

**DOUGLAS DUARTE NOVAES**

**ÓRBITAS PERIÓDICAS DE CERTAS  
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ACOPLADAS<sup>1</sup>**

**CAMPINAS**

**2012**

---

<sup>1</sup>Última atualização: 20/11/2012

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO  
CIENTÍFICA**

**DOUGLAS DUARTE NOVAES**

**ÓRBITAS PERIÓDICAS DE CERTAS EQUAÇÕES  
DIFERENCIAIS ACOPLADAS**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESENTADA  
AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA  
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA DA UNICAMP  
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM  
MATEMÁTICA**

**ORIENTADOR: PROF. DR. MARCO ANTONIO TEIXEIRA**

**ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À  
VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO  
DEFENDIDA PELO ALUNO DOUGLAS  
DUARTE NOVAES, E ORIENTADA  
PELO PROF. DR. MARCO ANTONIO  
TEIXEIRA**

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira**

**CAMPINAS, 2012**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR  
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467  
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E  
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Novaes, Douglas Duarte, 1988-  
N856o Órbitas periódicas de certas equações diferenciais acopladas /  
Douglas Duarte Novaes. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Marco Antonio Teixeira.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Método averaging (Equações diferenciais). 2. Filippov,  
Sistemas de. 3. Equações diferenciais. 4. Sistemas dinâmicos. I.  
Teixeira, Marco Antonio, 1944-. II. Universidade Estadual de  
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação  
Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em inglês:** Periodic orbits of some coupled differential equations

**Palavras-chave em inglês:**

Averaging method (Differential equations)

Filippov systems

Differential equations

Dynamical systems

**Área de concentração:** Matemática

**Titulação:** Mestre em Matemática

**Banca examinadora:**

Marco Antonio Teixeira [Orientador]

Luis Fernando de Osório Mello

Regilene Delazari dos Santos Oliveira

**Data de defesa:** 20-07-2012

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

**Dissertação de Mestrado defendida em 20 de julho de 2012 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

**Prof.(a). Dr(a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA**



---

**Prof. (a). Dr (a). LUIS FERNANDO DE OSÓRIO MELLO**



---

**Prof. (a). Dr (a). REGILENE DELAZARI DOS SANTOS OLIVEIRA**



---

# AGRADECIMENTOS

*À Deus.*

*À minha mãe, Maria Luisa, e ao meu pai, Vlamir, pelo amor incondicional que me trouxe até aqui; e também pelo apoio e incentivo durante (e muito antes) essa longa caminhada de seis anos.*

*À minha querida irmã Isabella, que não se cansa em demonstrar seu amor e carinho por mim, mesmo eu, na correria da vida, não lhe retribuindo devidamente.*

*À minha amada namorada Lais, pela compreensão e paciência durante esses três anos e sete meses.*

*Ao meu orientador, Professor Dr. Marco Antonio Teixeira, pela confiança depositada em mim e por todo tempo gasto no excelente (e complicado) trabalho de me orientar.*

*Ao Professor Dr. Jaume Llibre, pelo incentivo e pelas contribuições nas minhas pesquisas científicas.*

*Aos meus amigos, por todas as formas de contribuições, diretas e indiretas, para o desenvolvimento deste projeto.*

*Aos funcionários do IMECC, em especial à Tânia, Livia e Ednaldo da secretaria e a Dona Josefa do café.*

*À FAPESP, pelo apoio financeiro durante o mestrado.*



---

# RESUMO

O Método de Averaging é uma ferramenta clássica, muito útil no estudo do comportamento de sistemas dinâmicos suaves. Uma das utilidades de tal método consiste em transformar o problema de encontrar soluções periódicas, de um sistema dinâmico, em um problema de se encontrar soluções de uma determinada equação algébrica.

Os resultados clássicos, para o estudo de soluções periódicas de sistemas dinâmicos, assumem que tais sistemas sejam, no mínimo, de classe  $C^2$ . Recentemente, utilizando principalmente a Teoria do Grau de Brouwer, o Método de Averaging foi estendido para o estudo de soluções periódicas de sistemas dinâmicos, assumindo somente a hipótese de continuidade do sistema.

Por outro lado, o campo da matemática que versa sobre os sistemas dinâmicos descontínuos, chamados frequentemente de Sistemas de Filippov, teve nos últimos anos um rápido desenvolvimento. Tal campo, se tornou, certamente, uma das fronteiras comuns entre a Matemática, a Física, a Engenharia e outras áreas afins. Apesar do rápido desenvolvimento que essa área da matemática vem tendo, existem ainda poucas ferramentas para se trabalhar com os Sistemas de Filippov, bem como, inúmeros problemas em abertos.

Desenvolvemos aqui, uma extensão do Método de Averaging que nos permite estudar soluções periódicas de uma classe de Sistemas de Filippov.

Estão contidos nessa classe de Sistemas de Filippov estudada, os modelos matemáticos de inúmeros fenômenos mecânicos. Dentre eles, estudamos com detalhes o fenômeno de sincronização de osciladores harmônicos fracamente acoplados. Apontamos também, uma série de problemas similares, a ser trabalhado num futuro próximo, envolvendo complicações típicas dos Sistemas de Filippov.

---

# ABSTRACT

The Averaging Method is a classical and matured tool that provides a useful means to study the behavior of nonlinear smooth dynamical systems. One of the main applications of this method consists to transform the problem of finding periodic solutions of a dynamical systems in a problem of finding solutions of an algebraic equation.

The classical results for studying the periodic solutions of differential systems need at least that those systems be of class  $C^2$ . Recently, the Averaging Theory has been extended for studying periodic orbits to continuous differential systems using mainly the Brouwer degree.

On the other hand, the mathematical field which study the discontinuous dynamical systems, called Filippov Systems, is a subject that has been developing at a very fast pace in recent years. This field has become certainly one of the common frontiers between Mathematics, Physics, Engineering, and other related sciences. In spite of the fast developing of this subject, there are just a few tools to work with Filippov Systems as well as numerous open problems.

Our main objective, in this work, is to extend the averaging method for studying the periodic solutions of a class of Filippov Systems. Thus, overall results are presented

to ensure the existence of limit cycles of such systems.

In this class, of Filippov Systems, are contained the models of many mechanical phenomenon. Among these, we study in details the synchronization phenomena of harmonic oscillators weakly coupled. We also point out some similar problems to be studied in the future, involving usual complications of Filippov Systems.

---

# CONTEÚDO

<b>Agradecimentos</b> . . . . .	v
<b>Resumo</b> . . . . .	vii
<b>Abstract</b> . . . . .	ix
<b>Introdução</b> . . . . .	<b>1</b>
Objetivo . . . . .	1
Estrutura dos Tópicos Apresentados . . . . .	1
<b>1 Teoria de Averaging para Sistemas Descontínuos</b> . . . . .	<b>5</b>
1.1 Nota Histórica . . . . .	5
1.2 Introdução . . . . .	6
1.3 Enunciado do Resultado Principal . . . . .	10
1.4 Observações Gerais . . . . .	12
<b>2 Osciladores Fracamente Acoplados</b> . . . . .	<b>15</b>
2.1 Nota Histórica . . . . .	15
2.2 Introdução . . . . .	16
2.3 Sincronização de Sistemas Dinâmicos . . . . .	17
2.4 Forma Padrão . . . . .	18

2.4.1	Perturbação Autônoma . . . . .	20
2.4.2	Perturbação Não Autônoma . . . . .	22
2.5	Enunciados dos Resultados . . . . .	24
2.5.1	Perturbação Autônoma . . . . .	24
2.5.2	Perturbação Não Autônoma . . . . .	25
2.6	Aplicação: Pêndulo com Mecanismo de Escape . . . . .	26
2.7	Sistemas de Filippov Não Regulares . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Resultados e Conceitos Preliminares</b>	<b>43</b>
3.1	Sistemas de Filippov . . . . .	43
3.1.1	Aplicação Multivalorada de Filippov . . . . .	44
3.1.2	Inclusão Diferencial . . . . .	46
3.1.3	Soluções de Filippov . . . . .	47
3.1.4	Sistemas Contínuos por Partes . . . . .	48
3.1.5	Sistemas de Filippov Regulares . . . . .	50
3.2	Existência e Unicidade de Soluções . . . . .	53
3.3	Grau de Brouwer . . . . .	54
<b>4</b>	<b>A Teoria de Averaging</b>	<b>59</b>
4.1	Nota Histórica . . . . .	59
4.2	O Teorema de Averaging de Primeira Ordem . . . . .	60
4.2.1	Demonstração do Teorema 4.1 . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Demonstração do Teorema de Averaging para Sistemas Descontínuos</b>	<b>65</b>
5.1	Lemas Auxiliares . . . . .	65
5.2	Demonstração do Teorema 1.4 . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Demonstrações das Aplicações</b>	<b>85</b>
6.1	Perturbação Autônoma . . . . .	86
6.2	Perturbação Não Autônoma . . . . .	88

<b>7</b>	<b>Conclusões Finais e Direções Futuras</b>	<b>91</b>
7.1	Introdução . . . . .	91
7.2	Convenções Preliminares . . . . .	92
7.2.1	Sistemas de Filippov Regulares Perturbados . . . . .	92
7.2.2	Classe $\mathcal{C}$ de Sistemas de Filippov Regulares . . . . .	95
7.3	Objetivos . . . . .	95
7.3.1	Parte 1 . . . . .	96
7.3.2	Parte 2 . . . . .	96
7.3.3	Casos Não Regulares . . . . .	97
	<b>Bibliografia</b> . . . . .	<b>99</b>



---

# Introdução

O campo matemático que versa sobre os sistemas dinâmicos descontínuos teve, nos últimos anos, um rápido desenvolvimento. Este desenvolvimento se deve, principalmente, a fatores como: a beleza matemática apresentada por tais sistemas, a forte relação desse campo com outras ciências e a dificuldade em se estabelecer definições e convenções consistentes e razoáveis. Esta área é certamente uma das fronteiras comuns entre a Matemática, a Física e a Engenharia.

---

## Objetivo

---

O conhecimento da existência ou da não existência de soluções periódicas, de uma dada equação diferencial, é muito importante na compreensão qualitativa da sua dinâmica.

A Teoria de Averaging tem se mostrado uma poderosa ferramenta no estudo de soluções periódicas de equações diferenciais. Para uma introdução à Teoria de Averaging, veja por exemplo, os livros de Sanders e Verhulst [35] e Verhulst [41].

Os resultados clássicos, para o estudo de órbitas periódicas de equações diferenciais, assumem que tais equações sejam, no mínimo, de classe  $C^2$ . Por exemplo, em [41], Verhulst enuncia e demonstra o seguinte teorema:

---

**Teorema.** *Consideremos a equação diferencial*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (1)$$

onde  $F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  são funções contínuas,  $T$ -periódicas na primeira variável e  $D$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Definamos  $f_1$  por

$$f_1(z) = \int_0^T F_1(s, z) ds,$$

e assumamos que

- (i)  $F_1$ ,  $R$ ,  $D_x F_1$ ,  $D_x^2 F_1$  e  $D_x R$  estão bem definidos, são contínuos e limitados por uma constante  $M$ , independente de  $\varepsilon$ , em  $[0, \infty) \times D$  e  $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ;
- (ii) para  $a \in D$  com  $f_1(a) = 0$  temos que  $J_{f_1}(a) \neq 0$ .

Então, para  $|\varepsilon|$  suficientemente pequeno, existe uma solução  $T$ -periódica  $x(\cdot, \varepsilon)$  da equação diferencial (1), tal que  $x(0, \varepsilon) \rightarrow a$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Aqui, denotamos por  $J_{f_1}(a)$  o determinante da matriz Jacobiana de  $f_1$  calculado em  $a$ .

Recentemente em [11], Buica e Llibre, utilizando principalmente a Teoria do Grau de Brouwer, estenderam a Teoria de Averaging para o estudo de soluções periódicas de equações diferenciais, assumindo somente a hipótese de continuidade.

Inicialmente, para esta dissertação, tínhamos estipulado, como objetivo principal, enunciar e demonstrar, com todos os detalhes, o Teorema referente a extensão feita em [11] da Teoria de Averaging para equações diferenciais contínuas. Porém, no decorrer dos estudos, nos deparamos com a possibilidade de estender a Teoria de Averaging para uma classe de equações diferenciais descontínuas.

O principal objetivo desta dissertação é, utilizando novamente a Teoria do Grau de Brouwer, estender a Teoria de Averaging para o estudo de soluções periódicas de uma certa classe de equações diferenciais descontínuas.

---

O resultado, referente ao objetivo principal desta dissertação, aqui enunciado e demonstrado, está também enunciado e demonstrado em [24], sendo este, um trabalho desenvolvido por Llibre, Novaes e Teixeira.

---

## Estrutura dos Tópicos Apresentados

---

Esta dissertação está dividida da seguinte forma:

- No Capítulo 1, enunciamos o nosso resultado principal (Teorema 1.4), o qual, estende a Teoria de Averaging para o estudo de soluções periódicas de uma classe equações diferenciais descontínuas. Até o momento, a Teoria de Averaging, para o estudo de soluções periódicas, está implementado para equações diferenciais contínuas (Capítulo 4, Teorema 4.2).
- No Capítulo 2, estudamos, à luz do resultado enunciado no Capítulo 1, o fenômeno de sincronização de Osciladores Fracamente Acoplados por funções não necessariamente contínuas.
- No Capítulo 3, apresentamos alguns conceitos e resultados preliminares utilizados nesta dissertação. Dentre esses, estão contidos: as definições e resultados básicos sobre Sistemas de Filippov; alguns resultados de Existência e Unicidade de Soluções para equações diferenciais contínuas e descontínuas; e o conceito do Grau de Brouwer juntamente com os resultados principais, utilizados nesta dissertação, da Teoria do Grau de Brouwer.
- No Capítulo 4, enunciamos o Teorema de Averaging para equações diferenciais contínuas (Teorema 4.2), contudo, demonstramos uma versão com hipóteses mais fortes deste teorema (Teorema 4.1), assumindo também que a equação seja Lipschitz (na segunda variável).
- No Capítulo 5 demonstramos a extensão, enunciada no Capítulo 1, do Teorema de Averaging enunciado e demonstrado no Capítulo 4.

- 
- No Capítulo 6 demonstramos os teoremas, enunciados no Capítulo 2, referentes às aplicações da extensão do Teorema de Averaging, enunciada no Capítulo 1 e demonstrada no Capítulo 5.

Os Capítulos 1 e 2, não devem ser lidos de maneira rígida e contínua, uma vez que, os conceitos e resultados preliminares, para o bom entendimento desses capítulos iniciais, se encontram no Capítulo 3. Portanto, o Capítulo 3 deve ser entendido e utilizado como um apêndice para os Capítulos 1 e 2.

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## Teoria de Averaging para Sistemas Descontínuos

---

### 1.1 Nota Histórica

---

A Teoria de Averaging tem sido usada no estudo da existência e persistência de soluções periódicas para equações diferenciais descontínuas. Podemos citar, como exemplos, os seguintes artigos:

Em [25], Llibre, Novaes e Teixeira usam a Teoria de Averaging para fornecer condições suficientes que garantam a existência de soluções periódicas do pêndulo duplo planar com perturbação descontínua;

Em [29], Llibre e Teixeira usam a Teoria de Averaging para fornecer limites inferiores do número máximo de ciclos limites para um sistema descontínuo de equações polinomiais por partes;

Em [12], Cardin, Carvalho e Llibre usam a Teoria de Averaging no estudo de bifurcações de ciclos limites de centros lineares de dimensão dois e quatro com perturbação descontínua contida numa classe de sistemas lineares contínuos por partes;

Em [26], Llibre e Rong usam a Teoria de Averaging no estudo do número de ciclos limites que aparecem num sistema descontínuo em  $\mathbb{R}^{2n}$  dividido em duas zonas separadas por um hiperplano e linear em cada uma delas.

O resultado que iremos enunciar na Seção 1.3 deste Capítulo, e que demonstraremos mais adiante no Capítulo 5, é uma generalização do Teorema 4.1 do Capítulo 4.

---

## 1.2 Introdução

---

Seja  $D$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Tomemos  $h : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$  tendo  $0 \in \mathbb{R}$  como valor regular e  $X, Y : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções contínuas com  $X, Y$  e  $h, T$ -periódicas na primeira variável. Denotemos o conjunto  $h^{-1}(0)$  por  $\mathcal{M}$ . Definamos o *Sistema de Filippov Regular*

$$x'(t) = Z(t, x) = \begin{cases} X(t, x), & \text{se } h(t, x) > 0, \\ \frac{X(t, x) + Y(t, x)}{2}, & \text{se } h(t, x) = 0, \\ Y(t, x), & \text{se } h(t, x) < 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Observe que, no sistema (1.1), definimos o campo  $Z$ , restrito à variedade de descontinuidade  $\mathcal{M}$ , como sendo identicamente nulo. Tal escolha tem o intuito de manter coerente e consistente as notações que utilizaremos mais adiante (ver expressão (1.3)), porém, a dinâmica do sistema seria a mesma caso definíssemos o campo  $Z$ , nos pontos  $p \in \mathcal{M}$ , de maneira diferente. De fato, como veremos no Capítulo 3, a convenção de Filippov para as soluções do sistema (1.1), passando por um ponto  $p \in \mathcal{M}$ , é independente do valor do campo  $Z$  neste ponto e é também independente do valor do campo  $Z$  em qualquer conjunto de medida nula ao redor de  $p$ .

Denotamos o Sistema de Filippov, definido em (1.1), de maneira alternativa por  $(X, Y)_h$  ou  $(X, Y)_{\mathcal{M}}$ .

Para Sistemas de Filippov, como veremos no Capítulo 3, o conjunto de descontinuidade, em geral, não é uma variedade. Por esse motivo, o Sistema de Filippov definido

em (1.1) é chamado de *Sistema de Filippov Regular*, para o qual, o conjunto de descontinuidade é uma variedade regular. Veja o Capítulo 3, para maiores detalhes sobre Sistemas de Filippov Regulares.

A variedade de descontinuidade  $\mathcal{M}$  não é, necessariamente, conexa, sendo assim, dado  $p \in \mathcal{M}$ , denotamos por  $\mathcal{M}_p$ , a componente conexa de  $\mathcal{M}$  contendo o ponto  $p$ .

Denotemos por  $\Sigma$  o conjunto  $\{0\} \times D$  e por  $\Sigma_0$  o subconjunto  $\Sigma \setminus \mathcal{M}$ . Os elementos de  $\Sigma$  são identificados com os elementos de  $D$ , i.e.,  $(0, z) \equiv z$ . Observe que, procedendo com uma translação no tempo, se necessário, podemos assumir que  $\Sigma \not\subseteq \mathcal{M}$ , ou seja  $\Sigma_0 \neq \emptyset$ .

Para trabalharmos com equações descontínuas é conveniente introduzirmos o processo de regularização, onde uma função contínua por partes  $Z(t, x)$  é aproximada por uma família a um-parâmetro de funções contínuas  $Z_\delta(t, x)$ .

Em [37], Sotomayor e Teixeira introduziram o processo de regularização para campos vetoriais de dimensão dois e, utilizando este procedimento, provaram que a extensão das soluções pela variedade de descontinuidade para campos vetoriais em dimensão dois coincidem com as soluções segundo a convenção de Filippov [18]. Para maiores detalhes sobre a convenção de Filippov veja o Capítulo 3.

Em [30], Llibre e Teixeira estudaram a regularização local de um campo vetorial genérico em dimensão três e provaram que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} Z_\delta$  concorda com a convenção de Filippov em dimensão três.

Em [31], Llibre e Teixeira particionaram o plano  $\mathbb{R}^2$  em quadrados de mesma dimensão e para uma classe de campos vetoriais descontínuos formados por uma infinidade de campos vetoriais lineares definidos sobre cada quadrado, forneceram condições suficientes para a existência de pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis.

Finalmente, em [39], Teixeira generaliza o processo de regularização para campos vetoriais de dimensão finita.

Em [27], Llibre, Silva e Teixeira provaram que o processo de regularização, desenvolvido por Sotomayor e Teixeira em [37], produz um Problema de Perturbação Singular

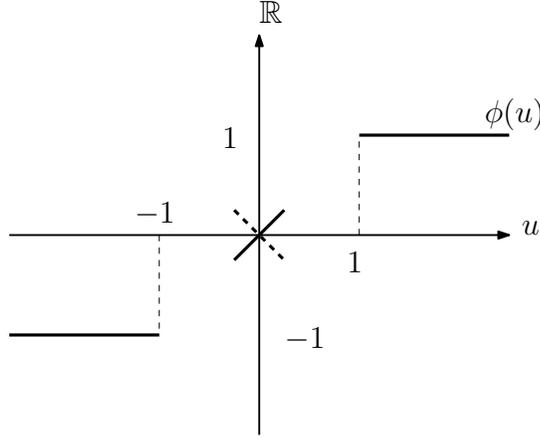


Figura 1.1: Função de transição.

para o qual a variedade de descontinuidade do sistema a ser regularizado é uma variedade central, mais ainda, eles provaram que a definição de campos vetoriais deslizantes coincidem com o problema reduzido do correspondente problema de perturbação singular para uma classe de campos vetoriais.

Em todos esses processos de regularizações, exceto no qual se utiliza a Teoria de Perturbação Singular, é utilizado uma função de transição para conectar os campos vetoriais  $X$  e  $Y$  por uma família de campos vetoriais contínuos.

Chamaremos este processo de  $\phi$ -regularização, onde  $\phi$  é a função de transição definida a seguir (veja a Figura 1.1).

**Definição 1.1.** Uma função  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^r$  é uma função de transição se  $\phi(u) = -1$  para  $u \leq -1$ ,  $\phi(u) = 1$  para  $u \geq 1$  e  $\phi'(u) > 0$  se  $u \in (-1, 1)$ .

