1 y el máximo es 3. Necesitamos incluir el símbolo 2^∞ para asegurar la existencia del supremo de ciertos conjuntos, en particular el supremo de $\{1, 2, 4, \ldots, 2^n, \ldots\}$ es 2^∞.

Dado $\mathbb{I}$ un intervalo en la recta real, definiremos el conjunto $\mathcal{C}^0(\mathbb{I},\mathbb{I}) = \{f : \mathbb{I} \to \mathbb{I} : f \text{ es una función contínua }\}$. Fijada una función $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{I},\mathbb{I})$ y un punto $x \in \mathbb{I}$ diremos que $\{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es la órbita de x. Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) = x$ diremos que la órbita de x es periódica y si $f^k(x) \neq x$ para toda $k < m$, diremos que x tiene periodo m. Observemos que, particularmente, una órbita $A = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es *invariante* pues satisface $f(A) \subset A$.

El teorema de Sharkovskiĭ, para $\mathbb{I}$, afirma: Toda función $f \in C^0(\mathbb{I},\mathbb{I})$ que tiene una órbita periódica de periodo q, también tiene una órbita periódica de periodo $p \in \mathbb{N}$ para cada $p < q$. Recíprocamente, para cada $q \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ existe una función $f_q \in C^0(\mathbb{I},\mathbb{I})$ tal que el conjunto de puntos periódicos de f_q es $\{p \in \mathbb{N} : p < q\}$.

Este resultado establece que la existencia de órbitas periódicas, de un determinado periodo, en una aplicación del intervalo "fuerza" la existencia de órbitas periódicas de otros periodos. Un refinamiento de este teorema es lo que conocemos como teoría del *forcing de órbitas periódicas en el intervalo*.

Fijado un periodo, es inmediato observar que hay distintos tipos combinatorios de órbitas del mismo periodo. Sea $P = \{p_1 < \ldots < p_n\}$ una órbita periódica de período n de una función f del intervalo. Podemos asociar a la órbita periódica una permutación σ, de orden n (a partir de ahora, n-ciclo) dada por $\sigma(i) = j$ si y solo si $f(p_i) = p_j$. Asociamos así a una órbita periódica P de periodo n un n-ciclo σ al que llamamos *pattern* de P.

Diremos que un pattern σ fuerza otro pattern τ si toda función del intervalo que tiene una órbita periódica con el pattern σ tiene también una órbita periódica con el pattern τ. La teoría del forcing en el intervalo prueba que la anterior relación es una relación de orden parcial y describe con exactitud el conjunto de patterns forzados por un pattern prefijado.

Volviendo al artículo [9], en él, el Teorema de Sharkovskiĭ fue extendido a una clase de funciones triangulares en el cilindro. A fin de enunciar las principales propiedades de dicha clase y objetos introducidos en dicho artículo, primero estableceremos un poco de notación.

Dados $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y $\mathbb{I} = [0,1] \subset \mathbb{R}$, denotamos por Ω al Cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$. Escribiremos un punto en Ω como (θ, x) donde $\theta \in \mathbb{S}^1$ y $x \in \mathbb{I}$. Denotaremos por $\mathcal{S}(\Omega)$ a la clase de funciones forzadas cuasiperiodicamente de Ω en Ω, que son de la forma: $F(\theta,x) = (R(\theta), f(\theta,x))$ donde $R(\theta) = \theta + \omega \pmod 1, \omega \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ y $f : \Omega \to \mathbb{I}$.

En [9] los autores consideran conjuntos invariantes, que no son órbitas periódicas de puntos. Ni tan solo objetos minimales. Ellos consideran bandas periódicas, objetos que pasamos a definir. Denotamos por A^θ a la fibra de un subconjunto A de Ω en un punto $\theta \in \mathbb{S}^1$. Diremos que una *banda* es un subconjunto cerrado A del cilindro, tal que A^θ es un intervalo para toda θ en un residual de $\mathbb{S}^1$. Recordemos que $G \subseteq \mathbb{S}^1$ es un *subconjunto residual* si contiene la intersección de una familia numerable de subconjuntos abiertos y densos de $\mathbb{S}^1$.

Por otro lado, dos bandas A y B satisfacen $A < B$ (Definición 3.13 en [9]) si existe un conjunto residual $G \subset \mathbb{S}^1$, tal que para toda $(\theta,x) \in A$ y $(\theta,y) \in B$ implica $x < y$ para toda $\theta \in G$. Diremos que las bandas son *ordenadas* si, o bien $A < B$ o bien $A > B$. Finalmente, decimos que una banda

$B \subset \Omega$ es *n-periódica*, para una función $F \in \mathcal{S}(\Omega)$ (Definición 3.15 en [9]), si $F^n(B) = B$ y los conjuntos imagen $B, F^1(B), F^2(B), \ldots, F^{n-1}(B)$ son disjuntos y ordenados en pares.