Definimos, a seguir, o processo de  $\phi$ -regularização.

**Definição 1.2.** A  $\phi$ -regularização de classe  $C^r$  de  $Z = (X, Y)_h$  é a família a um parâmetro de funções contínuas  $Z_\delta$  dada por

$$Z_\delta(t, x) = \frac{1}{2} (X(t, x) + Y(t, x)) + \frac{1}{2} \phi_\delta(h(t, x)) (X(t, x) - Y(t, x)),$$

com

$$\phi_\delta(u) = \phi\left(\frac{u}{\delta}\right). \quad (1.2)$$

Observe que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} Z_\delta(t, x) = Z(t, x).$$

para todo  $(t, x) \in (\mathbb{R} \times D) \setminus \mathcal{M}$ .

Nesta dissertação, vamos considerar uma formulação diferente do Sistema de Filippov (1.1). Seja  $\text{sign}(u)$  a função sinal definida para  $u \in \mathbb{R}$  como

$$\text{sign}(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u > 0, \\ 0 & \text{se } u = 0, \\ -1 & \text{se } u < 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

O Sistema de Filippov (1.1) pode ser escrito como

$$\mathbf{x}'(t) = Z(t, x) = F_1(t, x) + \text{sign}(h(t, x))F_2(t, x), \quad (1.4)$$

onde

$$F_1(t, x) = \frac{1}{2}(X(t, x) + Y(t, x)) \quad \text{e} \quad F_2(t, x) = \frac{1}{2}(X(t, x) - Y(t, x)).$$

Observe que, definimos  $\text{sign}(0) = 0$ , a fim de manter consistente e coerente a convenção utilizada no sistema (1.1). De fato, o Sistema de Filippov definido em (1.4) é o mesmo sistema definido em (1.1). Ora: para  $h(t, x) > 0$  temos que  $F_1(t, x) + F_2(t, x) = X(t, x)$ ; para  $h(t, x) < 0$  temos que  $F_1(t, x) - F_2(t, x) = Y(t, x)$ ; e para  $h(t, x) = 0$  temos que  $Z(t, x) = F_1(t, x)$ .

Esta nova formulação possui uma  $\phi$ -regularização natural. Definamos a função de transição  $\phi$  como sendo

$$\phi(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } u \geq 1, \\ u, & \text{se } -1 < u < 1, \\ -1, & \text{se } u \leq -1. \end{cases}$$

Seja  $\phi_\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função contínua definida em (1.2). É claro que, para todo  $u \neq 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \phi_\delta(u) = \text{sign}(u),$$

e

$$Z_\delta(t, z) = F_1(t, x) + \phi_\delta(h(t, x))F_2(t, x)$$

é uma  $\phi$ -regularização de classe  $C^0$ , ou seja, contínua, do sistema (1.1).

---

### 1.3 Enunciado do Resultado Principal

---

Nesta seção apresentaremos o resultado principal desta dissertação, o qual tem, em suas hipóteses básicas, elementos da Teoria do Grau de Brouwer. Sua demonstração é baseada na Teoria de Averaging para sistemas contínuos.

As definições básicas e os resultados, aqui utilizados, sobre a Teoria do Grau de Brouwer estão enunciados no Capítulo 3. O resultado principal da Teoria de Averaging, aqui utilizado, está enunciado e demonstrado no Capítulo 4.

Consideremos a seguinte equação diferencial

$$x'(t) = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (1.5)$$

com

$$F(t, x) = F_1(t, x) + \text{sign}(h(t, x))F_2(t, x)$$

e

$$R(t, x, \varepsilon) = R_1(t, x, \varepsilon) + \text{sign}(h(t, x))R_2(t, x, \varepsilon),$$

onde  $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $R_1, R_2 : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $h : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas,  $T$ -periódicas na primeira variável e  $D$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Assumamos que  $h$  é uma função de classe  $C^1$  tendo 0 como valor regular.

Definamos a função promediada  $f_0 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  como sendo

$$f_0(z) = \int_0^T F(t, z) dt, \quad (1.6)$$

Fixemos o conjunto de hipóteses:

(H1)  $F_1, F_2, R_1, R_2$  e  $h$  são localmente  $L$ -Lipschitz com respeito a  $x$ ;

(H2) para  $a \in \Sigma_0$  com  $f_0(a) = 0$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $a$  tal que  $f_0(z) \neq 0$  para todo  $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$  e  $d_B(f_0, V, 0) \neq 0$ ;

(H3) se  $\partial_t h(p) = 0$ , para algum  $p \in \mathcal{M}$ , então, existe uma função contínua e positiva  $\xi_p : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$\left( \partial_t h \langle \nabla_x h, F_1 \rangle + \varepsilon \frac{\langle \nabla_x h, F_1 \rangle^2 - \langle \nabla_x h, F_2 \rangle^2}{2} \right) (t, x) \geq \varepsilon \xi_p(t, x)$$

para todo  $(t, x) \in \mathcal{M}_p$ ;

(H4) dado  $z \in \Sigma_0$ , os zeros da aplicação  $h_z : t \mapsto h(t, z)$ , para  $0 \leq t \leq T$ , são isolados.

Denotemos por H o conjunto de hipóteses H1, H2, H3 e H4.

Observe que a hipótese H4 é equivalente à condição: dado  $z \in \Sigma_0$ , a aplicação  $h_z : t \mapsto h(t, z)$ , para  $0 \leq t \leq T$ , se anula, somente, em um conjunto finito de pontos. Isso ocorre, pois o intervalo  $[0, T]$  é compacto em  $\mathbb{R}$ .

A proposição que enunciaremos a seguir ajuda na verificação da hipótese H4.

**Proposição 1.3.** *Suponhamos que  $\partial_t h(t, z) \neq 0$  para todo  $(t, z) \in \mathcal{M}$ . Então, para  $z \in D$ , a aplicação  $h_z : t \mapsto h(t, z)$ , para  $t \in [0, T]$ , se anula, somente, em um conjunto finito de pontos, logo vale a hipótese H4.*

*Demonstração.* Por hipótese, a aplicação  $h_z : t \mapsto h(t, z)$  é  $C^1$ .

Suponhamos que exista uma sequência estritamente crescente  $(t_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset [0, T]$  tal que  $h_z(t_i) = 0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , então, existe uma subsequência convergente  $(t_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$  tal que  $t_{i_j} \rightarrow \bar{t} \in [0, T]$ .

Pela continuidade de  $h_z$ , segue que,  $h_z(\bar{t}) = 0$ , o que implica que  $(\bar{t}, z) \in \mathcal{M}$ .

Pelo Teorema do Valor Médio, temos que para cada  $j \in \mathbb{N}$  existe  $s_j \in (t_{i_j}, t_{i_{j+1}})$  tal que  $h'_z(s_j) = 0$ . Como  $s_j \rightarrow \bar{t}$ , segue então,  $h'_z(\bar{t}) = 0$ , contradizendo a hipótese da proposição.

Sendo assim, a aplicação  $h_z : t \mapsto h(t, z)$ , para  $t \in [0, T]$ , se anula, somente, em um conjunto finito de pontos. Em outras palavras, vale a hipótese H4.  $\square$

Enunciamos, a seguir, o principal resultado desta dissertação, que associa, os zeros da função (1.6), satisfazendo a hipótese H2, às soluções periódicas do Sistema de Filippov Regular (1.5).

**Teorema 1.4.** *Assumamos válido o conjunto de hipóteses H. Então, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, existe uma Solução de Filippov  $T$ -periódica  $x(t, \varepsilon)$  da equação descontínua (1.5) tal que  $x(0, \varepsilon) \rightarrow a$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

Para uma definição do que vem a ser Solução de Filippov, veja o Capítulo 3.

Enfatizamos aqui, que a nossa principal contribuição à Teoria de Averaging, com a demonstração do Teorema 1.4, foi, sob algumas restrições, abrir mão também da hipótese de continuidade da equação diferencial.

---

### 1.4 Observações Gerais

---

Na literatura atual, não é usual representar um Sistema de Filippov contínuo por partes como feito em (1.4), sendo assim, derivaremos, nesta seção, o conjunto de hipóteses do Teorema 1.4 para a terminologia usual de Sistemas de Filippov. Para mais informações sobre a formalização de Sistemas de Filippov, veja o Capítulo 3.

Seja  $D$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Tomemos  $h : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$  tendo  $0 \in \mathbb{R}$  como valor regular e  $X, Y : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções contínuas de modo que

$$X(t, x, \varepsilon) = \varepsilon X_1(t, x) + \varepsilon^2 X_2(t, x, \varepsilon)$$

e

$$Y(t, x, \varepsilon) = \varepsilon Y_1(t, x) + \varepsilon^2 Y_2(t, x, \varepsilon).$$

com  $X_1, Y_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $X_2, Y_2 : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções contínuas.

Denotemos o conjunto  $h^{-1}(0)$  por  $\mathcal{M}$ . A variedade de descontinuidade  $\mathcal{M}$  não é, necessariamente, conexa, sendo assim, dado  $p \in \mathcal{M}$ , denotamos por  $\mathcal{M}_p$ , a componente conexa de  $\mathcal{M}$  contendo o ponto  $p$ .

Denotemos por  $\mathcal{C}$  a classe das famílias a um-parâmetro  $\varepsilon \mapsto (X, Y)_h(t, x, \varepsilon)$  de *Sistemas de Filippov Regulares*, definidos em (1.1), para as quais, são válidas as seguintes hipóteses.

- (i)  $X, Y$  e  $h$  são  $T$ -periódicas com respeito a  $t$  e são localmente Lipschitz com respeito a  $x$ , e  $X, Y$  são, no mínimo, de classe  $C^2$  com respeito a  $\varepsilon$ ;
- (ii) se  $\partial_t h(p) = 0$ , para algum  $p \in \mathcal{M}$ , então, existe uma função contínua e positiva  $\xi_p : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$\left( \partial_t h \langle \nabla_x h, F_1 \rangle + \varepsilon \frac{\langle \nabla_x h, F_1 \rangle^2 - \langle \nabla_x h, F_2 \rangle^2}{2} \right) (t, x) \geq \varepsilon \xi_p(t, x)$$

para todo  $(t, x) \in \mathcal{M}_p$ ;

- (iii) dado  $z \in \Sigma_0$ , os zeros da aplicação  $h_z : t \mapsto h(t, z)$ , para  $0 \leq t \leq T$ , são isolados.

Aqui  $\Sigma_0$  é como definido nas seções anteriores,

$$F_1(t, x) = \frac{1}{2} (X_1(t, x) + Y_1(t, x))$$

e

$$F_2(t, x) = \frac{1}{2} (X_1(t, x) - Y_1(t, x)).$$

Em resumo, para a classe  $\mathcal{C}$  de Sistema de Filippov Regulares, queremos considerar sistemas cuja a variedade de descontinuidade, restrita a subconjuntos compactos, seja do tipo *Costura*, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno.

Veja o Capítulo 3, para maiores detalhes sobre os possíveis tipos de regiões encontradas na variedade de descontinuidade para Sistemas de Filippov Regulares.

Na nossa convenção, para a classe  $\mathcal{C}$ , o que garante tal propriedade é a hipótese (ii), porém, ressaltamos aqui, que não demonstramos que tal hipótese é equivalente à propriedade acima mencionada, ou seja, pode ser que exista um conjunto mais fraco de hipóteses que ainda garanta a propriedade desejada.



---

---

# CAPÍTULO 2

---

## Osciladores Fracamente Acoplados

---

### 2.1 Nota Histórica

---

Segundo Minorsky (veja capítulo 18 de [33]), o primeiro fenômeno estudado, daqueles que ocorrem em osciladores não lineares, foi o fenômeno de sincronização (aqui chamaremos este fenômeno de *Sincronização Física*).

Aparentemente, tal fenômeno foi observado pela primeira vez por Huygens (1629–1695) o qual relatou que dois relógios de pêndulo pendurados próximos em uma parede, batendo inicialmente com fases distintas, após um determinado tempo, tiveram os seus pêndulos sincronizados.

Podemos interpretar os dois pêndulos do relógio como sendo osciladores acoplados, onde a acoplagem se deve pela interação dos pêndulos com a parede. É claro que essa acoplagem é fraca, uma vez que, a interação entre os pêndulo é diminuída se aumentada a distância entre os relógios. Mais ainda, os pêndulos se tornam independentes caso sejam retirados da parede.

Após mais de dois séculos, o fenômeno de sincronização foi redescoberto, por vários físicos, ao se estudar circuitos elétricos. Foram os físicos Appletton [1] e Van der Pol

[40] que desenvolveram a teoria deste fenômeno.

Em [3], Andronov e Witt, desenvolveram uma generalização topológica da teoria desenvolvida por Van der Pol, a qual, mais tarde, foi estendida por Stoker [38].

---

## 2.2 Introdução

---

Consideremos  $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  como sendo o  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial das matrizes  $2 \times 2$  e definamos a aplicação  $J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  por

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja  $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Tomemos a matriz  $S_\Lambda \in \mathbb{M}_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$  e o vetor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$  como sendo respectivamente

$$S_\Lambda = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J(\lambda_n) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Consideremos o sistema, definido em  $\mathbb{R}^{2n}$ , dado por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = S_\Lambda \mathbf{x} + \varepsilon \Gamma(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 \Pi(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \tag{2.1}$$

onde

$$\Gamma(t, \mathbf{x}) = \Gamma_1(t, \mathbf{x}) + \text{sign}(g(t, \mathbf{x}))\Gamma_2(t, \mathbf{x})$$

e

$$\Pi(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = \Pi_1(t, \mathbf{x}, \varepsilon) + \text{sign}(g(t, \mathbf{x}))\Pi_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon),$$

## 2 Osciladores Fracamente Acoplados

---

com  $\Gamma_1 \Gamma_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ ,  $\Pi_1 \Pi_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  e  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ , funções contínuas e  $T$ -periódicas na primeira variável. Aqui, o ponto denota derivação com respeito a variável  $t$ .

Para o estudo da Sincronização Física do sistema (2.1), o período  $T$ , das funções  $\Gamma(t, \mathbf{x})$  e  $\Pi(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ , não pode ser tomado de maneira totalmente arbitrária. A sua escolha será feita pela Definição 2.2 e pela Proposição 2.3, que impõe condições sobre os autovalores do sistema (2.1).

Assumamos que

$$\Gamma = (G^1, \bar{G}^1, G^2, \bar{G}^2, \dots, G^n, \bar{G}^n),$$

com

$$G^i(t, \mathbf{x}) = G_1^i(t, \mathbf{x}) + \text{sign}(g(t, \mathbf{x}))G_2^i(t, \mathbf{x})$$

e

$$\bar{G}^i(t, \mathbf{x}) = \bar{G}_1^i(t, \mathbf{x}) + \text{sign}(g(t, \mathbf{x}))\bar{G}_2^i(t, \mathbf{x}),$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Observe que, para  $\varepsilon = 0$ , o sistema (2.1) representa um conjunto de  $n$  osciladores harmônicos desacoplados, sendo assim, dizemos que as funções  $\Gamma$  e  $\Pi$  acoplam esses osciladores fracamente.

O estudo, desenvolvido a seguir, procura encontrar condições para a existência de soluções periódicas do sistema (2.1), sendo equivalente ao estudo da “sincronização física” de um sistema mecânico composto por  $n$  osciladores harmônicos acoplados.

---

## 2.3 Sincronização de Sistemas Dinâmicos

---

Cabe aqui uma pequena observação sobre o conceito matemático de sincronização de sistemas dinâmicos.

Seja  $U$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  e  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^r$  com  $r \geq 1$ . Consideremos o sistema dinâmico

$$x'(t) = X(x). \tag{2.2}$$

Denotamos por  $\varphi(t, z)$  a solução do sistema (2.2), tal que  $\varphi(0, z) = z$ . A seguir definimos o conceito matemático de sincronização.

**Definição 2.1.** *Dizemos que o sistema (2.2) é  $M$ -sincronizável, se existe uma aplicação contínua  $G : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que*

$$M = G^{-1}(0) \quad e \quad \lim_{t \rightarrow \infty} G(\varphi(t, z)) = 0,$$

para todo  $z \in U$ .

Em [28] Llibre, Silva e Teixeira, assumindo a definição acima, estabeleceram conexões entre o fenômeno de sincronização, a teoria de sistemas dinâmicos descontínuos e a teoria geométrica de perturbação singular.

A definição matemática de sincronização de um sistema dinâmico é bem mais geral do que a definição que empregamos aqui (existência ou não de soluções periódicas), por esse motivo utilizamos o termo sincronização física.

A sincronização física de um sistema dinâmico pode ser vista, de fato, como um caso particular de  $M$ -sincronização, se assumirmos que  $M$  é a órbita correspondente à solução periódica do sistema e  $G$  é a aplicação “distância até  $M$ ”.

---

## 2.4 Forma Padrão

---

Nosso objetivo, nesta seção, é utilizar a Teoria de Averaging para Sistemas de Filippov Regulares, desenvolvido no Capítulo 1, para obtermos resultados sobre a existência e persistência de soluções periódicas do sistema (2.1). Para esse fim, devemos encontrar coordenadas nas quais o referido sistema seja escrito na forma padrão para se aplicar o Teorema 1.4.

A preparação do sistema (2.1) para a aplicação do Teorema 1.4 difere nos casos autônomos e não autônomos. Porém, em ambos os casos, devemos assumir uma *Hipótese de Ressonância* para os autovalores do sistema (2.1), dados pelas entradas do vetor  $\Lambda$ :

## 2 Osciladores Fracamente Acoplados

---

Se  $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , então,

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \in \mathbb{Q},$$

para todo  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Essa hipótese nos permite estabelecer teoremas que reduzem o sistema (2.1), em ambos os casos, à um sistema não autônomo periódico na variável  $t$  com o parâmetro  $\varepsilon$  multiplicando todo o lado direito do sistema.

**Definição 2.2.** *Dado  $\Lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  dizemos que  $T_\Lambda \in \mathbb{R}$  é um Período Ressonante caso  $T_\Lambda$  seja múltiplo inteiro de  $2\pi/\lambda_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .*

O próximo resultado relaciona a Hipótese de Ressonância com a existência do Período Ressonante.

**Proposição 2.3.** *Se  $\Lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  satisfaz a Hipótese de Ressonância, então, existe um Período Ressonante.*

*Demonstração.* Fixemos  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ . Dado  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  sabemos que existem inteiros  $p_i$  e  $q_i$  tais que  $\lambda_1/\lambda_i = p_i/q_i$ . Sendo assim,

$$q_i \frac{2\pi}{\lambda_i} = p_i \frac{2\pi}{\lambda_1},$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Tomemos agora  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  e

$$T_\Lambda = \prod_{i \in I} p_i \frac{2\pi}{\lambda_1}.$$

Uma vez que

$$T_\Lambda = \left( \prod_{i \in I \setminus \{j\}} p_i \right) p_j \frac{2\pi}{\lambda_1} = \left( \prod_{i \in I \setminus \{j\}} p_i \right) q_j \frac{2\pi}{\lambda_j}$$

e

$$\left( \prod_{i \in I \setminus \{j\}} p_i \right) q_j \in \mathbb{Z},$$

podemos concluir que  $T_\Lambda$  é, de fato, um Período Ressonante. □

Obviamente, o Período Ressonante não é único, uma vez que todo múltiplo inteiro de  $T_\Lambda$  também é um Período Ressoante. Porém, caso seja necessário, podemos assumir que  $T_\Lambda$  é o Período Ressonante Minimal, o qual é único.

A partir de agora, iremos assumir que o vetor de parâmetros  $\Lambda$  do Sistema (2.1) satisfaz a Hipótese de Ressonância estabelecida nos parágrafos acima.

### 2.4.1 Perturbação Autônoma

Seja  $\tilde{D} = \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)^{n-1}$  subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^{2n-1}$ . Assumindo que  $\Gamma(t, \mathbf{x}) = \Gamma(\mathbf{x})$  e que  $\Pi(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = \Pi(\mathbf{x}, \varepsilon)$ , temos válido o seguinte teorema.

**Teorema 2.4.** *Para  $\mathbf{x} \neq 0$ , existe uma mudança de coordenadas,  $\mathbf{x} \rightarrow (\theta, \Omega)$ , com  $(\theta, \Omega) \in \mathbb{R} \times \tilde{D}$ , no qual o sistema (2.1) é reduzido ao sistema*

$$\Omega'(\theta) = \varepsilon \tilde{\mathbf{F}}(\theta, \Omega) + \varepsilon^2 \tilde{\mathbf{R}}(\theta, \Omega, \varepsilon), \quad (2.3)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{F}}(\theta, \Omega) = \tilde{\mathbf{F}}_1(\theta, \Omega) + \text{sign}(\tilde{h}(\theta, \Omega)) \tilde{\mathbf{F}}_2(\theta, \Omega)$$

e

$$\tilde{\mathbf{R}}(\theta, \Omega, \varepsilon) = \tilde{\mathbf{R}}_1(\theta, \Omega, \varepsilon) + \text{sign}(\tilde{h}(\theta, \Omega)) \tilde{\mathbf{R}}_2(\theta, \Omega, \varepsilon),$$

com,  $\tilde{\mathbf{F}}_1, \tilde{\mathbf{F}}_2 : \mathbb{R} \times \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}_1, \tilde{\mathbf{R}}_2 : \mathbb{R} \times \tilde{D} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$  e  $\tilde{h} : \mathbb{R} \times \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , funções contínuas e  $T_\Lambda$ -periódicas na primeira variável. Aqui, o sinal' denota derivação com respeito a variável  $\theta$ .

*Demonstração.* Seja  $\Omega = (r_1, \theta_2, r_2, \theta_3, r_3, \dots, \theta_n, r_n)$ . Consideremos a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos(\lambda_1 \theta_1), & y_1 &= r_1 \sin(\lambda_1 \theta_1), \\ x_i &= r_i \cos(\lambda_i \theta_1 + \theta_i), & y_i &= r_i \sin(\lambda_i \theta_1 + \theta_i), \end{aligned}$$

## 2 Osciladores Fracamente Acoplados

---

para  $i = 2, 3, \dots, n$ . Tomemos  $\theta = \theta_1$  e definamos a aplicação  $\Psi : \mathbb{R} \times \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  por

$$\begin{aligned} \Psi(\theta, \Omega) = & (r_1 \cos(\lambda_1 \theta), r_1 \sin(\lambda_1 \theta), r_2 \cos(\lambda_2 \theta + \theta_2), r_2 \sin(\lambda_2 \theta + \theta_2), \dots \\ & \dots, r_n \cos(\lambda_n \theta + \theta_n), r_n \sin(\lambda_n \theta + \theta_n)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Nestas novas coordenadas, o sistema (2.1) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= -1 - \varepsilon F^1(\theta, \Omega) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \dot{r}_1(t) &= -\varepsilon \bar{F}^1(\theta, \Omega) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \dot{\theta}_i(t) &= -\varepsilon F^i(\theta, \Omega) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \dot{r}_i(t) &= -\varepsilon \bar{F}^i(\theta, \Omega) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde

$$\begin{aligned} F^1(\theta, \Omega) &= \frac{-1}{\lambda_1 r_1} [\bar{G}^1(\Psi(\theta, \Omega)) \cos(\lambda_1 \theta) - G^1(\Psi(\theta, \Omega)) \sin(\lambda_1 \theta)], \\ \bar{F}^1(\theta, \Omega) &= -G^1(\Psi(\theta, \Omega)) \cos(\lambda_1 \theta) - \bar{G}^1(\Psi(\theta, \Omega)) \sin(\lambda_1 \theta), \\ F^i(\theta, \Omega) &= \frac{-1}{\lambda_1 r_1 r_i} [\lambda_i r_i (G^1(\Psi(\theta, \Omega)) \sin(\lambda_1 r_1) - \bar{G}^1(\Psi(\theta, \Omega)) \cos(\lambda_1 \theta)) \\ &\quad + \lambda_1 r_1 (\bar{G}^i(\Psi(\theta, \Omega)) \cos(\lambda_i \theta + \theta_i) - G^i(\Psi(\theta, \Omega)) \sin(\lambda_i \theta + \theta_i))] \end{aligned}$$

e

$$\bar{F}^i(\theta, \Omega) = -G^i(\Psi(\theta, \Omega)) \cos(\lambda_i \theta + \theta_i) - \bar{G}^i(\Psi(\theta, \Omega)) \sin(\lambda_i \theta + \theta_i),$$

para  $i = 2, 3, \dots, n$ . Tomando  $\theta$  como sendo a nova variável independente, o sistema (2.5) é reduzido a

$$\begin{aligned} \frac{dr_1}{d\theta} &= \varepsilon \bar{F}^1(\theta, \Omega) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \frac{d\theta_i}{d\theta} &= \varepsilon F^i(\theta, \Omega) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \frac{dr_i}{d\theta} &= \varepsilon \bar{F}^i(\theta, \Omega) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde

$$\begin{aligned} F^i(\theta, \Omega) &= F_1^i(\theta, \Omega) + \text{sign}(\tilde{h}(\theta, \Omega)) F_2^i(\theta, \Omega), \\ \bar{F}^i(\theta, \Omega) &= \bar{F}_1^i(\theta, \Omega) + \text{sign}(\tilde{h}(\theta, \Omega)) \bar{F}_2^i(\theta, \Omega), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
 F_j^i(\theta, \Omega) &= \frac{-1}{\lambda_1 r_1 r_i} \left[ \lambda_i r_i (G_j^1(\Psi(\theta, \Omega)) \sin(\lambda_1 r_1) - \bar{G}_j^1(\Psi(\theta, \Omega)) \cos(\lambda_1 \theta)) \right. \\
 &\quad \left. + \lambda_1 r_1 (\bar{G}_j^i(\Psi(\theta, \Omega)) \cos(\lambda_i \theta + \theta_i) - G_j^i(\Psi(\theta, \Omega)) \sin(\lambda_i \theta + \theta_i)) \right], \\
 \bar{F}_j^i(\theta, \Omega) &= -G_j^i(\Psi(\theta, \Omega)) \cos(\lambda_i \theta + \theta_i) - \bar{G}_j^i(\Psi(\theta, \Omega)) \sin(\lambda_i \theta + \theta_i), \\
 \bar{F}_j^1(\theta, \Omega) &= -G_j^1(\Psi(\theta, \Omega)) \cos(\lambda_1 \theta) - \bar{G}_j^1(\Psi(\theta, \Omega)) \sin(\lambda_1 \theta),
 \end{aligned}$$

para  $i = 2, 3, \dots, n$  e  $j = 1, 2$ , e

$$\tilde{h}(\theta, \Omega) = g(\Psi(\theta, \Omega)),$$

Agora, para  $j = 1, 2$ , fixemos  $\tilde{\mathbf{F}}_j : \mathbb{R} \times \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$  como sendo

$$\tilde{\mathbf{F}}_j(\theta, \Omega) = (F_j^1(\theta, \Omega), F_j^2(\theta, \Omega), \bar{F}_j^2(\theta, \Omega), \dots, F_j^n(\theta, \Omega), \bar{F}_j^n(\theta, \Omega)).$$

Logo, tomando

$$\tilde{\mathbf{F}}(\theta, \Omega) = \tilde{\mathbf{F}}_1(\theta, \Omega) + \text{sign}(\tilde{h}(\theta, \Omega)) \tilde{\mathbf{F}}_2(\theta, \Omega),$$

o sistema (2.6) fica reduzido ao sistema

$$\Omega'(\theta) = \varepsilon \tilde{\mathbf{F}}(\theta, \Omega) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

A expressão contida em  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  é, claramente, da forma como indica o enunciado. Temos, então, demonstrado o teorema.  $\square$

## 2.4.2 Perturbação Não Autônoma

Assumindo que as funções  $\Gamma(t, \mathbf{x})$  e  $\Pi(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$  são  $T_\Lambda$ -periódicas na primeira variável, temos válido o seguinte teorema.

**Teorema 2.5.** *Existe uma mudança de coordenadas  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{y}(t)$  no qual o sistema (2.1) é reescrito da forma*

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \varepsilon \hat{\mathbf{F}}(t, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \hat{\mathbf{R}}(t, \mathbf{y}, \varepsilon), \tag{2.7}$$

onde

$$\hat{\mathbf{F}}(t, \mathbf{y}) = \hat{\mathbf{F}}_1(t, \mathbf{y}) + \text{sign}(\hat{h}(t, \mathbf{y}))\hat{\mathbf{F}}_2(t, \mathbf{y})$$

e

$$\hat{\mathbf{R}}(t, \mathbf{y}, \varepsilon) = \hat{\mathbf{R}}_1(t, \mathbf{y}, \varepsilon) + \text{sign}(\hat{h}(t, \mathbf{y}))\hat{\mathbf{R}}_2(t, \mathbf{y}, \varepsilon),$$

com,  $\hat{\mathbf{F}}_1, \hat{\mathbf{F}}_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ ,  $\hat{\mathbf{R}}_1, \hat{\mathbf{R}}_2 : \mathbb{R} \times D \times [\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  e  $\hat{h} : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$ , funções contínuas,  $T_\Lambda$ -periódicas na primeira variável.

*Demonstração.* Definamos a nova variável  $\mathbf{y}(t)$  por

$$\mathbf{y}(t) = e^{-tS_\Lambda} \mathbf{x}(t),$$

onde  $e^{tS_\Lambda}$  é a matriz da solução fundamental do sistema (2.1) para  $\varepsilon = 0$ , observe que  $y(0) = x(0)$ .

Em  $\mathbf{y}(t)$  o sistema (2.1) é escrito como

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \varepsilon \hat{\mathbf{F}}(t, \mathbf{y}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

com  $\hat{\mathbf{F}}(t, \mathbf{y}) = \hat{\mathbf{F}}_1(t, \mathbf{y}) + \text{sign}(\hat{h}(t, \mathbf{y}))\hat{\mathbf{F}}_2(t, \mathbf{y})$ , onde

$$\hat{\mathbf{F}}_1(t, \mathbf{y}) = e^{-tS_\Lambda} \Gamma_1(t, e^{tS_\Lambda} \mathbf{y}), \quad \hat{\mathbf{F}}_2(t, \mathbf{y}) = e^{-tS_\Lambda} \Gamma_2(t, e^{tS_\Lambda} \mathbf{y})$$

e

$$\hat{h}(t, \mathbf{y}) = g(t, e^{tS_\Lambda} \mathbf{y}).$$

A expressão contida em  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  é, claramente, da forma como indica o enunciado. Temos, então, demonstrado o teorema.  $\square$

A mudança de coordenadas, utilizada na demonstração acima, é feita por Sanders e Verhuslt em [35]. Esta mudança de coordenadas pode ser utilizada para sistemas mais gerais, inclusive no caso autônomo.

## 2.5 Enunciados dos Resultados

---

Enunciaremos nesta seção dois teoremas obtidos como aplicação da Teoria de Averaging para sistemas descontínuos desenvolvida no Capítulo 1.

Denotemos as variedades  $\tilde{h}^{-1}(0)$  e  $\hat{h}^{-1}(0)$  respectivamente por  $\tilde{\mathcal{M}}$  e  $\hat{\mathcal{M}}$  e denotemos o conjunto  $g^{-1}(0)$  por  $\mathcal{M}_g$ .

Definamos agora os conjuntos  $\tilde{\Sigma}_0$  e  $\hat{\Sigma}_0$  como sendo

$$\tilde{\Sigma}_0 = (\{0\} \times \tilde{D}) \setminus \tilde{\mathcal{M}} \quad \text{e} \quad \hat{\Sigma}_0 = (\{0\} \times D) \setminus \hat{\mathcal{M}}.$$

Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função diferenciável em  $a$ , denotamos por  $J_f(a)$  o determinante da matriz jacobiana de  $f$  calculada em  $a$ .

Fixemos as hipóteses

(H1\*)  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Pi_1, \Pi_2$  e  $h$  são localmente Lipschitz;

(H2\*)  $\partial_t g(t, \mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} g(t, \mathbf{x}) \cdot S_\Lambda \cdot \mathbf{x} \neq 0$  para todo  $(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{M}_g$ .

Denotemos o por  $H^*$  o conjunto de hipóteses H1\* e H2\*.

### 2.5.1 Perturbação Autônoma

Dado  $\Omega \in \tilde{D}$ , temos que  $\Omega = \mathcal{R} + \Phi$ , onde

$$\mathcal{R} = (r_1, 0, r_2, 0, r_3, \dots, 0, r_n)$$

e

$$\Phi = (0, \theta_2, 0, \theta_3, 0, \dots, \theta_n, 0).$$

Seja  $\tilde{\mathcal{F}} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$  a função dada por

$$\tilde{\mathcal{F}}(\Omega) = \int_0^{T_\Lambda} \tilde{\mathbf{F}}(\theta, \Omega) d\theta. \quad (2.8)$$

**Definição 2.6.** *Seja  $\Omega_0$  um zero da equação*

$$\tilde{\mathcal{F}}(\Omega) = 0. \quad (2.9)$$

*assumamos que  $\tilde{\mathcal{F}}$  seja diferenciável em  $\Omega_0$ . Dizemos que  $\Omega_0$  é um zero simples da equação (2.9) se  $J_{\tilde{\mathcal{F}}}(\Omega_0) \neq 0$ .*

A seguir, enunciaremos o teorema que associa os zeros simples da equação (2.9) às soluções periódicas da equação diferencial (2.1) com perturbação autônoma, ou seja,  $\Gamma(t, \mathbf{x}) = \Gamma(\mathbf{x})$  e  $\Pi(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = \Pi(\mathbf{x}, \varepsilon)$ .

**Teorema 2.7.** *Assumamos o conjunto de hipóteses  $H^*$ . Então, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno e para cada zero simples  $\Omega_0 = \mathcal{R}_0 + \Phi_0$  da equação (2.9), o sistema (2.1) possui uma solução  $T_\Lambda$ -periódica  $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$  de modo que  $|\mathbf{x}(t, \varepsilon)| \rightarrow |\mathcal{R}_0|$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

Ficará claro na demonstração do Teorema 2.7, no Capítulo 6, que a hipótese  $H2^*$  pode ser substituída pela hipótese mais fraca

$$(H'2^*) \quad \partial_t g(t, \mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} g(t, \mathbf{x}) \cdot S_\Lambda \cdot \mathbf{x} \neq 0 \text{ para todo } (t, \mathbf{x}) \in \mathcal{M}_g \cap \Psi(\mathbb{R}, \tilde{D}).$$

Particularmente, o conjunto

$$\mathcal{Z} = \{(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} : \exists i, x_i = y_i = 0\},$$

não está contido em  $\Psi(\mathbb{R}, D)$ . Sendo assim, é permitido que o conjunto  $\mathcal{M}_g$  deixe de ser uma variedade regular (ou até mesmo uma variedade) em algum ponto de  $\mathcal{Z}$ . Iremos abordar esta questão na Seção 2.6 deste capítulo.

### 2.5.2 Perturbação Não Autônoma

Seja  $\hat{\mathcal{F}} : D \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$  a função dada por

$$\hat{\mathcal{F}}(\mathbf{z}) = \int_0^{T_\Lambda} \hat{\mathbf{F}}(t, \mathbf{z}) d\theta. \quad (2.10)$$

**Definição 2.8.** *Seja  $\mathbf{z}_0$  um zero da equação*

$$\hat{\mathcal{F}}(\mathbf{z}) = 0. \quad (2.11)$$

*Assumamos que  $\hat{\mathcal{F}}$  seja diferenciável em  $\mathbf{z}_0$ . Dizemos que  $\mathbf{z}_0$  é um zero simples da equação (2.11) se  $J_{\hat{\mathcal{F}}}(\mathbf{z}_0) \neq 0$ .*

A seguir, enunciamos o teorema que associa os zeros simples da equação (2.11) às soluções periódicas da equação diferencial (2.1) com perturbação não autônoma.

**Teorema 2.9.** *Assumamos o conjunto de hipóteses  $H^*$ . Então, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno e para cada zero simples  $\mathbf{z}_0$  da equação (2.11), o sistema (2.1) possui uma solução  $T_\Lambda$ -periódica  $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$  de modo que  $\mathbf{x}(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{z}_0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

---

## 2.6 Aplicação: Pêndulo com Mecanismo de Escape

---

O relógio de pêndulo é um dos exemplos mais simples de sistema dinâmico no qual se tem a presença de um ciclo limite não analítico. Um relógio de pêndulo é, essencialmente, um mecanismo composto por duas partes, sendo essas: um pêndulo (ver Figura 2.1); e o chamado mecanismo de escape, que age impulsionando o pêndulo, restituindo, assim, a energia dissipada pelo amortecimento.

As equações do relógio de pêndulo, em geral, possuem um conjunto de descontinuidade que não é uma variedade (veja, por exemplo, [2], capítulo III), sendo assim, tais equações não são contempladas, a princípio, pela Teoria de Averaging para Sistemas de Filippov Regulares desenvolvida no Capítulo 1. Entretanto, segundo Dilão (Veja [9], Capítulo 10), podemos obter o mesmo comportamento qualitativo considerando um oscilador forçado com equação dada por

$$ml\ddot{\phi}(t) + \xi(\phi)\dot{\phi} + mg\phi = 0, \quad (2.12)$$

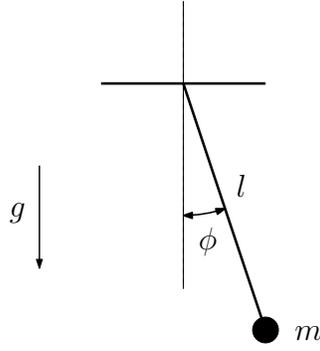


Figura 2.1: Pêndulo.

onde

$$\xi(\phi) = \begin{cases} 2\rho, & \text{se } |\phi| > \phi_c, \\ 0, & \text{se } |\phi| = \phi_c, \\ -2\rho, & \text{se } |\phi| < \phi_c. \end{cases}$$

Aqui,  $m$  denota a massa da partícula,  $l$  denota o comprimento da haste e  $g$  denota a força da gravidade,  $\rho$  e  $\phi_c$  são parâmetros positivos. Os pontos denotam derivação com respeito à variável  $t$ .

Podemos encontrar em [21], outros modelos matemáticos para o relógio de pêndulo com mecanismo de escape.

Observe que a função  $\xi$  pode ser escrita como

$$\xi(\phi) = 2\rho \operatorname{sign}(\phi^2 - \phi_c^2).$$

Reescalando o tempo por  $t = \sqrt{g/l} \tau$ , o sistema (2.12) pode ser escrito como

$$\phi''(\tau) = -\phi - \frac{\rho a}{m} \operatorname{sign}(\phi^2 - \phi_c^2) \phi', \quad (2.13)$$

com  $a = 2\sqrt{l/g}$ . Aqui, as aspas indicam derivação em relação à variável  $\tau$ . Denotando  $x = \phi$  e  $y = \phi'$ , a equação diferencial de segunda ordem (2.13) é reescrita como o

sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{aligned} x'(\tau) &= y, \\ y'(\tau) &= -x - \frac{\rho a}{m} \text{sign}(x^2 - \phi_c^2)y. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Assumindo a validade do Teorema 2.7, enunciamos o seguinte teorema

**Teorema 2.10.** *Para valores de  $m$  suficientemente maiores que o valor de  $\rho$ , o sistema (2.12) admite uma Solução de Filippov periódica, a qual caracteriza a existência de um Ciclo Limite Típico (ver Capítulo 7) do sistema (2.12).*

*Demonstração.* Afim de demonstrarmos o Teorema 2.10, temos que identificar no sistema (2.14) os elementos do Teorema 2.7. Para isso, tomemos

$$\frac{\rho}{m} = \varepsilon \bar{\rho}$$

e consideremos

$$G^1(x, y) = 0, \quad \bar{G}_1^1(x, y) = 0, \quad \bar{G}_2^1(x, y) = -\bar{\rho} a y,$$

$$g(x, y) = x^2 - \phi_c^2 \quad \text{e} \quad h(\theta, r) = r^2 \cos^2(\theta) - \phi_c^2.$$

Sendo assim, a equação (2.12) é escrita nos termos do sistema (2.1).

Para obtermos a expressão da função  $\tilde{\mathcal{F}}$ , definida em (2.8), temos que calcular os zeros de  $h(\theta, r)$ . Facilmente, obtemos que:

se  $r \geq \phi_c$ , então,  $\tilde{h}(\theta, r) = 0$ , se, e somente se,  $\theta \in \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ , onde

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arccos\left(\frac{\phi_c}{r}\right), & \theta_3 &= \arccos\left(\frac{\phi_c}{r}\right) + \pi \\ \theta_2 &= \arccos\left(-\frac{\phi_c}{r}\right), & \theta_4 &= \arccos\left(-\frac{\phi_c}{r}\right) + \pi; \end{aligned}$$

se  $r < \phi_c$ , então, a função  $\tilde{h}(\theta, r)$  assume somente valores negativos para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

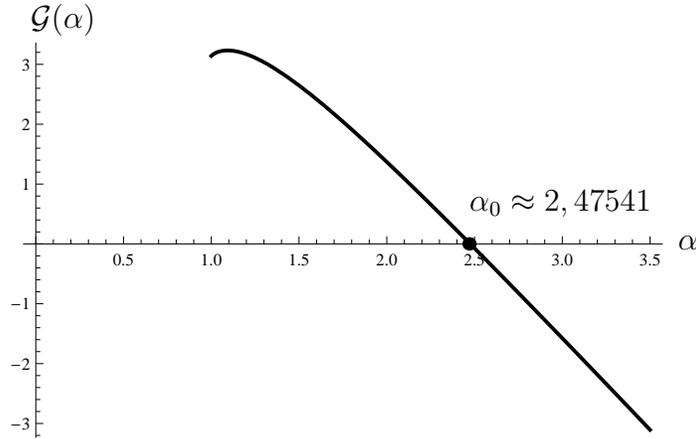


Figura 2.2: Gráfico da função  $\mathcal{G}$ .

Sendo assim, procedendo com a integração por partes, obtemos que

$$\tilde{\mathcal{F}}(r) = \begin{cases} 4\bar{\rho} a \phi_c \sqrt{1 - \frac{\phi_c^2}{r^2}} - 4\bar{\rho} a r \arccos\left(\frac{\phi_c}{r}\right) + \pi\bar{\rho} a r, & \text{se } r \geq \phi_c, \\ \bar{\rho} a \pi r, & \text{se } r < \phi_c. \end{cases}$$

Dado  $\alpha \geq 1$ , definamos a aplicação  $\mathcal{G}(\alpha)$  por

$$\mathcal{G}(\alpha) = \frac{1}{\bar{\rho} a \phi_c} \tilde{\mathcal{F}}(\alpha\phi_c).$$

Como  $\alpha\phi_c \geq \phi_c$ , segue que,

$$\mathcal{G}(\alpha) = 4\sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}} + \pi\alpha - 4\alpha \operatorname{arcsec}(\alpha).$$

Observe que  $\mathcal{G}(\alpha)$  é uma função real com todos os parâmetros determinados, sendo assim, podemos encontrar numericamente as suas raízes (Veja a Figura 2.2). Procedendo com os cálculos, obtemos que  $\mathcal{G}(\alpha_0) = 0$  para  $\alpha_0 \approx 2,47541$ . Segue daí a existência de  $r_0 \approx 2,47541\phi_c$  tal que  $\tilde{\mathcal{F}}(r_0) = 0$ .