En el caso trivial en el que f no depende de θ las bandas periódicas son conjuntos de círculos en el cilindro que son obtenidos como productos del círculo $\mathbb{S}^1$ multiplicado por órbitas periódicas P (o órbitas periódicas de intervalos) de f, es decir: $\mathbb{S}^1 \times P$.

El Teorema de Sharkovskiĭ dado en [9] establece que toda función $F \in \mathcal{S}(\Omega)$ que tiene una banda q-periódica tiene también una banda p-periódica, para todo $p \in \mathbb{N}$ tal que $q \succ p$. Al igual que en el caso del intervalo el recíproco de éste teorema también es cierto. Basta tomar funciones en las cuales la función en la segunda componente es desacoplada.

Nuestro primer objetivo, desarrollado en el Capítulo 1, es extender el teorema principal en [9] para obtener una teoría del forcing entre patterns de bandas periódicas. Demostraremos que la relación de forcing en el intervalo y en nuestra clase coinciden. Provaremos que una permutación cíclica τ fuerza ν como pattern en el intervalo si y solo si τ fuerza ν como pattern en el cilindro (en el Teorema A enunciaremos una versión más precisa). Una consecuencia inmediata del forcing entre patterns de bandas periódicas, es que tiene como corolario (Corolario 1.28) el teorema de Sharkovskiĭ para skew-products cuasiperiodicmente forzados en el cilindro provado en [9]. Lo usaremos también en los resultados que mencionamos a continuación.

El Teorema A, nos da herramientas para estudiar la *entropía* de las funciones skew-product forzadas cuasiperiodicamente en el cilindro. Recordemos que la entropía topológica és una medida lo caótico que puede ser un sistema. Para ello definimos la noción de s-herradura para skew-products forzados cuasiperiodicamente en el cilindro y demostramos, como en el caso del intervalo, que si una función skew-product cuasiperiodicamente forzada en el cilindro tiene una s-herradura entonces su entropía topologica es mayor o igual que $\log(s)$ (Teorema B). Observemos que éste teorema es importante, pues nos facilita el cálculo de cotas inferiores para la entropía.

El concepto de s-herradura, es parte fundamental, para demostrar el resultado que establece que si un skew-product forzado cuasiperiódicamente en el cilindro, tiene una órbita periódica, con pattern τ, entonces $h(F) \geq h(f_\tau)$, donde f_τ denota la función *connect-the-dots* en el intervalo sobre una órbita periódica con pattern τ. Esto implica que si el periodo de τ es $2^n q$ con $n \geq 0$ y $q \geq 1$ impar, entonces $h(F) \geq \frac{\log(\lambda_q)}{2^n}$, donde $\lambda_1 = 1$ y, para toda $q \geq 3$, λ_q es la raíz más grande del polinomio $x^q - 2x^{q-2} - 1$. Aún más, para cada $m = 2^n q$ con $n \geq 0$ y $q \geq 1$ impar, existe un skew-product cuasiperiodicamente forzado en el cilindro F_m con una órbita periódica de periodo m tal que $h(F_m) = \frac{\log(\lambda_q)}{2^n}$ (Teorema C). Esto extiende el resultado análogo, para funciones en el intervalo, a skew-products forzados cuasiperiodicamente en el cilindro.

El teorema de Sharkovskiĭ para bandas periódicas remite de manera natural a las siguientes preguntas ¿Es cierto el teorema de Sharkovskiĭ para curvas periódicas? y más generalmente: ¿Es cierto que todo skew product forzado cuasiperiodicamente tiene una curva invariante? El segundo capítulo de la memoría está dedicado a dar una respuesta negativa a ambas cuestiones

(Teorema D). Concretamente construiremos un skew-product forzado cuasiperiódicamente que tiene una curva 2-periódica y no tiene una curva invariante. En está construcción jugará un papel muy relevante unos objetos que llamamos pseudo-curvas (llamadas bandas pinchadas núcleo en [9]). La ventaja de usarlas es que se puede definir correctamente el espacio de pseudo-curvas, que equipado con la métrica adecuada es completo. Éste es un hecho extraordinariamente útil en la demostración del Teorema 2.45.

El capítulo se divide en tres partes. En la primera (Sección 2.2) desarrollamos una *Teoría general de las pseudo-curvas*. Analizamos a las pseudo-curvas como un espacio métrico y demostramos que es un espacio métrico completo. En la segunda parte (Sección 2.3), construimos una pseudo-curva, que no es una curva, que jugará un papel esencial en nuestra construcción. En la tercera parte (Secciones 2.4, 2.5, 2.6, 2.7) construimos la función que nos dejará invariante la pseudo-curva y demostramos el Teorema D. Dada la dificultad técnica de algunos resultados necesarios para la prueba del Teorema D, hemos pospuesto su demostración a las secciones 2.8, 2.9 y 2.10.

Finalmente, el Capítulo 1 ha sido publicado como artículo [2], en la revista *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. El Capítulo 2 será enviado como artículo [3] a una revista especializada.