Claramente, segundo a Definição 2.6,  $r_0$  é um zero simples da equação (2.9). Assim, aplicando o Teorema 2.7, concluímos que, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, existe uma solução periódica  $\phi(t, \varepsilon)$  do sistema (2.12) tal que

$$\left| \left( \phi(t, \varepsilon), \dot{\phi}(t, \varepsilon) \right) \right| \rightarrow r_0,$$

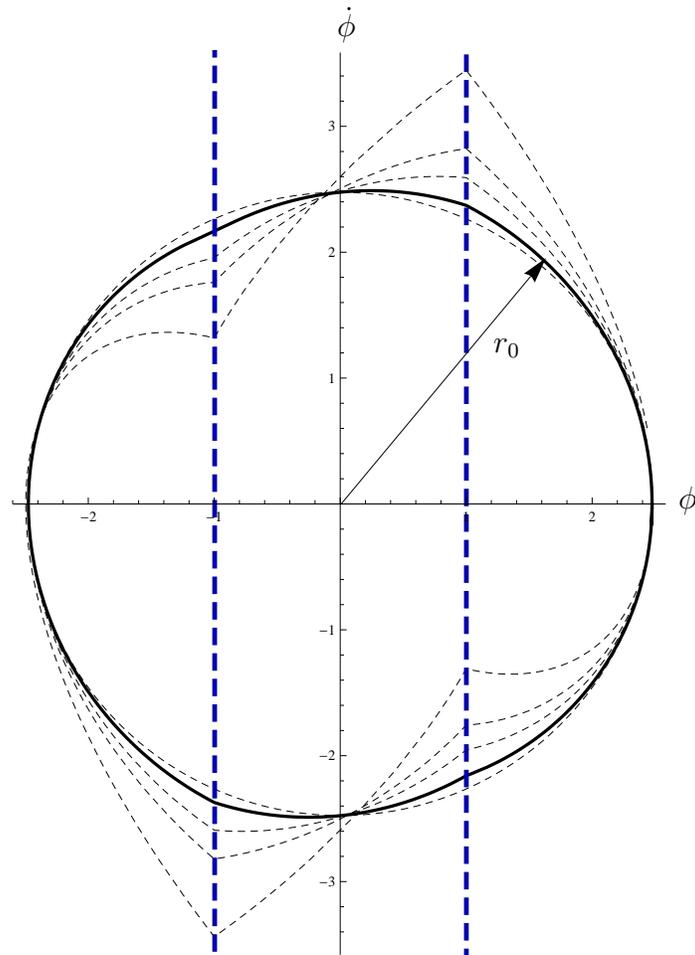


Figura 2.3: Órbitas periódicas para vários valores de  $\epsilon$ .

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Temos, então, demonstrado o teorema.

□

---

## 2.7 Sistemas de Filippov Não Regulares

---

Definimos, no Capítulo 1, a classe de *Sistemas de Filippov Regulares* como aqueles, da forma (1.1), para os quais o conjunto de descontinuidade é uma variedade regular.

É natural, então, entendermos por *Sistemas de Filippov Não Regulares* como sendo aqueles, da forma (1.1), porém, que não possuem o conjunto de descontinuidade como sendo uma variedade regular. De fato, para os sistemas que estudaremos nesta seção, o conjunto de descontinuidade não é variedade.

Nos concentraremos em Sistemas de Filippov Não Regulares no plano  $\mathbb{R}^2$ , os quais, surgem naturalmente no estudo de sistemas mecânicos (veja, por exemplo, [2]).

Assumamos que o sistema (2.1) seja autônomo e  $D = \mathbb{R}^2$ . Para esse caso, a hipótese H'2\* pede que

$$(H'2^*) \quad \nabla g(x, y) \cdot S_\Lambda \cdot (x, y) \neq 0 \text{ para todo } (x, y) \in \mathcal{M}_g \cap \Psi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+).$$

Aqui,  $\Psi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$ . Desse modo a hipótese H'2\* pode ser reescrita como

$$(H'2^*) \quad \nabla g(x, y) \cdot S_\Lambda \cdot (x, y) \neq 0 \text{ para todo } (x, y) \in \mathcal{M}_g \setminus (0, 0).$$

Como  $S_\Lambda$  é matriz não singular, segue que,  $\mathcal{M}_g$  pode deixar de ser variedade somente em  $(x, y) = (0, 0)$ . Sendo assim, o teorema é aplicável quando, por exemplo

$$g(x, y) = \prod_{i=1}^k (a_i x + b_i y),$$

para qualquer coleção finita de  $a_i$ 's e  $b_i$ 's tal que

$$\left| \frac{a_i}{b_i} \right| \neq \left| \frac{a_j}{b_j} \right|,$$

para  $i \neq j$ .

O conjunto de descontinuidade neste caso é a união de retas não coincidentes passando pela origem.

Em [29], Llibre e Teixeira estudaram sistemas deste tipo que são generalizações descontínuas das equações de Liénard.

A principal característica da mudança de variáveis, apresentada no Teorema 2.4, é o fato de levar o sistema (1.1) para sua forma normal (2.3), ao mesmo tempo que elimina os problemas existentes na origem. Sendo assim, para tentarmos aplicar o Teorema 1.4 em algum sistema descontínuo, para o qual, o conjunto de descontinuidade não é uma variedade regular, temos que encontrar uma mudança de variáveis que coloque o sistema na forma normal (ou pelo menos que o mantenha na forma normal) e que, ao mesmo tempo, elimine algum subconjunto do conjunto de descontinuidade, de modo que, o conjunto remanescente seja uma variedade regular.

É válido observarmos que no plano, a mudança de variáveis, proposta pelo Teorema 2.4, é equivalente ao conhecido Método de Blowing-up (veja, por exemplo, [16]) e resolve (no sentido que transforma um Sistema de Filippov Não Regular em um Regular) os sistemas que possuem um único ponto em que o conjunto de descontinuidade deixa de ser variedade regular.

Esclareceremos melhor a metodologia proposta, nos parágrafos acima, com o exemplo a seguir.

Consideremos a seguinte equação diferencial

$$\ddot{x}(t) = -x + \varepsilon (\dot{x} - \text{sign}(\dot{x}(x^2 - x_0^2))). \quad (2.15)$$

O conjunto de descontinuidade  $\mathcal{M}_g$  da equação (2.15) é dado como imagem inversa da função  $g(x, y) = y(x^2 - x_0^2)$  (veja Figura 2.4); tal conjunto deixa de ser variedade nos pontos  $P_1 = (-x_0, 0)$  e  $P_2 = (x_0, 0)$ .

Construiremos agora uma mudança de variáveis que nos permite estudar a existência de órbitas periódicas, para as quais, ao considerarmos a região delimitada pela orbita que contenha a origem, também contenha os pontos  $P_1$  e  $P_2$ .

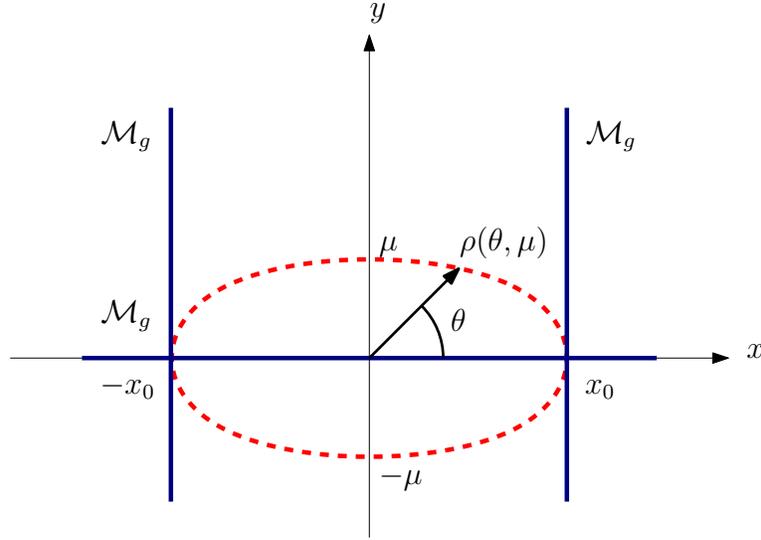


Figura 2.4: Conjunto de descontinuidade da equação (2.15)

Consideremos a elipse no plano passando pelos pontos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $(0, \mu)$  e  $(0, -\mu)$  como indicado na Figura 2.4.

Sabemos que, em coordenadas polares, a equação da elipse, definida na Figura 2.4, é dada por

$$\rho(\theta, \mu) = \frac{\mu x_0}{\sqrt{\mu^2 \cos^2(\theta) + x_0^2 \sin^2(\theta)}}.$$

Seja  $\mathcal{D} = [0, 2\pi) \times \mathbb{R}^+$ . Dado  $\mu$ , parâmetro real, definamos a aplicação  $\Psi_\mu : \mathcal{D} \rightarrow \Psi_\mu(\mathcal{D})$  por  $\Psi_\mu(\theta, r) = (\Psi_\mu^1(\theta, r), \Psi_\mu^2(\theta, r))$ , onde

$$\Psi_\mu^1(\theta, r) = (r + \rho(\theta, \mu)) \cos(\theta),$$

$$\Psi_\mu^2(\theta, r) = (r + \rho(\theta, \mu)) \sin(\theta).$$

Observe que

$$\Psi_\mu^1(\theta, r)^2 + \Psi_\mu^2(\theta, r)^2 = (r + \rho(\theta, \mu))^2 > \rho^2(\theta, \mu).$$

Sendo assim,  $\Psi_\mu(\mathcal{D}) \subset \mathbb{R}^2 \setminus E_\mu$ , onde  $E_\mu$  é a elipse, definida na Figura 2.4, unida com a região por ela delimitada.

Facilmente, obtemos que

$$J_{\Psi_\mu}(\theta, r) = r + \rho(\theta, \mu),$$

logo,  $J_{\Psi_\mu}(\theta, r) \neq 0$  para todo  $(\theta, r) \in \mathcal{D}$  e  $\mu > 0$ . Observe também que  $\Psi_\mu(\theta_1, r_1) = \Psi_\mu(\theta_2, r_2)$  se, e somente se,  $\theta_1 = \theta_2$  e  $r_1 + \rho(\theta_1, \mu) = r_2 + \rho(\theta_2, \mu)$ . Sendo assim,  $\Psi_\mu$  é uma aplicação injetora de  $\mathcal{D}$  em  $\Psi_\mu(\mathcal{D})$ , logo bijetora. Portanto, pelo Teorema da Função Inversa, segue que,  $\Psi_\mu$  é um difeomorfismo de  $\mathcal{D}$  em  $\Psi_\mu(\mathcal{D})$ .

Dado  $\mu > 0$ , podemos concluir, pelos comentários feitos nas seções anteriores, que o conjunto de descontinuidade obtido ao considerarmos a mudança de variáveis  $(x, y) = \Psi_\mu(\theta, r)$  com  $y = \dot{x}$ , será, na verdade, uma variedade regular, viabilizando, assim, a aplicação da teoria desenvolvida. Contudo, ao realizar tal mudança de variáveis, perdemos todas as informações contidas na região  $E_\mu$ .

Uma vez que, a família de conjuntos  $\{E_\mu; \mu > 0\}$  é decrescente, no sentido que  $E_{\mu_1} \subset E_{\mu_2}$ , se, e somente se,  $\mu_1 < \mu_2$ ; e  $E_\mu \rightarrow [-x_0, x_0]$  quando  $\mu \rightarrow 0$ , segue que, quanto menor o valor parâmetro  $\mu > 0$ , menor será a quantidade de informações perdidas, do sistema original, ao se realizar a mudança de coordenadas.

Entretanto, a dificuldade algébrica, ao considerarmos valores arbitrários para o parâmetro  $\mu$ , é enorme (indicaremos, a frente, onde aparece tais complicações algébricas). Desse modo, iremos considerar um valor fixo para o parâmetro  $\mu$ . De fato, tomaremos a região  $E_\mu$  como sendo a bola fechada em  $R^2$ , de raio  $x_0$  e centro  $(0, 0)$ .

Fixemos  $\mu = x_0$  e consideremos a mudança de variáveis

$$(x, y) = \Psi_{x_0}(\theta, r) = ((r + x_0) \cos(\theta), (r + x_0) \sin(\theta)),$$

com  $y = \dot{x}$ .

Logo, para  $(\theta, r) \in \mathcal{D}$ , temos que  $h(\theta, r) = g(\Psi_{x_0}(\theta, r))$  é dado por

$$h(\theta, r) = (r + x_0) \sin(\theta) \left( (r + x_0)^2 \cos^2(\theta) - x_0^2 \right).$$

## 2 Osciladores Fracamente Acoplados

---

Seguindo a argumentação do Teorema 2.4 obtemos que a equação (2.15) fica reduzida à equação

$$\frac{dr}{d\theta}(\theta) = \varepsilon \left( -(r + x_0) \sin^2(\theta) + \text{sign} \left( \tilde{h}(\theta, r) \right) \sin(\theta) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (2.16)$$

com

$$\tilde{h}(\theta, r) = \sin(\theta) \left( (r + x_0)^2 \cos^2(\theta) - x_0^2 \right).$$

Observe que  $\tilde{h}(\theta, r) = 0$  se, e somente se,  $\theta \in \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\}$ , onde

$$\begin{aligned} \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \arccos \left( \frac{x_0}{r + x_0} \right), \quad \theta_3 = \arccos \left( -\frac{x_0}{r + x_0} \right), \\ \theta_4 = \pi, \quad \theta_5 = 2\pi - \theta_3 \quad \text{e} \quad \theta_6 = 2\pi - \theta_2. \end{aligned}$$

Portanto, segue que,  $\tilde{\mathcal{M}} = \tilde{h}^{-1}(0)$  é dado por

$$\tilde{\mathcal{M}} = \{(\theta, r) \in \mathcal{D} : \theta = \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6; r > 0\}.$$

Note que, agora, o conjunto de descontinuidade  $\tilde{\mathcal{M}}$  da equação (2.16) é uma variedade regular em  $\mathcal{D}$ , mais ainda,

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta}(\theta) = \cos(\theta) \left( \frac{(r + x_0)^2}{2} (3 \cos(2\theta) - 1) - x_0^2 \right) \neq 0,$$

para todo  $(\theta, r) \in \tilde{\mathcal{M}}$ .

Podemos, então, aplicar o Teorema 1.4 para o sistema (2.16). A função promediada, definida em (1.2), para a equação (2.16) é dada por

$$f_0(r) = \frac{8r}{r + x_0} - \pi(r + x_0) - 4.$$

Observe que, a dificuldade algébrica mencionada, anteriormente, aparece, justamente, no cálculo da expressão de  $f_0(r)$ , e, posteriormente, no cálculo das soluções do sistema (2.17).

Afim de estudarmos as soluções periódicas da equação (2.16), construiremos, a seguir, o diagrama de bifurcação das soluções do sistema

$$f_0(r) = 0 \quad (2.17)$$

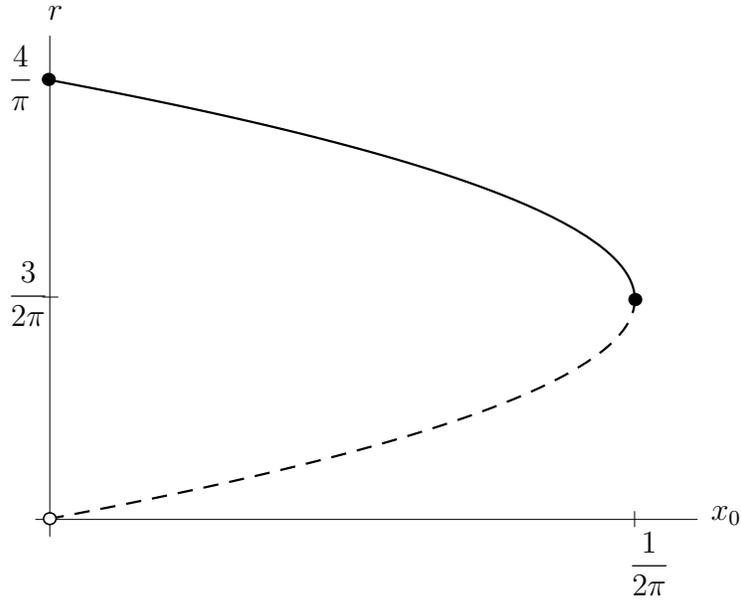


Figura 2.5: Diagrama de bifurcação do sistema (2.17)

(veja Figura 2.5).

Se  $x_0 = 0$ , então, temos  $r_0^0$  como solução do sistema (2.17), onde

$$r_0^0 = \frac{4}{\pi};$$

se  $0 < x_0 < 1/(2\pi)$ , então, temos  $\{r_0^1, r_0^2\}$  como conjunto de soluções do sistema (2.17), onde

$$r_0^1 = \frac{2}{\pi} - x_0 - \frac{2\sqrt{1 - 2\pi x_0}}{\pi} \quad \text{e} \quad r_0^2 = \frac{2}{\pi} - x_0 + \frac{\sqrt{1 - 2\pi x_0}}{\pi};$$

se  $x_0 = 1/(2\pi)$ , então, temos  $r_0^3$  como solução do sistema (2.17), onde

$$r_0^3 = \frac{3}{2\pi};$$

finalmente, se  $x_0 > 1/(2\pi)$ , então, não existe solução real positiva do sistema (2.17).

Pelo Teorema 1.4, considerando  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, para cada solução  $r_0^i$  indicada no diagrama existe uma solução periódica  $r^i(\theta, \varepsilon)$  do sistema (2.16), tal que  $r^i(\theta, \varepsilon) \rightarrow r_0^i$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## 2 Osciladores Fracamente Acoplados

---

Portanto, para  $x_0 = 0$  ou  $x_0 = 1/(2\pi)$ , o Teorema 1.4 garante a existência de uma solução periódica; e para  $0 < x_0 < 1/(2\pi)$ , o Teorema 1.4 garante a existência de duas soluções periódicas. Note que, o fato do Teorema 1.4 garantir a existência de uma ou duas soluções periódicas da equação (2.16) não implica que elas sejam únicas, ou seja, podem existir outras soluções periódicas não detectadas pelo Teorema 1.4.

Uma vez que

$$\begin{aligned} |(x, y)|^2 &= |\Psi_{x_0}(\theta, r)|^2, \\ &= (r + x_0)^2 \cos^2(\theta) + (r + x_0)^2 \sin^2(\theta), \\ &= (r + x_0)^2, \end{aligned}$$

segue que, se  $r(\theta, \varepsilon)$  for solução periódica da equação (2.16), tal que  $r(\theta, \varepsilon) \rightarrow r_0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , então, existe uma solução periódica  $x(t, \varepsilon)$  da equação (2.15) tal que  $|x(t, \varepsilon), \dot{x}(t, \varepsilon)| \rightarrow r_0$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Em resumo, concluímos que:

Se  $x_0 = 0$ , então, existe um ciclo limite  $x^0(t, \varepsilon)$  da equação (2.15) tal que  $|x^0(t, \varepsilon), \dot{x}^0(t, \varepsilon)| \rightarrow r_0^0$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;

se  $0 < x_0 < 1/(2\pi)$ , então, existem dois ciclos limites,  $x^1(t, \varepsilon)$  e  $x^2(t, \varepsilon)$ , da equação (2.15) tal que  $|x^1(t, \varepsilon), \dot{x}^1(t, \varepsilon)| \rightarrow r_0^1$  e  $|x^2(t, \varepsilon), \dot{x}^2(t, \varepsilon)| \rightarrow r_0^2$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;

finalmente, se  $x_0 = 1/(2\pi)$ , então, existe um ciclo limite  $x^3(t, \varepsilon)$  da equação (2.15) tal que  $|x^3(t, \varepsilon), \dot{x}^3(t, \varepsilon)| \rightarrow r_0^3$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Note que o Teorema 1.4 não fornece o número de ciclos limites existentes em uma certa região, mas sim um limite inferior da quantidade de ciclos limites existentes.

Observe também que, a mudança de variáveis desenvolvida no estudo acima, não nos permite estudar os ciclos limites que, por ventura, cruzam o conjunto  $[-x_0, x_0] \times \{0\}$ , uma vez que  $[-x_0, x_0] \times \{0\} \subset E_\varepsilon$  para todo  $\varepsilon$  real.

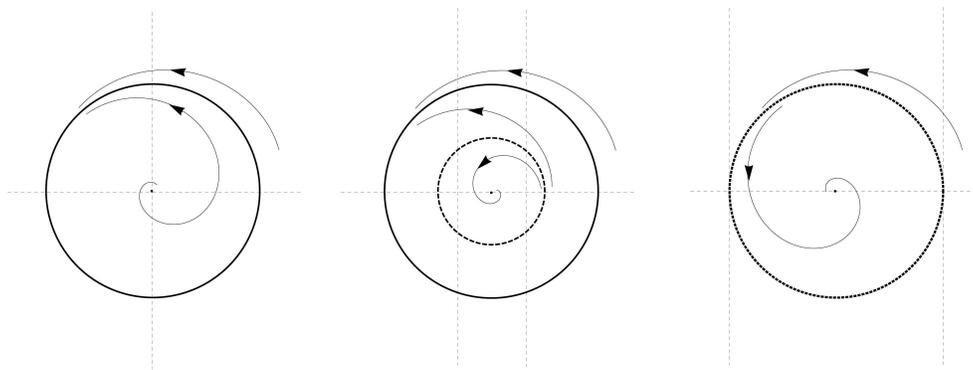


Figura 2.6: Bifurcações dos ciclos limites (2.17) . As flechas se alteram, caso alterado o sinal de  $\varepsilon$ .

Uma possível abordagem, para estudarmos a existência ou não destes ciclos limites para valores de  $x_0$  grande o suficiente, seria transformar a equação (2.15), via Blowing-up polar, e restringir o novo sistema obtido para valores de  $r$  menores que  $x_0$ .

Uma vez que a origem é um foco, atrator ou não, e o sistema não perturbado é um centro na origem, segue que, para valores de  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequenos, as soluções iniciando em  $r < x_0$ , para  $\theta > 0$  (atrator) ou para  $\theta < 0$  (repulsor), permaneceriam contidas na bola aberta de centro  $(0, 0)$  e raio  $x_0$ . Deste modo, a equação restringida seria um Sistema de Filippov Regular, para o qual poderíamos aplicar o Teorema 1.4 e obter, por ventura, informações sobre as suas soluções periódicas e, conseqüentemente, obter informações sobre os ciclos limites da equação (2.15) que cruzam o conjunto  $[-x_0, x_0] \times \{0\}$ .

As Figuras 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11 e 2.12 são simulações, da equação (2.15), endossando numericamente: o aparecimento dos ciclos limites, para diversos valores de  $x_0$ ; e a convergência dos mesmos ao tender o valor do parâmetro  $\varepsilon$  a 0.

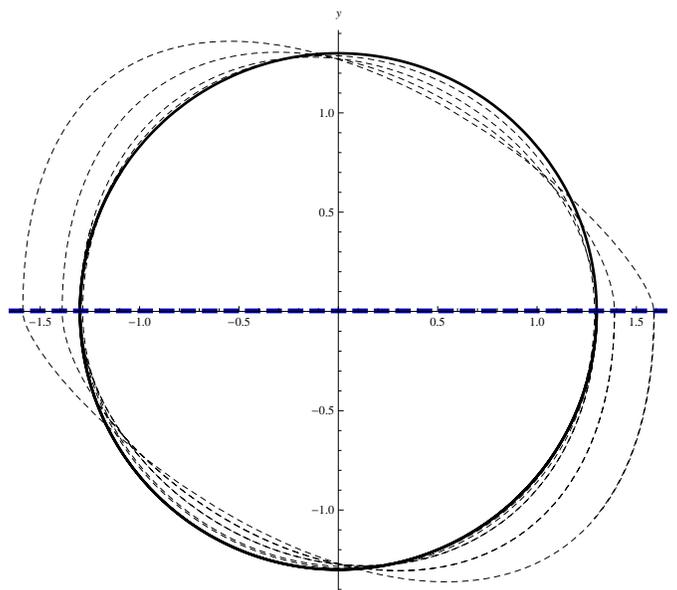


Figura 2.7: Cíclo limite para  $x_0 = 0$ . Parâmetro  $\varepsilon$  variando de 1,5 a 0.

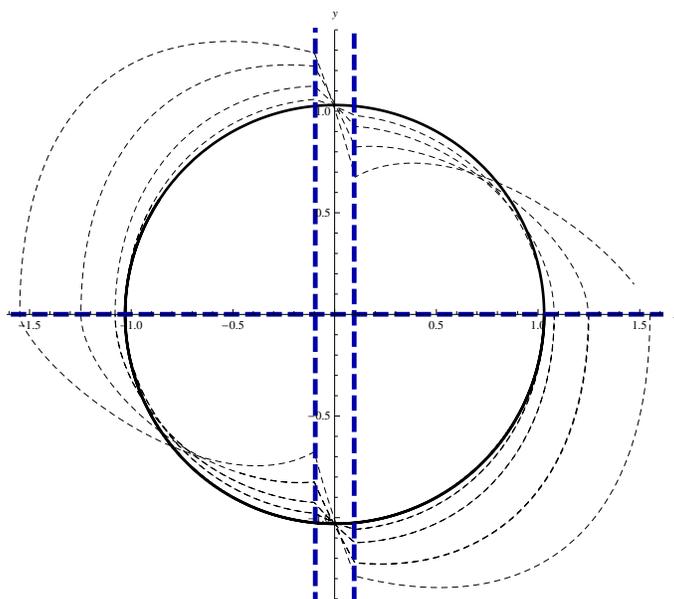


Figura 2.8: Cíclo limite para  $x_0 = 0, 1$ . Parâmetro  $\varepsilon$  variando de 1,5 a 0.

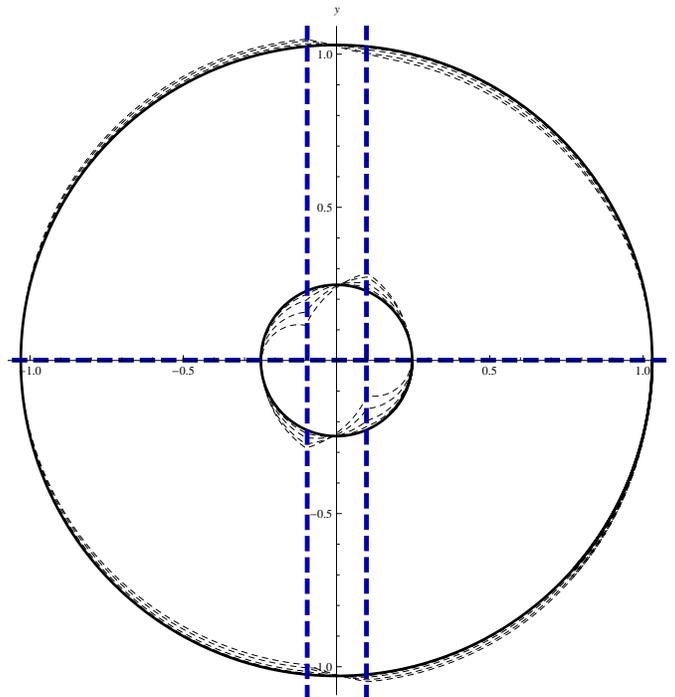


Figura 2.9: Dois cíclos limites para  $x_0 = 0, 1$ . Parâmetro  $\varepsilon$  variando de 0,14 a 0.

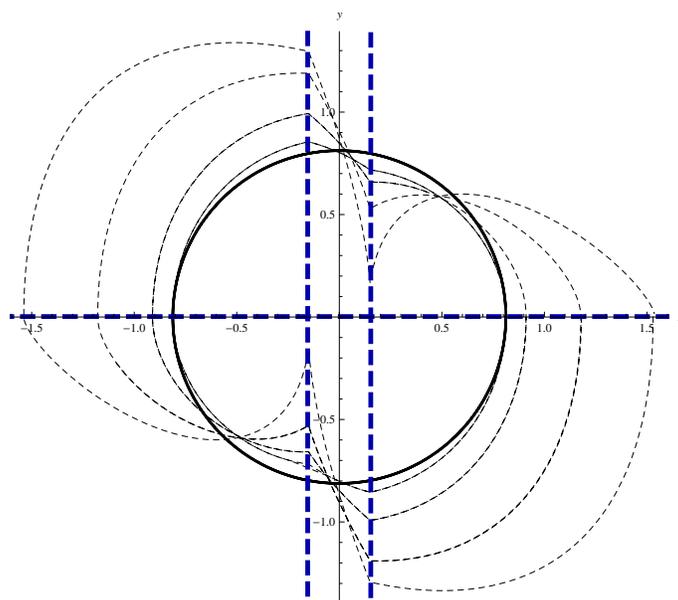


Figura 2.10: Ciclo limite para  $x_0 = 0, 15$ . Parâmetro  $\varepsilon$  variando de 1,5 a 0.

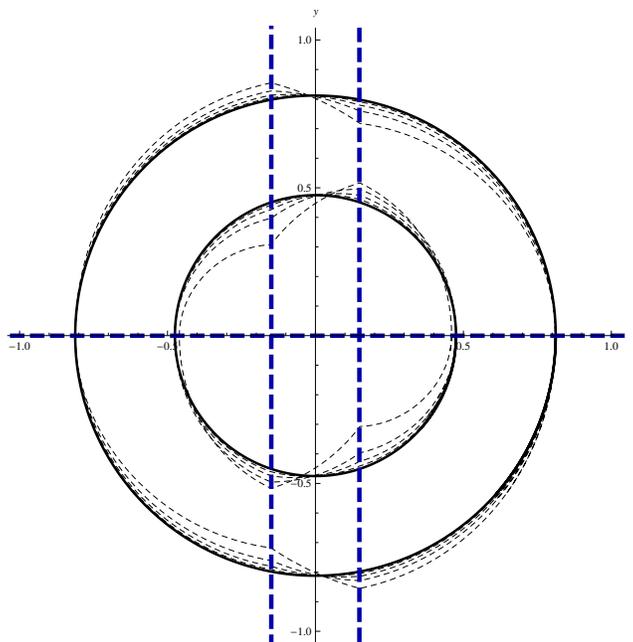


Figura 2.11: Dois cíclos limites para  $x_0 = 0,15$ . Parâmetro  $\varepsilon$  variando de 0,2 a 0.

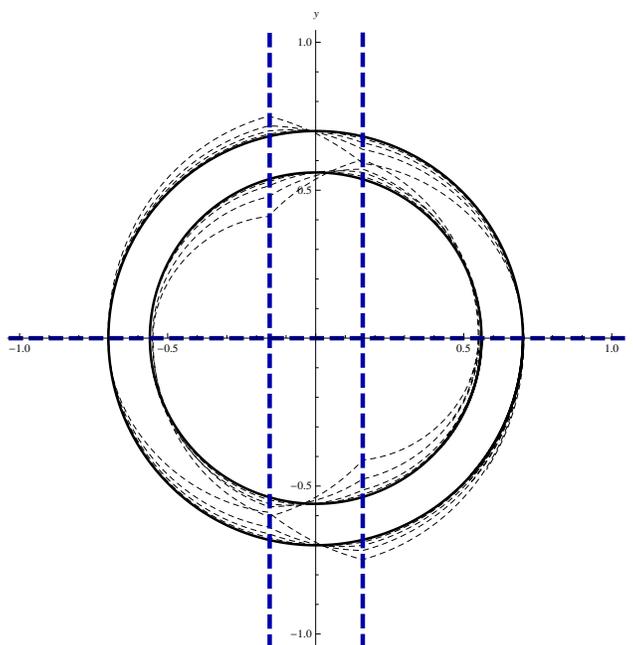


Figura 2.12: Dois cíclos limites para  $x_0 = 0,159$ . Parâmetro  $\varepsilon$  variando de 0,2 a 0.



---

---

# CAPÍTULO 3

---

## Resultados e Conceitos Preliminares

---

### 3.1 Sistemas de Filippov

---

Existe uma enorme variedade de equações diferenciais descontínuas, e, para todas elas, o primeiro problema, e também o mais fundamental, que nos deparamos ao se estudar tais sistemas é: *Como bem definir uma solução para uma equação diferencial descontínua?*

Entendemos aqui, por equações diferenciais descontínuas, as equações do seguinte tipo

$$\dot{x}(t) = X(t, x(t)), \tag{3.1}$$

com  $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , onde, para cada  $t \in \mathbb{R}$  fixo, a função  $x \mapsto X(t, x)$  não é, necessariamente, contínua.

Equações diferenciais do tipo (3.1) possuem inúmeras aplicações na Física (veja, por exemplo, [7] e [25]), na Biologia (veja, por exemplo, [4] e [23]), na Economia (veja, por exemplo, [19] e [20]) e em diversas outras áreas científicas.

Como já dissemos, o problema mais básico, relacionada às equações do tipo (3.1), consiste em como bem definir as suas soluções. Uma vez que, o campo vetorial é

descontínuo, não existem, em geral, curvas diferenciáveis que satisfaçam a equação (3.1). Desse modo, tem-se que construir noções diferentes, porém, adequadas para o que seria uma solução da equação (3.1).

Na literatura existente sobre o assunto, não se tem uma única resposta para o problema da definição do que seria uma solução. Tem-se utilizado noções distintas de soluções para diferentes problemas.

A definição de solução segundo Caratheódory (veja, por exemplo, [18]) para a equação (3.1) é a generalização, mais natural possível, da teoria clássica de equações diferenciais. Entretanto, soluções segundo Caratheódory não existem em muitas das aplicações.

A definição de soluções segundo Filippov (veja [18]) e Krasovskii (veja [22]) fazem uso do conceito de inclusão diferencial. O conceito de inclusão diferencial consiste em se definir uma aplicação multivalorada  $F(t, x(t))$  que associa, para cada ponto do espaço de fase, um conjunto de possíveis direções. Dessa forma, a equação diferencial (3.1) é associada à inclusão diferencial

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)). \quad (3.2)$$

Agora o problema passa a ser como definir essa aplicação multivalorada.

Muitos outros autores trabalharam em cima de definições plausíveis para o problema (3.1), porém, nesta dissertação, fixaremos nossa atenção no estudo desenvolvido por Filippov.

#### 3.1.1 Aplicação Multivalorada de Filippov

Caratheódory, na sua definição para soluções de sistemas do tipo (3.1), atribui uma importância principal para o valor do campo vetorial em um dado ponto. Como já dito, anteriormente, sua estratégia se mostrou ineficiente em muitas das aplicações.

Filippov, ao invés de se preocupar com o valor do campo vetorial em um dado ponto, assume a estratégia de olhar o que se passa em uma vizinhança desse ponto.

### 3 Resultados e Conceitos Preliminares

---

Essa nova abordagem é essencial para a definição das soluções de sistemas descontínuos como veremos a seguir.

**Definição 3.1.** *Seja  $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo vetorial, possivelmente descontínuo, como definido em (3.1). Definamos a Aplicação Multivalorada de Filippov*

$$F[X] : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n),$$

por

$$F[X](t, x) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu(S)=0} \overline{\text{co}} \{X(t, B(x, \delta) \setminus S)\}.$$

Na fórmula acima,  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$  denota as partes de  $\mathbb{R}^n$ ,  $B(x, \delta)$  denota a bola aberta em  $\mathbb{R}^n$  de centro  $x$  e raio  $\delta$ ,  $\overline{\text{co}}$  denota o fecho convexo e  $\mu$  denota a medida de Lebesgue.

Pela definição da Aplicação Multivalorada de Filippov, o valor de  $F[X](t, x)$  é independente do valor do campo  $X$  em  $(t, x)$ .

Enunciaremos, a seguir, como lemas, algumas das propriedades da Aplicação Multivalorada de Filippov para campos vetoriais autônomos.

**Lema 3.2** (Consistência). *Se  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínuo em  $x \in \mathbb{R}^n$ , então,*

$$F[X](x) = \{X(x)\}.$$

**Lema 3.3** (Regra da Soma). *Se  $X_1, X_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  são localmente limitados em  $x \in \mathbb{R}^n$ , então,*

$$F[X_1 + X_2](x) \subset F[X_1](x) + F[X_2](x).$$

*Mais ainda, se um dos espaços vetoriais são contínuos em  $x$ , então, vale a igualdade.*

**Lema 3.4** (Regra do Produto). *Se  $X_1, X_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  são localmente limitados em  $x \in \mathbb{R}^n$ , então,*

$$F[(X_1, X_2)](x) \subset F[X_1](x) \times F[X_2](x).$$

*Mais ainda, se um dos espaços vetoriais são contínuos em  $x$ , então, vale a igualdade.*

**Lema 3.5** (Regra da Cadeia). *Se  $Y : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$  é contínuo e diferenciável em  $x \in \mathbb{R}^l$  com posto  $m$  e  $X : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é localmente limitado em  $Y(x) \in \mathbb{R}^m$ , então,*

$$F[X \circ Y](x) = F[X](Y(x)).$$

**Lema 3.6** (Regra da Transformação Matricial). *Se  $X : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é localmente limitado em  $x \in \mathbb{R}^m$  e  $Z : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$  é contínuo em  $x \in \mathbb{R}^m$ , então,*

$$F[Z X](x) = Z(x)F[X](x).$$

Os Lemas 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6 estão enunciados e demonstrados em [34].

Resultados similares podem ser obtidas para campos de vetores não autônomos.

Concluimos esta seção com um resultado que fornece uma descrição alternativa para a Aplicação Multivalorada de Filippov.

**Proposição 3.7.** *Se  $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é mensurável e localmente essencialmente limitada, então, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , existe  $S_t \subset \mathbb{R}^n$  de medida zero tal que*

$$F[X](t, x) = \overline{\text{co}} \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} X(t, x_i) : x_i \rightarrow x, x_i \notin S \cup S_t \right\},$$

onde  $S$  é qualquer conjunto de medida zero.

A Proposição 3.7 também está enunciada e demonstrada em [34].

#### 3.1.2 Inclusão Diferencial

As Soluções de Filippov para equações descontínuas são dadas em termos de soluções de inclusões diferenciais. Sendo assim, nesta seção, apresentaremos os conceitos básicos da Teoria de Inclusão Diferencial.

Podemos caracterizar a distância entre dois conjuntos fechados  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  pelas seguintes expressões:

$$\beta(A, B) = \sup_{a \in A} |a, b|,$$

$$\beta(B, A) = \sup_{b \in B} |b, a|,$$

$$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}.$$

Tendo em mãos as expressões de  $\alpha$  e  $\beta$ , podemos definir os conceito de continuidade e continuidade superior de uma aplicação multivalorada.

**Definição 3.8.** *Seja  $G$  um domínio aberto. Dizemos que uma aplicação multivalorada  $F : G \rightarrow \mathfrak{B}(G)$  é:*

- *Contínua no ponto  $p$ , se  $\alpha(F(p'), F(p)) \rightarrow 0$ , quando  $p' \rightarrow p$ ;*
- *Semicontínua Superiormente no ponto  $p$ , se  $\beta(F(p'), F(p)) \rightarrow 0$ , quando  $p' \rightarrow p$ .*

Consideremos a Inclusão Diferencial

$$\dot{x} \in F(t, x). \quad (3.3)$$

Definimos, a seguir, o que seria uma solução da inclusão diferencial (3.3).

**Definição 3.9.** *Uma solução da inclusão diferencial (3.3) é uma aplicação contínua  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\dot{\gamma}(t) \in F(\gamma(t))$  para quase todo  $t \in [t_0, t_1]$ .*

A próxima “definição” estabelece as hipóteses básicas para a existência de soluções da inclusão diferencial.

**Definição 3.10** (Condições Básicas). *Dizemos que o domínio  $G$  e a aplicação multivalorada  $F(x)$  satisfazem as Condições Básicas se, para todo  $x \in G$ , o conjunto  $F(x)$  é não vazio, limitado, fechado e convexo e a função  $F$  é Contínua Superiormente em  $x$ .*

As definições desta seção estão feitas em [18].

#### 3.1.3 Soluções de Filippov

Com a convenção fixada na seção anterior, estamos aptos a trabalhar com campos vetoriais descontínuos.

Considere, então, a equação diferencial (3.1) determinada pelo campo vetorial descontínuo  $X(t, x(t))$

$$\dot{x}(t) = X(t, x(t)).$$

Utilizando a Aplicação Multivalorada de Filippov, associamos, à equação diferencial (3.1), a inclusão diferencial

$$\dot{x}(t) \in F[X](t, x(t)). \quad (3.4)$$

Definamos, então, o que vem a ser uma Solução de Filippov para a equação (3.1).

**Definição 3.11.** *Uma Solução de Filippov da equação (3.1) é uma solução da inclusão diferencial (3.4).*

#### 3.1.4 Sistemas Contínuos por Partes

Nesta dissertação, trabalhamos, somente, com campos vetoriais contínuos por partes, sendo assim, é interessante definirmos os elementos da teoria de Filippov para essa classe de sistemas descontínuos.

**Definição 3.12.** *Dizemos que o campo vetorial  $X : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínuo por partes se o domínio  $D$  pode ser particionado por conjuntos abertos e conexos, para os quais, a restrição do campo  $X$  a cada  $\bar{D}_i$  é contínua para  $i = 1, \dots, k$ . Em outras palavras, existe uma coleção  $D_1, \dots, D_k$  de subconjuntos de  $D$ , disjuntos, abertos e conexos, com*

$$D = \bigcup_{i=1}^k \bar{D}_i,$$

*e tal que, o campo  $X_i : \bar{D}_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definido por*

$$X_i = X \Big|_{\bar{D}_i}$$

*é contínuo.*

Trabalhamos, por simplicidade, com campos vetoriais autônomos, porém, pode-se estender a definição, de maneira análoga, para campos de vetores não autônomos.

Denotemos  $S_X \subset \partial D_1 \cup \dots \cup \partial D_k$  o conjunto de pontos onde o campo vetorial  $X$  é descontínuo. Claramente,  $S_X$  tem medida zero.

A Aplicação Multivalorada de Filippov associada com o campo  $X$  da Definição 3.12 possui, particularmente, uma expressão simples dada por

$$F[X](x) = \overline{\text{co}} \left\{ \lim_{i \rightarrow 0} X(x_i) : x_i \rightarrow x, x_i \notin S_X \right\}.$$

Esta aplicação pode ser, facilmente, computada da seguinte maneira:

**Proposição 3.13.** *Considere o campo vetorial dado na Definição 3.12.*

- (i) *Se  $x \notin S_X$ , então,  $F[X](x) = \{X(x)\}$ ;*
- (ii) *se  $x \in S_X$ , então,  $F[X](x)$  é um poliedro convexo em  $\mathbb{R}^n$  com os vértices dados por*

$$X|_{\overline{D_i}}(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} X(x_j),$$

*com  $x_j \rightarrow x$ ,  $x_j \in D_i$  e  $x_i \notin S_X$ , para  $i = 1, \dots, k$ ;*

- (iii) *e se  $x \in \partial D_i \cap \partial D_j$ , para algum  $i, j = 1, \dots, k$ , então,*

$$F[X](x) = \overline{\text{co}} \left\{ X|_{\overline{D_i}}(x), X|_{\overline{D_j}}(x) \right\}.$$

A Proposição 3.13 está enunciada em [15]

Vejam algumas possibilidades qualitativas para a noção de solução dada pela Definição 3.12.

- Dado  $x \in \partial D_i \cap \partial D_j$ . Se todos os vetores em  $F[X](x)$  apontam na direção de  $D_i$ , então, qualquer solução de Filippov que atinge  $S_X$  em  $x$ , continua seu movimento em  $D_i$ . Analogamente, para  $D_j$ .
- Dado  $x \in \partial D_i \cap \partial D_j$ . Se algum vetor de  $F[X](x)$  for tangente à  $S_X$ , então, acontece um dos fenômenos: qualquer solução de Filippov, iniciando em  $x$ , deixa o conjunto  $S_X$ , imediatamente; existe uma solução de Filippov que atinge o conjunto  $S_X$  em  $x$  e permanece em  $S_X$ . O primeiro fenômeno é conhecido como *Escape* e o segundo como *Deslize*.

Usando-se a convecção de Filippov para as soluções de sistema descontínuos, podemos estudar também o comportamento qualitativo de soluções passando pela intersecção de mais de dois conjuntos dentre  $\partial D_1, \dots, \partial D_k$ . Não nos preocuparemos com tal configuração pois o resultado principal enunciado e demonstrado nessa dissertação preocupa-se somente com os casos regulares. Os casos não regulares são tratados a parte.

#### 3.1.5 Sistemas de Filippov Regulares

Nesta dissertação trabalhamos com *Sistemas de Filippov Regulares*. Essa denominação não é feita na literatura, por isso iremos definir, formalmente, o que seria essa classe de sistemas descontínuos.

Seja  $D$  um subconjunto aberto e conexo de  $\mathbb{R}^n$ . Tomemos  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$  tendo  $0 \in \mathbb{R}$  como valor regular e  $X, Y : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções contínuas. Denotemos  $h^{-1}(0)$  por  $\mathcal{M}$ . Observe que  $\mathcal{M}$  é uma variedade regular.

Consideremos o Sistema de Filippov Contínuo por Partes

$$x'(t) = Z(t, x) = \begin{cases} X(t, x), & \text{se } h(t, x) > 0, \\ \frac{X(t, x) + Y(t, x)}{2}, & \text{se } h(t, x) = 0, \\ Y(t, x), & \text{se } h(t, x) < 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Denotamos o Sistema de Filippov, definido em (3.5), de maneira alternativa por  $(X, Y)_h$  ou  $(X, Y)_{\mathcal{M}}$ .

Definamos os conjuntos

$$S^+ = \{x \in D : h(x) > 0\} \quad \text{e} \quad S^- = \{x \in D : h(x) < 0\}.$$

A variedade de descontinuidade  $\mathcal{M}$  é decomposta como união dos fechados das regiões

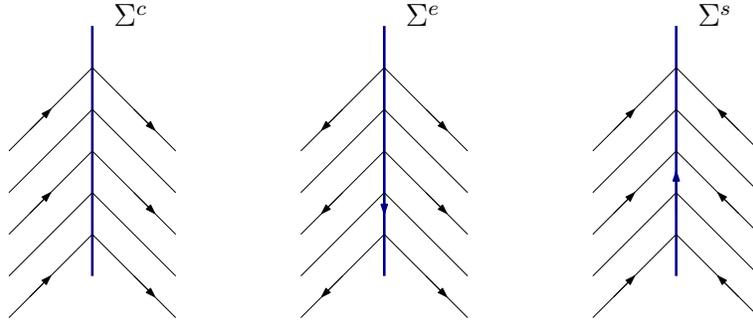


Figura 3.1: Regiões de costura ( $\Sigma^c$ ), escape ( $\Sigma^e$ ) e deslize ( $\Sigma^s$ ).

de costura ( $\Sigma^c$ ), escape ( $\Sigma^e$ ) e deslize ( $\Sigma^s$ ), definidas abaixo (veja a Figura 3.1).

$$\Sigma^c = \{x \in \mathcal{M} : (Xh)(Yh)(x) > 0\};$$

$$\Sigma^e = \{x \in \mathcal{M} : (Xh)(x) > 0 \text{ e } (Yh)(x) < 0\};$$

$$\Sigma^s = \{x \in \mathcal{M} : (Xh)(x) < 0 \text{ e } (Yh)(x) > 0\}.$$

Observemos que as fronteiras das regiões definidas acima são os pontos em que os campos  $X$  e  $Y$  tangenciam a variedade de descontinuidade  $\mathcal{M}$ , não necessariamente, ao mesmo tempo, isto é,  $(Xh)(x) = 0$  ou  $(Yh)(x) = 0$ .

Assumamos que os pontos de tangência são isolados.

**Definição 3.14.** *Chamamos de Sistemas de Filippov Regulares os Sistemas de Filippov que satisfazem as hipóteses acima.*

A convenção de Filippov, para as soluções do sistema (3.5), fornece a dinâmica qualitativa das soluções que atingem a variedade de descontinuidade. Veja, por exemplo, a Figura 3.2 para a região de costura.

Podemos definir, facilmente, a órbita do sistema (3.5) passando por um ponto  $p$  em ( $\Sigma^c$ ), ( $\Sigma^e$ ) ou em ( $\Sigma^s$ ). A definição das órbitas que passam por pontos de tangência são mais complicadas e não faremos aqui.

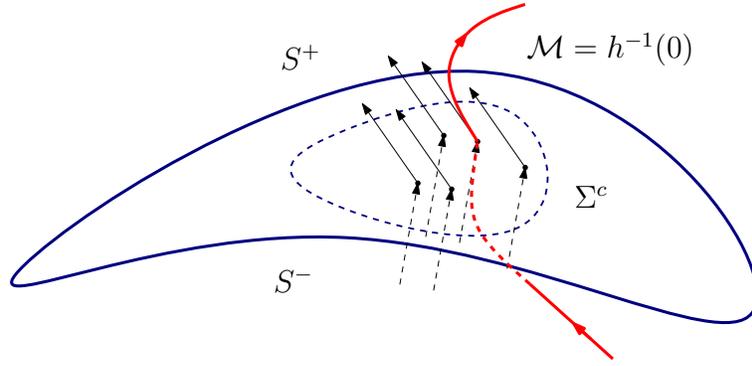


Figura 3.2: Solução cruzando a variedade de costura.

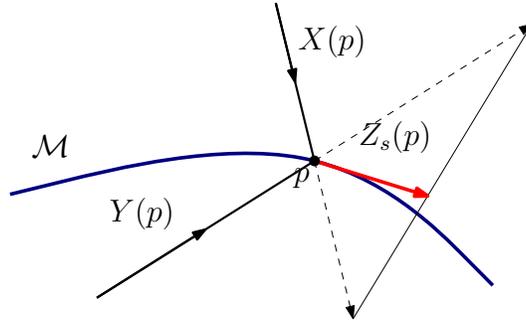


Figura 3.3: Campo vetorial deslizante.

Para um ponto  $p \in \Sigma^c$ , ambos os campos de vetores,  $X$  e  $Y$ , apontam, simultaneamente, para  $S^+$  ou  $S^-$ . Dessa forma, é suficiente conectarmos as soluções de  $X$  e  $Y$  em  $p$  (veja a Figura 3.2).

Consideremos  $p$  em  $\Sigma^e$  ou  $\Sigma^s$ . Definamos o *Campo Vetorial deslizante* por

$$Z_s(p) = \frac{1}{(Yh)(p) - (Xh)(p)} ((Yh)(p)X(p) - (Xh)(p)Y(p)). \quad (3.6)$$

Observe que o campo  $Z_s$  é a *Combinação Linear Convexa* dos campos  $X$  e  $Y$ , e é tangente a variedade de descontinuidade  $\mathcal{M}$  (veja a Figura 3.3).

Para  $p \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$ , a órbita local do Sistema de Filippov (3.5) é dado pelo campo  $Z_s$ .

Temos, então, em resumo:

- Para  $p \in S^\pm$  tal que  $X(p) \neq 0$  e  $Y(p) \neq 0$ , as trajetórias são dadas, respectivamente, por  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$  e  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p)$ , para  $t \in I_p \subset \mathbb{R}$ .
- Para  $p \in \Sigma^c$  tal que  $(Xh)(p), (Yh)(p) > 0$  e considerando a órbita iniciando em  $p$  temos que  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p)$  para  $t \in I_p \cap \{t < 0\}$  e  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$  para  $t \in I_p \cap \{t > 0\}$ . Para  $(Xh)(p), (Yh)(p) < 0$  a definição é a mesma, porém, no tempo reverso.
- Para  $p \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$  tal que  $Z_s(p) \neq 0$ , temos que  $\varphi_Z(t, p) = \varphi_{Z_s}(t, p)$  para  $t \in I_p \subset \mathbb{R}$ .

Aqui,  $\varphi_W$  denota o fluxo de um campo vetorial  $W$ .

---

## 3.2 Existência e Unicidade de Soluções

---

Enunciaremos, nesta seção, alguns resultados de existência e unicidade de soluções para sistemas descontínuos e contínuos.

O primeiro resultado fala sobre a existência de soluções para inclusões diferenciais.

**Proposição 3.15.** *Se  $F : G \rightarrow \mathfrak{B}(G)$  e  $G$  satisfazem as Condições Básicas, estabelecidas na Definição 3.10, então, dado  $(t_0, x_0) \in G$ , existe uma solução da inclusão diferencial*

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

*Mais ainda, se o domínio  $[0, T] \times D$  contém um cilindro  $Z(t_0 \leq t \leq t_0 + a, |x - x_0| \leq b)$ , então, a solução existe no mínimo para o intervalo*

$$t_0 \leq t \leq t_0 + d, \quad d = \min \left\{ a; \frac{b}{m} \right\}, \quad \text{onde } m = \sup_Z |F(t, x)|.$$

O próximo resultado fornece condições para a unicidade de Soluções de Filippov para Sistemas de Filippov Regulares.

**Proposição 3.16.** *Considere, para o Sistema de Filippov Regular (3.5), a região da variedade  $\mathcal{M}$  onde  $(Xh)(Yh) > 0$ . Se  $Xh(p) > 0$  e  $Yh(p) > 0$  (ou  $Xh(p) < 0$  e*

$Yh(p) < 0$ ), então, existe uma solução passando por  $p$ . Mais ainda, a solução costura a variedade  $\mathcal{M}$  em  $p$ , passando da região  $S^-$  para a região  $S^+$  (respectivamente, da região  $S^+$  para a região  $S^-$ ), e a unicidade não é violada.

As proposições 3.15 e 3.16 estão demonstradas em [18].

A última proposição é um resultado da teoria clássica de equações diferenciais.

**Proposição 3.17** (Existência e Unicidade). *Consideremos a equação diferencial*

$$\dot{x} = f(x, t, \varepsilon).$$

*Estamos interessados em soluções desta equação com valor inicial  $x(t_0) = a$ . Sejam  $D = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| < d\}$ ,  $G = D \times [t_0, t_0 + T] \times (0, \varepsilon_0]$  e  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Assumamos que*

(i)  *$f$  é contínua em  $G$ ;*

(ii)  *$f$  seja Lipschitz.*

*Então, o problema de valor inicial possui uma única solução “ $x$ ” que existe para  $t_0 < t < t_0 + \inf(T, d/M)$ , onde*

$$\begin{aligned} M &= \|f\|_{\text{sup}} = \sup_G \|f\| \\ &= \sup \{ \|f(x, t, \varepsilon)\| : x \in D, 0 \leq t \leq T, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \}. \end{aligned}$$

A demonstração da proposição 3.17 pode ser encontrada em [35].

---

### 3.3 Grau de Brouwer

---

**Teorema 3.18.** *Sejam  $X = Y = \mathbb{R}^n$  com  $n$  inteiro positivo. Consideremos a tripla  $(f, \Omega, y_0)$ , onde  $\Omega$  é um subconjunto aberto e limitado de  $X$ ,  $f : \bar{\Omega} \rightarrow Y$  é uma aplicação contínua e  $y_0 \in Y$  tal que  $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ . Então, existe uma aplicação “ $d$ ” denominada grau que associa a cada tripla  $(f, \Omega, y_0)$  um inteiro  $d(f, \Omega, y_0)$ , satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) Se  $d(f, \Omega, y_0) \neq 0$ , então,  $y_0 \in f(\Omega)$ . Se  $f_0$  for a aplicação identidade de  $X$  em  $Y$ , então, para cada subconjunto aberto e limitado  $\Omega$  de  $X$  e para cada  $y_0 \in \Omega$ , teremos

$$d(f_0|_{\bar{\Omega}}, \Omega, y_0) = \pm 1;$$

(ii) Sejam  $\Omega$  um subconjunto aberto e limitado de  $X$  e  $f : \bar{\Omega} \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. Se  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  forem subconjuntos abertos e disjuntos de  $\Omega$  tais que

$$y_0 \notin f(\bar{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2)),$$

então,

$$d(f, \Omega, y_0) = d(f, \Omega_1, y_0) + d(f, \Omega_2, y_0);$$

(iii) Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto e limitado de  $X$  e consideremos uma homotopia contínua  $\{f_t; 0 \leq t \leq 1\}$  de aplicações contínuas de  $\bar{\Omega}$  em  $Y$ . Seja  $\{y_t; 0 \leq t \leq 1\}$  uma curva contínua em  $Y$  tal que  $y_t \notin f_t(\partial\Omega)$ , para todo  $t \in [0, 1]$ . Então,  $d(f_t, \Omega, y_t)$  é constante em  $t \in [0, 1]$ .

**Teorema 3.19.** A função grau  $d(f, \Omega, y_0)$  é, unicamente, determinada pelas três condições do Teorema 3.18.

Os Teoremas 3.18 e 3.19 estão demonstrados em [8].

**Lema 3.20.** Seja  $K \subset \bar{V}$  um compacto e  $b \notin f(K) \cup f(\partial V)$ . Então,  $d(f, V, b) = d(f, V \setminus K, b)$ .

O resultado do Lema 3.20 é conhecido como propriedade de Excisão do Grau de Brouwer, e está enunciado em [32] (ver Teorema 2.2.1, p. 26).

Os próximos resultados desta seção serão utilizados, no Capítulo 4, para a demonstração do Teorema de Averaging.

### 3 Resultados e Conceitos Preliminares

---

**Lema 3.21.** *Consideremos as funções contínuas  $f^i : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , para  $i = 0, 1, \dots, k$ , e  $f, g, r : \bar{\Omega} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  dadas por*

$$g(\cdot, \varepsilon) = \sum_{i=0}^k \varepsilon^i f^i(\cdot)$$

e

$$f(\cdot, \varepsilon) = g(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1} r(\cdot, \varepsilon).$$

*Assumamos que  $g(z, \varepsilon) \neq 0$ , para todo  $z \in \partial\Omega$  e  $\varepsilon \in ([-\varepsilon_0, \varepsilon_0] - \{0\})$ . Então, para  $|\varepsilon| > 0$  suficientemente pequeno,  $d_B(g(\cdot, \varepsilon), \Omega, 0)$  está bem definido e*

$$d_B(f(\cdot, \varepsilon), \Omega, 0) = d_B(g(\cdot, \varepsilon), \Omega, 0).$$

*Demonstração.* Usaremos o resultado (iii) do Teorema 3.18, conhecido como propriedade de invariância por homotopia do Grau de Brouwer.

Para cada  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \setminus \{0\}$  consideremos a seguinte homotopia contínua

$$H_t(\cdot, \varepsilon) = g(\cdot, \varepsilon) + t(f(\cdot, \varepsilon) - g(\cdot, \varepsilon)), \text{ para } 0 \leq t \leq 1.$$

Vamos verificar que, para  $|\varepsilon| > 0$  suficientemente pequeno,  $0 \notin H_t(\partial V, \varepsilon)$  para  $0 < t \leq 1$ .

Suponhamos, por contradição, que  $H_{t_0}(x_0, \varepsilon) = 0$ , para algum  $t_0 \in (0, 1]$  e para algum  $x_0 \in \partial V$ . Pela continuidade de  $r$ , sabemos que existe  $M > 0$  tal que  $|r(z, \varepsilon)| \leq M$  para todo  $z \in \bar{V}$  e para todo  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ .

Uma vez que

$$\begin{aligned} 0 &= H_{t_0}(x_0, \varepsilon) \\ &= g(x_0, \varepsilon) + t_0(f(x_0, \varepsilon) - g(x_0, \varepsilon)) \\ &= g(x_0, \varepsilon) + t_0 \varepsilon^{k+1} r(x_0, \varepsilon), \end{aligned}$$

segue que,  $g(x_0, \varepsilon) = -t_0 \varepsilon^{k+1} r(x_0, \varepsilon)$ , de onde obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned} |g(x_0, \varepsilon)| &\leq |\varepsilon^{k+1} r(x_0, \varepsilon)| \\ &\leq M \varepsilon^{k+1}. \end{aligned}$$

O que não é verdade para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, já que

$$|g(x_0, \varepsilon)| = |f_0(x_0) + \varepsilon f_1(x_0) + \varepsilon^2 f_2(x_0) + \cdots + \varepsilon^k f_k(x_0)| \neq 0.$$

Chegamos assim em um absurdo e concluímos a demonstração do lema.  $\square$

**Teorema 3.22** (Teorema da Preparação de Malgrange). *Suponhamos que  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  seja um conjunto aberto com  $(0, 0) \in U$  e  $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$  satisfaça*

$$f(x, 0) = x^k g(x),$$

para algum inteiro  $k \geq 1$ , onde  $g$  é suave em uma vizinhança de  $x = 0$  e  $g(0) \neq 0$ . Então, existe uma função suave “ $q$ ” definida em uma vizinhança  $V$  de  $(0, 0)$  em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  e funções  $a_i(\varepsilon)$ , com  $i = 0, 1, \dots, k-1$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  em uma vizinhança da origem em  $\mathbb{R}^n$  tais que  $q(0, 0) \neq 0$ ,  $a_i(0) = 0$  para todo  $i = 0, 1, \dots, k-1$  e para  $(x, \varepsilon) \in V$

$$q(x, \varepsilon)f(x, \varepsilon) = x^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(\varepsilon)x^i.$$

O Teorema 3.19 está enunciado em [14].

**Corolário 3.23.** *Suponhamos que as hipóteses do Lema 3.21 estejam satisfeitas para  $k = 0$  e que, além disso, para  $a \in D$  com  $f_0(a) = 0$ , exista uma vizinhança  $V$  de  $a$  tal que  $f_0(z) \neq 0$  para todo  $z \in (\bar{V} - \{a\})$  e  $d_B(f_0, V, 0) \neq 0$ . Então, pelo menos um ramo de zeros bifurcam de  $a$ .*

*Demonstração.* Como  $f_0(z) \neq 0$ , para todo  $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ , segue do Lema 3.20 que  $d_B(f_0, V \setminus \{a\}, 0) = d_B(f_0, V, 0)$ . Deduzimos, então, que  $d_B(f_0, V_\mu, 0) \neq 0$  para toda vizinhança  $V_\mu \subset V$  de  $a$ . Escolhamos  $V_\mu$  de modo que  $V_\mu \rightarrow \{a\}$ , quando  $\mu \rightarrow 0$ .

Portanto, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, a função  $f(\cdot, \varepsilon)$  possui pelo menos um zero  $a_\varepsilon \in V_\mu$ , o qual podemos escolher de forma que  $a_\mu \rightarrow a$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Se valer a hipótese  $J_{f_0}(a) \neq 0$ , podemos também, concluir pelo Teorema da Função Inversa, que este ramo é único.  $\square$



---

---

# CAPÍTULO 4

---

## A Teoria de Averaging

---

### 4.1 Nota Histórica

---

O Método de Averaging é uma ferramenta clássica, muito útil no estudo do comportamento de sistemas dinâmicos suaves.

O Método de Averaging possui uma longa história, iniciando com os trabalhos clássicos de Lagrange e Laplace que forneceram justificativas intuitivas do processo que constitui o método.

A primeira formalização dos procedimentos constituintes do Método de Averaging foi dada por Fatou em 1928 [17].

Importantes contribuições, práticas e teóricas, para a Teoria de Averaging, foram feitas em 1930 por Krylov e Bogoliubov em [6] e em 1945 por Bogoliubov em [5].

Os princípios da Teoria de Averaging tem sido estendidos em diversas direções tanto para sistemas diferenciais de dimensão finita como para sistemas diferenciais de dimensão infinita.

Para maiores informações sobre a Teoria de Averaging, veja, por exemplo, os livros

de Sanders e Verhulst [35] e o livro de Verhulst [41].

---

## 4.2 O Teorema de Averaging de Primeira Ordem

---

**Teorema 4.1** (Averaging de primeira ordem via Grau de Brouwer). *Consideremos o seguinte sistema diferencial*

$$\dot{x} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (4.1)$$

onde  $F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  são funções contínuas,  $T$ -periódicas em  $t$  e  $D$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Definamos  $f_1 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$f_1(z) = \int_0^T F_1(z, s) ds. \quad (4.2)$$

Assumamos que

- (i)  $F_1$  e  $R$  são localmente Lipschitz com respeito a  $x$ ;
- (ii) para  $a \in D$  com  $f_1(a) = 0$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $a$  tal que  $f_1(a) \neq 0$  para todo  $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$  e  $d_B(f_1, V, 0) \neq 0$ .

Então, para  $|\varepsilon| > 0$  suficientemente pequeno, existe uma solução  $T$ -periódica  $\varphi(\cdot, \varepsilon)$  do sistema (4.1) tal que  $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow a$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Teorema 4.2.** *A conclusão do Teorema 4.1 ainda é válida sem assumirmos a condição (i).*

As demonstrações dos Teoremas 4.1 e 4.2 estão feitas em [11]. Aqui demonstraremos, somente, o Teorema 4.1.

### 4.2.1 Demonstração do Teorema 4.1

Antes de demonstrarmos o Teorema 4.1, precisamos estabelecer alguns lemas.

**Lema 4.3.** *Consideremos o sistema diferencial*

$$\dot{x}(t) = F(t, x, \varepsilon), \quad (4.3)$$

onde  $F : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função contínua,  $T$ -periódica na primeira variável e localmente Lipschitz na segunda variável e  $D$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Para cada  $z \in D$  denotamos por  $x(t, z, \varepsilon)$  a solução do sistema (4.3) com  $x(0, z, \varepsilon) = z$ . Assumamos que, para todo  $z \in D$ , a solução  $x(t, z, \varepsilon)$  está bem definida em  $0 \leq t \leq T$ . Definamos a função  $f : D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$f(z, \varepsilon) = \int_0^T F(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon) dt. \quad (4.4)$$

Então,  $x(t, z_\varepsilon, \varepsilon)$  é solução  $T$ -periódica de (4.3) se, e somente se,  $f(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0$ .

*Demonstração.* Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, podemos reescrever a função (4.4) como

$$f(z, \varepsilon) = x(T, z, \varepsilon) - x(0, z, \varepsilon).$$

Suponhamos que para  $z_\varepsilon \in D$  temos que  $f(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0$ . Isso implica que  $x(T, z_\varepsilon, \varepsilon) = x(0, z_\varepsilon, \varepsilon)$ . Estendendo, por periodicidade, a solução  $x(t, z_\varepsilon, \varepsilon)$  a todo  $\mathbb{R}$ , segue que,  $x(t, z_\varepsilon, \varepsilon)$  é solução  $T$ -periódica do sistema (4.3).

Por outro lado, se  $z_\varepsilon$  é tal que a solução  $x(t, z_\varepsilon, \varepsilon)$  é  $T$ -periódica, segue que,  $x(T, z_\varepsilon, \varepsilon) = x(0, z_\varepsilon, \varepsilon)$ , de onde concluímos que  $f(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0$ .

Fica assim demonstrado o Lema 4.3. □

**Lema 4.4.** *Para todo  $z \in \bar{V}$ , existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que, para todo  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ , a solução  $x(\cdot, z, \varepsilon)$  do sistema (4.1) está definida em  $[0, T]$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 3.17, do Capítulo 3, segue que, a solução  $x(\cdot, z, \varepsilon)$  está definida para  $0 \leq t \leq \inf(T, d/M(\varepsilon))$ , onde  $M(\varepsilon) \geq \|\varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon)\|_2$  para todo  $t \in [0, T]$ , para cada  $x$  com  $|x - z| \leq d$  e para todo  $z \in \bar{V}$ .

Quando  $|\varepsilon| > 0$  é suficientemente pequeno,  $d/M(\varepsilon)$  pode ser tomado arbitrariamente grande, de modo que a solução esteja definida para  $0 \leq t \leq T$ . □

Agora, estamos prontos para demonstrar o Teorema 4.1.

*Demonstração do Teorema 4.1.* Observemos inicialmente que o sistema (4.1) satisfaz todas as hipóteses do Lema 4.3 e que a função  $f$  dada em (4.4) para o sistema (4.1) é escrita como

$$f(z, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^T F_1(s, x(s, z, \varepsilon)) ds + \varepsilon^2 \int_0^T R(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds. \quad (4.5)$$

Para todo  $t \in [0, T]$ ,  $z \in \bar{V}$  e  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$  temos a seguinte relação

$$x(t, z, \varepsilon) = z + \varepsilon \int_0^t F_1(s, x(s, z, \varepsilon)) ds + \varepsilon^2 \int_0^t R(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds. \quad (4.6)$$

**Afirmção 4.5.** Dado  $(z, \varepsilon)$  em  $\bar{V} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ , segue que,

$$f(z, \varepsilon) = \varepsilon f_1(z) + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1), \quad (4.7)$$

com  $f_1$  definido em (4.2).

Observe que existe um subconjunto compacto  $K \subset D$ , tal que  $x(t, z, \varepsilon) \in K$  para todo  $t \in [0, T]$ ,  $z \in \bar{V}$  e  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ . Então, pela continuidade de  $R$  em  $[0, T] \times K \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$  existe  $N_K > 0$  tal que  $R(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon) \leq N_K$ . Daí, segue que,

$$\int_0^T R(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon) ds \leq \int_0^T N_K ds = TN_K = \mathcal{O}(1).$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^T F_1(s, x(s, z, \varepsilon)) ds &= \varepsilon \int_0^T F_1(s, x(s, z, \varepsilon)) - F_1(s, z) ds + \varepsilon \int_0^T F_1(s, z) ds \\ &= \varepsilon \int_0^T F_1(s, x(s, z, \varepsilon)) - F_1(s, z) ds + \varepsilon f_1(z). \end{aligned}$$

Substituindo esta última relação em (4.5), segue que,

$$f(z, \varepsilon) - \varepsilon f_1(z) = \varepsilon \int_0^T F_1(s, x(s, z, \varepsilon)) - F_1(s, z) ds + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1).$$

Usando o fato de  $F_1$  ser Lipschitz com respeito a  $x$  em  $[0, T] \times K$  e a relação obtida em (4.6), segue que,

$$\|F_1(s, x(s, z, \varepsilon)) - F_1(s, z)\|_2 \leq L_K \|x(s, z, \varepsilon) - z\|_2 = \varepsilon \mathcal{O}(1).$$

Portanto, a igualdade (4.7) é satisfeita.

Aplicando o Corolário 3.23, temos que a hipótese (ii) assegura a existência de um ramo de solução  $z_\varepsilon$  da equação  $f(z, \varepsilon) = 0$ , mais ainda  $z_\varepsilon \rightarrow a$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Portanto, pelo Lema 4.3,  $\varphi(\cdot, \varepsilon) = x(\cdot, z_\varepsilon, \varepsilon)$  é uma solução periódica do sistema (4.1) tal que  $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow a$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

□

O Corolário, que enunciaremos a seguir, irá nos auxiliar na demonstração do Teorema 1.4.

Tomemos  $x_0 \in D$ . É claro que  $D$  é uma seção do espaço  $\mathbb{R} \times D$ . Denotemos por  $x(t, x_0, \varepsilon)$  a solução da equação diferencial (4.1), satisfazendo  $x(0, x_0, \varepsilon) = z$ . Dado  $U \subset D$  uma vizinhança de  $x_0$ , definamos a aplicação  $P_\varepsilon : U \rightarrow D$  por

$$P_\varepsilon(z) = x(T, z, \varepsilon).$$

A aplicação  $P(z)$  é conhecida por *Aplicação de Poincaré* e, para  $|\varepsilon| > 0$  suficientemente pequeno, está bem definida, pelo Lema 4.4.

**Corolário 4.6.** *A Aplicação de Poincaré  $P_\varepsilon(z)$ , definido acima, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, é dado por*

$$P_\varepsilon(z) = z + \varepsilon f_1(z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

*Demonstração.* Pela demonstração do Teorema 4.1 sabemos que

$$x(T, z, \varepsilon) = z + f(z, \varepsilon),$$

e que

$$f(z, \varepsilon) = \varepsilon f_1(z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

O resultado segue imediatamente das duas igualdades acima.

□



---

---

# CAPÍTULO 5

---

## Demonstração do Teorema de Averaging para Sistemas Descontínuos

---

### 5.1 Lemas Auxiliares

---

Antes de demonstrarmos o Teorema 1.4, precisamos estabelecer alguns lemas. Assumamos válido o conjunto de hipóteses H.

**Lema 5.1.** *A função  $\phi_\delta$  é globalmente  $1/\delta$ -Lipschitz.*

*Demonstração.* Se  $u_1 \leq -\delta < \delta \leq u_2$ , então,  $|\phi_\delta(u_1) - \phi_\delta(u_2)| = 2 = (1/\delta)2\delta \leq (1/\delta)|u_1 - u_2|$ .

Se  $u_1, u_2 \leq -\delta$  ou  $u_1, u_2 \geq \delta$ , então,  $|\phi_\delta(u_1) - \phi_\delta(u_2)| = 0 \leq (1/\delta)|u_1 - u_2|$ .

Agora, fixemos  $u_1 \in (-\delta, \delta)$ .

Se  $|u_2| < \delta$ , então,  $|\phi_\delta(u_1) - \phi_\delta(u_2)| = (1/\delta)|u_1 - u_2|$ .

Se  $|u_2| \geq \delta$ , então,  $|\phi_\delta(u_1) - \phi_\delta(u_2)| \leq \max\{|1/\delta|, |1/u_2|\}|u_1 - u_2| \leq (1/\delta)|u_1 - u_2|$ .

Concluimos, então, a demonstração do lema. □

É utilizado, na hipótese H2, o conceito do Grau de Brouwer (ver Capítulo 3). Mostraremos, no próximo lema, que tal conceito está bem definido para a função promediada  $f_0$  definida em (1.2).

**Lema 5.2.** *A função promediada  $f_0$  é contínua em  $\Sigma_0$ .*

*Demonstração.* Fixemos  $z_0 \in \Sigma_0$  e  $S = (\mathbb{R} \times D) \setminus \mathcal{M}$ , o qual é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R} \times D$ .

Por hipótese, temos que a aplicação  $h_{z_0} : t \mapsto h(t, z_0)$  é de classe  $C^1$  e se anula somente em um subconjunto finito de pontos  $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_{k-1}\} \subset [0, T]$ .

Tomemos  $t_0 = 0$  e  $t_k = T$ , então,  $h(t, z_0)h(s, z_0) > 0$  para  $t, s \in (t_i, t_{i+1})$  e  $i = 0, 1, \dots, k-1$ , isto é,  $h(t, z_0)$  mantém o sinal constante para  $t \in (t_i, t_{i+1})$  e  $i = 0, 1, \dots, k-1$ .

Para  $z \in D$  em alguma vizinhança de  $z_0$ , temos que

$$\begin{aligned} \|f_0(z) - f_0(z_0)\| &\leq \int_0^T \|F_1(t, z_0) - F_1(t, z)\| dt \\ &\quad + \int_0^T \|\text{sign}(h(t, z_0))F_2(t, z_0) - \text{sign}(h(t, z))F_2(t, z)\| dt \\ &\leq TL\|z_0 - z\| + \int_0^T \tilde{F}(t, z) dt \\ &\leq TL\|z_0 - z\| + \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{F}(t, z) dt, \end{aligned}$$

onde  $\tilde{F}(t, z) = \|\text{sign}(h(t, z_0))F_2(t, z_0) - \text{sign}(h(t, z))F_2(t, z)\|$ . Definamos  $I_i = (t_i, t_{i+1})$  e  $I_i^\gamma = [t_i + \gamma, t_{i+1} - \gamma]$  para  $i = 1, 2, \dots, k-1$ . Note que existe  $\gamma_0 > 0$  tal que  $I_i^\gamma \subset I_i$  para todo  $0 < \gamma \leq \gamma_0$ .

O conjunto  $I_i^\gamma \times \{z_0\} \subset S$  é compacto, então, existe uma bola  $B(z_0, r_i^\gamma)$  tal que  $I_i^\gamma \times \overline{B(z_0, r_i^\gamma)} \subset S$ . Podemos ainda assumir que  $r_i^\gamma < \gamma$  para  $i = 1, 2, \dots, k-1$ .

Observe que

$$\begin{aligned}\tilde{F}(t, z) &\leq \|\text{sign}(h(t, z_0))F_2(t, z_0)\| + \|\text{sign}(h(t, z))F_2(t, z)\| \\ &= \|F_2(t, z_0)\| + \|F_2(t, z)\|.\end{aligned}$$

Tomemos, então,  $M_0 = \sup\{\|F_2(t, z_0)\| + \|F_2(t, z)\| : (t, z) \in [0, T] \times \overline{B(z_0, \gamma_0)}\}$ .

Definamos

$$K^\gamma = \bigcap_{i=1}^{k-1} B(z_0, r_i^\gamma) \neq \emptyset,$$

assim, para  $z \in K^\gamma$  temos que

$$\begin{aligned}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{F}(t, z) &= \int_{I_i^\gamma} \tilde{F}(t, z) + \int_{t_i}^{t_i+\gamma} \tilde{F}(t, z) + \int_{t_{i+1}-\gamma}^{t_{i+1}} \tilde{F}(t, z) \\ &\leq TL\|z_0 - z\| + 2\gamma M_0.\end{aligned}$$

Uma vez que  $\|z_0 - z\| < r_i^\gamma < \gamma$ , segue que, para  $0 < \gamma \leq \gamma_0$

$$\|f_0(z_0) - f_0(z)\| \leq (TL(k+1) + 2kM_0)\gamma = C\gamma,$$

Portanto, dado  $\epsilon > 0$ , podemos escolher  $\gamma = \epsilon/C$ , de modo que, se  $\|z_0 - z\| < \gamma$ , então,  $\|f_0(z_0) - f_0(z)\| < \epsilon$ .

□

**Lema 5.3.** *Sejam  $z_0 \in \Sigma_0$  e  $\alpha > 0$ . Existe uma vizinhança  $U$  de  $z_0$  tal que se  $z \in U$  e  $h(\alpha, z_0)h(\alpha, z) \geq 0$ , então, para  $\beta > \alpha$ , temos que*

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} F(t, z_0) - F(t, z) dt \right\| \leq L\|z_0 - z\| + \mathcal{O}(\|z_0 - z\|^2).$$

*Demonstração.* Análogo ao que foi feito na demonstração do Lema 5.2, podemos particionar o intervalo  $[\alpha, \beta]$  em finitos subintervalos com extremos contidos no conjunto ordenado  $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k\} \subset [a, b]$ , onde  $t_0 = \alpha$  e  $t_k = \beta$ . Mais ainda,  $h(t, z_0)h(s, z_0) > 0$  para  $t, s \in (t_i, t_{i+1})$  e  $i = 0, 1, \dots, k-1$ .

Fixado  $\bar{t} \in [0, T]$ , denotemos por  $\mathcal{M}_{\bar{t}}$  o subconjunto de  $\mathcal{M}$  dado por

$$\mathcal{M}_{\bar{t}} = \{(\bar{t}, z) \in \mathcal{M} : h(\bar{t}, z) = 0\}.$$

Dado  $r > 0$ , definamos também a função  $\Gamma(r)$  como sendo

$$\inf_{i,\gamma} \left\{ \gamma : \text{dis}((t_i + \gamma, z_0), \mathcal{M}_{t_i + \gamma}) > r, \text{dis}((t_{i+1} - \gamma, z_0), \mathcal{M}_{t_{i+1} - \gamma}) > r \right\}.$$

O fato da variedade  $\mathcal{M}$  ser regular de classe  $C^1$ , implica que, para  $\bar{r}$  suficientemente pequeno, a função  $\Gamma(r)$  é de classe  $C^1$  para  $r \in (0, \bar{r})$ . Mais ainda,

$$\frac{d\Gamma}{dr}(0) > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \Gamma(r) = 0,$$

sendo assim, pelo Teorema da Função Inversa, a função  $\Gamma(r)$  é localmente inversível.

Note que a diferencial e o limite calculados acima, ao considerarmos  $r \in \mathbb{R}$ , se tornam derivada e limite lateral.

Expandindo, em Série de Taylor, a função  $\Gamma(r)$ , para  $r \geq 0$  suficientemente pequeno, temos que

$$\Gamma(r) = \frac{d\Gamma}{dr}(0)r + \mathcal{O}(r^2).$$

Tomemos  $r = \|z_0 - z\|$  suficientemente pequeno. Pela demonstração do Lema 5.2, segue que, para  $\gamma = \Gamma(r)$  é válida a desigualdade

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} F(t, z_0) - F(t, z) dt \right\| \leq A\|z_0 - z\| + B\gamma,$$

com  $A, B > 0$ . Porém, como

$$\begin{aligned} \gamma &= \Gamma(r) \\ &= \Gamma(\|z_0 - z\|) \\ &= \frac{d\Gamma}{dr}(0)\|z_0 - z\| + \mathcal{O}(\|z_0 - z\|^2), \end{aligned}$$

segue que,

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} F(t, z_0) - F(t, z) dt \right\| \leq \left( A + B \frac{d\Gamma}{dr}(0) \right) \|z_0 - z\| + \mathcal{O}(\|z_0 - z\|^2).$$

□

**Lema 5.4.** *Nas hipótese do Lemma 5.3, assumamos que  $z \in K$  com  $K \subset D$  uma vizinha compacta de  $z_0$ , então, o resultado do Lema 5.3, ainda é válido.*

*Demonstração.* De fato, podemos cobrir o conjunto  $K$  com abertos  $U_z$ , para  $z \in K$ , onde em cada aberto é válido o Lema 5.3.

Por compacidade, existem finitos pontos  $z_0, z_1, \dots, z_m$  tais que, as suas respectivas vizinhanças ainda cobrem o conjunto  $K$ .

Por serem conjuntos abertos, a união finita de subconjuntos da cobertura deve interceptar outro subconjunto da cobertura. Dessa forma, dado  $z \in K$ , é possível encontrar uma coleção de pontos  $\{z_0, z_{i_1}, \dots, z_{i_j}, z\}$  conectados por suas respectivas vizinhanças. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_{\alpha}^{\beta} F(t, z_0) - F(t, z) dt \right\| &= \left\| \int_{\alpha}^{\beta} F(t, z_0) - F(t, z_1) + F(t, z_1) - \dots \right. \\
 &\quad \left. - F(t, z_{i_j}) + F(t, z_{i_j}) - F(t, z) dt \right\| \\
 &\leq \left\| \int_{\alpha}^{\beta} F(t, z_0) - F(t, z_1) dt \right\| + \dots \\
 &\quad + \left\| \int_{\alpha}^{\beta} F(t, z_{i_j}) - F(t, z) dt \right\| \\
 &\leq L_1 \|z_0 - z_1\| + \dots + L_{i_j-1} \|z_{i_j} - z_1\| \\
 &\quad + \mathcal{O}(\|z_0 - z_1\|^2) \\
 &\leq L \|z_0 - z\| + \mathcal{O}(\|z_0 - z\|^2).
 \end{aligned}$$

□

Seja  $a$  como na hipótese H2, então, pelo Lema 5.2,  $f_0$  é contínua em  $a$ . Mais ainda,  $0 \notin f_0(\partial(V))$ , logo existe uma vizinhança  $V$  de  $a$  tal que  $f_0$  é contínua. Assim, pelos Teoremas 3.18 e 3.19 do Capítulo 3, existe uma única aplicação satisfazendo as propriedades do Grau de Brouwer para a função  $f_0(z)$  com  $z \in \bar{V}$ . Denotamos esta aplicação por  $d_B(f_0, V, 0)$ .

**Lema 5.5.** *Dado o subconjunto compacto  $K \subset D$ , existe  $|\varepsilon| > 0$  tal que, as Soluções de Filippov do sistema (1.5), passando por pontos em  $K$ , são unicamente definidas para*

todo  $\varepsilon \in [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ . Mais ainda, tais soluções estão bem definidas em todo o intervalo  $[0, T]$

*Demonstração.* O sistema (1.5) pode ser escrito como o Sistema de Filippov Autônomo em  $\mathbb{R}^{n+1}$

$$(\tau', x') = \begin{cases} X(\tau, x, \varepsilon), & \text{se } h(\tau, x) > 0, \\ \frac{X(\tau, x, \varepsilon) + Y(\tau, x, \varepsilon)}{2}, & \text{se } h(\tau, x) = 0, \\ Y(\tau, x, \varepsilon), & \text{se } h(\tau, x) < 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde

$$X(\tau, x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon(F_1(\tau, x) + F_2(\tau, x)) + \varepsilon^2(R_1(\tau, x, \varepsilon) + R_2(\tau, x, \varepsilon)) \end{pmatrix},$$

$$Y(\tau, x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon(F_1(\tau, x) - F_2(\tau, x)) + \varepsilon^2(R_1(\tau, x, \varepsilon) - R_2(\tau, x, \varepsilon)) \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} (Xh)(Yh) &= \langle \nabla h, X \rangle \langle \nabla h, Y \rangle \\ &= (\partial_t h)^2 + \partial_t h (\langle \nabla_x h, X \rangle + \langle \nabla_x h, Y \rangle) + \langle \nabla_x h, X \rangle \langle \nabla_x h, Y \rangle \\ &= (\partial_t h)^2 + \varepsilon 2 \partial_t h \langle \nabla_x h, F_1 \rangle \\ &\quad + \varepsilon^2 (2 \partial_t h \langle \nabla_x h, R_1 \rangle + \langle \nabla_x h, F_1 \rangle^2 - \langle \nabla_x h, F_2 \rangle^2) \\ &\quad + \varepsilon^3 2 (\langle \nabla_x h, F_1 \rangle \langle \nabla_x h, R_1 \rangle - \langle \nabla_x h, F_2 \rangle \langle \nabla_x h, R_2 \rangle) \\ &\quad + \varepsilon^4 (\langle \nabla_x h, R_1 \rangle^2 - \langle \nabla_x h, R_2 \rangle^2). \end{aligned}$$

Fixemos agora, o conjunto  $K = ([0, T] \times D_1)$ , com  $D_1 \subset D$  subconjunto compacto. Observe que  $K$  é um subconjunto compacto de  $[0, T] \times D$ .

O conjunto obtido da interseção  $K \cap \mathcal{M}$  não é, necessariamente, conexo, sendo assim, dado  $(t, x) \in K \cap \mathcal{M}$ , denotemos por  $K_{(t,x)}$  a componente conexa de  $K \cap \mathcal{M}$  contendo o ponto  $(t, x)$ .

A variedade  $\mathcal{M}$  é fechada, logo  $K \cap \mathcal{M}$  é um subconjunto compacto de  $\mathcal{M}$ . Daí, segue que, o conjunto  $K \cap \mathcal{M}$  possui, somente, uma quantidade finita de componentes conexas. Sendo assim, podemos escolher um conjunto finito de representantes  $(t_m, x_m)$  com  $m = 1, 2, \dots, l$ , tal que

$$K \cap \mathcal{M} = \bigsqcup_{m=1}^l K_m,$$

onde  $K_m = K_{(t_m, x_m)}$ .

Observe que, para  $m = 1, 2, \dots, l$ ,  $K_m$  é um subconjunto compacto de  $K \cap \mathcal{M}$ .

Suponhamos que para algum  $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ ,  $\partial_t h(t, x) \neq 0$  para todo  $(t, x) \in K_i$ , então, pela compacidade do conjunto  $K_i$  e pela continuidade da aplicação  $(t, x) \mapsto \partial_t h(t, x)$ , segue que, existe uma constante  $C_i > 0$  tal que  $(\partial_t h(t, x))^2 > C_i$  para todo  $(t, x) \in K_i$ .

Sendo assim, pela continuidade das aplicações envolvidas na expressão de  $(Xh)(Yh)$  e, novamente, pela compacidade do conjunto  $K_i$ , segue que, existe  $\varepsilon_i > 0$ , tal que para todo  $\varepsilon \in [-\varepsilon_i, \varepsilon_i]$ ,  $(Xh)(Yh)(t, x) > 0$  para todo  $(t, x) \in K_i$ .

Suponhamos agora que, para  $j \in \{1, 2, \dots, l\}$ ,  $\partial_t h(t, x) = 0$  para algum  $(t, x) \in K_j$ . Pela hipótese *H3*, segue que, para todo  $(t, x) \in K_j$

$$\left( \partial_t h \langle \nabla_x h, F_1 \rangle + \varepsilon \frac{\langle \nabla_x h, F_1 \rangle^2 - \langle \nabla_x h, F_2 \rangle^2}{2} \right) (t, x) \geq \varepsilon \xi_j(t, x),$$

onde  $\xi_j = \xi_{(t_j, x_j)} : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e positiva. Sendo assim, existe uma constante  $C_j > 0$  tal que  $\xi_j(t, x) > C_j$ , para todo  $(t, x) \in K_j$ .

Por outro lado

$$\begin{aligned} (Xh)(Yh) &= (\partial_t h + \varepsilon^2 \langle \nabla_x h, R_1 \rangle)^2 + 2\varepsilon \left( \partial_t h \langle \nabla_x h, F_1 \rangle + \varepsilon \frac{\langle \nabla_x h, F_1 \rangle^2 - \langle \nabla_x h, F_2 \rangle^2}{2} \right) \\ &\quad + \varepsilon^3 \mathcal{O}(1) \geq \varepsilon \xi(t, x) + \varepsilon^3 \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Sendo assim, pela continuidade das aplicações contidas em  $\mathcal{O}(1)$ , na desigualdade acima para  $(Xh)(Yh)$ , e, novamente, pela compacidade do conjunto  $K_j$ , segue que, existe  $\varepsilon_j > 0$ , tal que para  $\varepsilon \in [-\varepsilon_j, \varepsilon_j] \setminus \{0\}$ ,  $(Xh)(Yh)(t, x) > 0$  para todo  $(t, x) \in K_j$ .

Portanto, fixado o compacto  $K$ , se escolhermos

$$\varepsilon_K = \min\{\varepsilon_i : i = 1, 2, \dots, l\},$$

então, para  $\varepsilon \in [-\varepsilon_K, \varepsilon_K] \setminus \{0\}$ , segue que

$$(Xh)(Yh)(t, x) > 0,$$

para todo  $(t, x) \in K \cap \mathcal{M}$ . Portanto, a variedade de descontinuidade  $\mathcal{M}$  é do tipo costura na interseção com o compacto  $K$  para  $\varepsilon \in [-\varepsilon_K, \varepsilon_K] \setminus \{0\}$ .

Aplicando a Proposição 3.16, do Capítulo 3, obtemos que por  $z \in K \cap \Sigma$  passa uma única solução, para  $\varepsilon \in [-\varepsilon_K, \varepsilon_K]$ . Observe que aqui, estamos fazendo a identificação,  $D_1 \equiv K \cap \Sigma$ , i.e.,  $z \equiv (0, z)$ . Tais soluções podem, por ventura, colidirem fora do compacto  $K$ .

Denotemos por  $\varphi_\varepsilon(s, t, z)$  a solução do sistema (1.5) passando por  $(t, z) \in \Sigma$ , ou seja,  $\varphi_\varepsilon(0, t, z) = (t, z)$ . Pela Proposição 3.15, as soluções estão definidas para todo o intervalo  $[0, T]$ , sendo a demonstração desse fato análoga a demonstração do Lema 4.4, no Capítulo 4.

Uma vez que, para  $\varepsilon = 0$ , as soluções do sistema (1.5) são unicamente definidas para todo o intervalo  $[0, T]$ ; e para  $\varepsilon \in [-\varepsilon_K, \varepsilon_K] \setminus \{0\}$ , o conjunto  $K \cap \mathcal{M}$  é do tipo costura, concluímos que, para cada  $(t, z, \varepsilon) \in K \times [-\varepsilon_K, \varepsilon_K]$ , existe uma vizinhança pré-compacta  $V(t, z, \varepsilon) \subset [0, T] \times D \times \mathbb{R}$  do conjunto compacto  $\varphi_\varepsilon([0, T], t, z)$ , tal que, se  $(\tilde{t}, \tilde{z}, \tilde{\varepsilon}) \in K \cap V(t, z, \varepsilon)$ , então,  $K \cap \varphi_{\tilde{\varepsilon}}([0, T], \tilde{t}, \tilde{z}) \subset V(t, z, \varepsilon)$ . Esta última afirmação decorre dos resultados de dependência contínua das soluções sobre as condições iniciais e sobre os parâmetros para sistemas contínuos. Ora, dentro do compacto  $K$ , as soluções são dadas como composição de soluções de sistemas contínuos, sendo assim, também obedecem tais resultados.

Consideremos, então, a cobertura

$$K \times [-\varepsilon_K, \varepsilon_K] \subset \bigcup \left\{ V(t, z, \varepsilon) : (t, z) \in K \text{ e } \varepsilon \in [-\varepsilon_K, \varepsilon_K] \right\}.$$

Pela compacidade do conjunto  $K \times [-\varepsilon_K, \varepsilon_K]$ , segue que, existem finitos  $(t_1, z_1, \varepsilon_1)$ ,  $(t_2, z_2, \varepsilon_2)$ ,  $\dots$ ,  $(t_l, z_l, \varepsilon_l)$  tais que

$$K \times [-\varepsilon_K, \varepsilon_K] \subset \bigcup_{i=1}^l V(t_i, z_i, \varepsilon_i).$$

Agora, para cada  $i = 1, 2, \dots, l$  o conjunto  $\overline{V(t_i, z_i, \varepsilon_i)}$  é um compacto, logo existe  $\varepsilon^i > 0$  tal que, para todo  $\varepsilon \in [-\varepsilon^i, \varepsilon^i]$ , a variedade de descontinuidade  $\mathcal{M}$  é do tipo costura na interseção com o compacto  $\overline{V(t_i, z_i, \varepsilon_i)}$ .

Portanto, se tomarmos

$$K^+ = \bigcup_{i=1}^l \overline{V(t_i, z_i, \varepsilon_i)}$$

e  $\bar{\varepsilon} = \min\{\varepsilon_K, \varepsilon^i : i = 1, 2, \dots, l\}$ , segue que, para todo  $(t, z) \in K$  e para todo  $\varepsilon \in [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$  a órbita  $\varphi_\varepsilon([0, T], t, z)$  está inteiramente contida em  $K^+$  e costura a variedade, o que, pela Proposição 3.16, nos garante a unicidade das órbitas iniciando em  $K$ , para  $\varepsilon \in [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ .  $\square$

Procedendo com a  $\phi$ -regularização do Sistema de Filippov (1.5) obtemos

$$x'(t) = \varepsilon F_\delta(t, x) + \varepsilon^2 R_\delta(t, x, \varepsilon), \quad (5.2)$$

com

$$F_\delta(t, x) = F_1(t, x) + \phi_\delta(h(t, x))F_2(t, x)$$

e

$$R_\delta(t, x, \varepsilon) = R_1(t, x, \varepsilon) + \phi_\delta(h(t, x))R_2(t, x, \varepsilon),$$

onde  $\phi_\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a função de classe  $C^0$  definida em (1.2).

Definamos a função promediada do sistema (5.2) por

$$f_\delta(z) = \int_0^T F_\delta(t, z) dt. \quad (5.3)$$

Observe que para  $z \in \Sigma_0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f_\delta(z) = f_0(z).$$

Precisamos garantir que a hipótese (i) do Teorema 4.1, do Capítulo 4, é válida para as funções  $F_\delta$  e  $R_\delta$ . Para isso, provamos o seguinte lema.

**Lema 5.6.** *As funções  $F_\delta$  e  $R_\delta$  são localmente Lipschitz na segunda variável.*

*Demonstração.* Seja  $K \subset D$  um subconjunto compacto. Denotemos  $M = \sup\{|F_2(t, x)| : (t, x) \in [0, T] \times K\}$ , o qual está bem definido pela continuidade da aplicação  $(t, x) \mapsto |F_2(t, x)|$  e pela compacidade do conjunto  $[0, T] \times K$ .

Para  $x_1$  e  $x_2$  em  $K$ , temos que

$$\begin{aligned} \|F_\delta(t, x_1) - F_\delta(t, x_2)\| &= \|F_1(t, x_1) - F_1(t, x_2) \\ &\quad + \phi_\delta \circ h(t, x_1)F_2(t, x_1) - \phi_\delta \circ h(t, x_2)F_2(t, x_2)\| \\ &\leq \|F_1(t, x_1) - F_1(t, x_2)\| \\ &\quad + \|\phi_\delta \circ h(t, x_1)F_2(t, x_1) - \phi_\delta \circ h(t, x_2)F_2(t, x_2)\| \\ &\leq L\|x_1 - x_2\| + \|\phi_\delta \circ h(t, x_1)\| \|F_2(t, x_1) - F_2(t, x_2)\| \\ &\quad + \|F_2(t, x_2)\| \|\phi_\delta \circ h(t, x_1) - \phi_\delta \circ h(t, x_2)\| \\ &\leq 2L\|x_1 - x_2\| + \frac{M}{\delta} |h(t, x_1) - h(t, x_2)| \\ &\leq \left(2L + \frac{ML}{\delta}\right) \|x_1 - x_2\| = L_\delta \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

O que conclui a demonstração para  $F_\delta$ . A demonstração para  $R_\delta$  é análoga.

□

Agora, estamos prontos para demonstrar o Teorema 1.4.

## 5.2 Demonstração do Teorema 1.4

---

Na demonstração deste teorema, estudaremos as Aplicações de Poincaré dos sistemas (1.5) e (5.2). Para definir a Aplicação de Poincaré do sistema (5.2), vamos reescrevê-lo como o sistema diferencial autônomo em  $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{aligned}\tau'(t) &= 1, \\ x'(t) &= \varepsilon F_\delta(\tau, x) + \varepsilon^2 R_\delta(\tau, x, \varepsilon).\end{aligned}\tag{5.4}$$

Para cada  $z \in D$ , denotemos por  $t \mapsto (\tau(t, z), x_\delta(t, z, \varepsilon))$  a solução do sistema (5.4) com condições iniciais

$$\tau(0, z) = 0, \quad x_\delta(0, z, \varepsilon) = z.$$

O campo vetorial correspondente ao sistema (5.4) é o mesmo em cada faixa vertical de comprimento  $T$  no espaço de dimensão  $n + 1$  com coordenadas  $(\tau, x)$ . Sendo assim, pelo ponto de vista geométrico, é conveniente considerarmos o sistema (5.4) definido em um “cilindro”  $\mathbb{S}^1 \times D$  obtido identificando-se o conjunto  $\Sigma$  com as retas  $\{(\tau, x) : \tau = nT, \}$  para  $n \in \mathbb{Z}$  (veja a Figura 5.1). Para este cilindro,  $\Sigma$  é uma seção transversal ao fluxo do sistema (5.4). Mais ainda, se  $z \in D$  é a coordenada de um ponto em  $\Sigma$ , então, a Aplicação de Poincaré associada a  $z$  é dada por

$$P_\delta^\varepsilon(z) = x_\delta(T, z, \varepsilon).$$

Observemos que existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que, para  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ , a solução

$$t \mapsto (\tau(t, z), x_\delta(t, z, \varepsilon))$$

está unicamente definida no intervalo  $[0, T]$ . De fato, procedendo de forma análoga à demonstração do lema 4.4, se  $(t_z^-, t_z^+)$  é o intervalo maximal de definição da solução passando por  $(0, z)$ , então, pelo Teorema 3.17, do Capítulo 3,  $t_z^+ > h_z$  e  $h_z = \inf(T, d/m(\varepsilon))$  onde  $m(\varepsilon) \geq \|\varepsilon F_\delta(t, x) + \varepsilon^2 R_\delta(t, x, \varepsilon)\|$  para todo  $t \in [0, T]$ , para todo  $x$  com  $\|x - z\| \leq d$  e para todo  $z \in D$ . Quando  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno,  $d/m(\varepsilon)$  pode ser arbitrariamente grande, de modo que  $h_z = T$  para todo  $z \in D$ . Sendo assim, para  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ ,

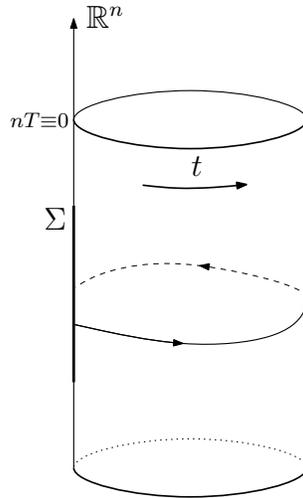


Figura 5.1: Cilindro Generalizado.

a Aplicação de Poincaré do sistema (5.4) está bem definida e é contínua para todo  $z \in D$ .

Portanto, o Corolário 4.6, do Capítulo 4, implica que

$$P_\delta^\varepsilon(z) = z + \varepsilon f_\delta(z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Podemos também verificar a afirmação acima utilizando os resultados sobre dependência diferencial das soluções do sistema (5.2) sobre o parâmetro  $\varepsilon$  (veja, por exemplo, Corolário 3 de [36], capítulo II, seção 3).

Denotemos por  $P^\varepsilon(z)$  a Aplicação de Poincaré do sistema (1.5). É claro que o limite pontual da Aplicação de Poincaré do sistema (5.2), quando  $\delta \rightarrow 0$ , é a Aplicação de Poincaré do sistema (1.5) e o limite pontual em  $\Sigma_0$  da função promediada  $f_\delta$ , quando  $\delta \rightarrow 0$ , é a função promediada  $f_0$ .

Por definição, os pontos fixos de  $P^\varepsilon$  e de  $P_\delta^\varepsilon$  correspondem, respectivamente, às órbitas periódicas dos sistemas (1.5) e (5.2) definidos no cilindro. É fácil ver que os pontos fixos de  $P_\delta^\varepsilon$  também correspondem às órbitas periódicas do sistema original (5.2) definido em todo  $\mathbb{R} \times D$  (veja, por exemplo, [13]); o mesmo ocorre para  $P^\varepsilon$ .

*Demonstração.* Dividiremos a demonstração do teorema em seis afirmações.

**Afirmção 5.7.** *Dado o subconjunto compacto  $D_1 \subset D$ , então, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, a órbita do Sistema de Filippov (1.5), passando por  $z \in D_1$ , intercepta a variedade de descontinuidade  $\mathcal{M}$  em um número finito de pontos, para  $0 \leq t \leq T$ .*

Seja  $x(t, z, \varepsilon)$  a Solução de Filippov do sistema (1.5) tal que  $x(0, t, \varepsilon) = z \in K$ . A órbita passando por  $z \in D_1$  no Cilindro Generalizado (Espaço de Fase do Sistema de Filippov (1.5). Veja a Figura 5.1) é dada pela curva  $\gamma_\varepsilon(t) = (t, x(t, z, \varepsilon))$ , a qual, pelo Lema 5.5, está bem definida para todo  $t \in [0, T]$  e intercepta a variedade  $\mathcal{M}$  somente em pontos de costura, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno.

Suponhamos, por absurdo, que a órbita  $\gamma_\varepsilon(t)$  intercepta a variedade  $\mathcal{M}$  infinitas vezes, sendo assim, existe uma sequência estritamente crescente  $(t_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset [0, T]$  tal que  $h(t_i, x(t_i, z, \varepsilon)) = 0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Então, existe uma subsequência convergente  $(t_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$  tal que  $t_{i_j} \rightarrow \bar{t} \in [0, T]$ .

Pela continuidade da órbita, segue que,  $\gamma_\varepsilon([0, T])$  é uma curva compacta, logo se  $\bar{z} = x(\bar{t}, z, \varepsilon)$ , então,  $(\bar{t}, \bar{z}) \in \gamma([0, T])$ .

Pela continuidade da função  $h$ , segue que,  $h(\bar{t}, \bar{z}) = 0$ , implicando que  $(\bar{t}, \bar{z}) \in \mathcal{M}$ .

Como  $\bar{t}$  é ponto de acumulação, segue que, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $j_0 > 0$ , tal que  $t_{i_j} \in (\bar{t} - \epsilon, \bar{t} + \epsilon)$ , para todo  $j \geq j_0$ . Sendo assim, a órbita  $\gamma_\varepsilon(t)$  intercepta a variedade  $\mathcal{M}$ , para  $t \in (\bar{t} - \epsilon, \bar{t} + \epsilon)$ , em um número infinito de pontos.

Obtemos assim, um absurdo. Uma vez que, pelo Lemma 5.5,  $(\bar{t}, \bar{z})$  é um ponto de costura da variedade de descontinuidade  $\mathcal{M}$  que é atingido pela órbita  $\gamma_\varepsilon(t)$ , do Sistema de Filippov (1.5) e a Proposição 3.16, do Capítulo 3, nos garante a órbita  $\gamma_\varepsilon(t)$  atravessa o ponto  $(\bar{t}, \bar{z})$ , ou seja, existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que  $h(t, x(t, z, \varepsilon)) \neq 0$  para todo  $t \in (\bar{t} - \epsilon_0, \bar{t} + \epsilon_0) \setminus \{\bar{t}\}$ .

**Afirmção 5.8.** *Dado o subconjunto compacto  $D_1 \subset D$ , então, para  $\varepsilon > 0$ , suficientemente pequeno,  $z \in D_1$  e  $\bar{t} \in (0, T]$ , temos que*

$$x(\bar{t}, z, \varepsilon) = z + \varepsilon \int_0^{\bar{t}} F(t, x(t, z, \varepsilon)) dt + \varepsilon^2 \int_0^{\bar{t}} R(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon) dt,$$

onde  $F$  e  $R$  são as funções definidas no Teorema 1.4.

Tomemos  $z \in D$ , pela Definição 3.11 e pela Afirmação 5.7, a órbita passando por  $z \in D_1$  pode ser decomposta em finitas partes diferenciáveis,

$$x(t, z, \varepsilon) = \begin{cases} x_1(t, z, \varepsilon), & \text{se } 0 = t_0 \leq t \leq t_1 \\ x_2(t, z, \varepsilon), & \text{se } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \vdots \\ x_i(t, z, \varepsilon), & \text{se } t_{i-1} \leq t \leq t_i \\ \vdots \\ x_k(t, z, \varepsilon), & \text{se } t_{k-1} \leq t \leq t_k = T, \end{cases}$$

para as quais é válida a seguinte relação de recorrência

$$x_1(0, z, \varepsilon) = z \quad \text{e} \quad x_{i+1}(t_i, z, \varepsilon) = x_i(t_i, z, \varepsilon),$$

para  $i = 1, 2, \dots, k - 1$ .

Temos também que, cada  $x_i(t, z, \varepsilon)$ , para  $i = 1, 2, \dots, k - 1$ , satisfaz a equação diferencial (1.5). Sendo assim, para  $t \in (t_i, t_{i+1})$

$$\begin{aligned} x_{i+1}(t, z, \varepsilon) &= x_{i+1}(t_i, z, \varepsilon) + \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(t, x(t, z, \varepsilon)) dt + \varepsilon^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} R(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon) dt, \\ &= x_i(t_i, z, \varepsilon) + \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(t, x(t, z, \varepsilon)) dt + \varepsilon^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} R(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon) dt. \end{aligned}$$

Em particular, a solução  $x(t, z, \varepsilon)$ , do sistema (1.5), está definida para  $0 \leq t \leq T$ . Sendo assim, pela unicidade de Soluções de Filippov do sistema (1.5), dada pelo Lema 5.5, segue que,

$$\begin{aligned} P^\varepsilon(z) &= x(T, z, \varepsilon) \\ &= x_1(t_1, \cdot, \varepsilon) \circ x_2(t_2, \cdot, \varepsilon) \circ \dots \circ x_k(T, \cdot, \varepsilon)(z). \end{aligned}$$

Portanto, a Aplicação de Poincaré  $P^\varepsilon(z)$ , do sistema (1.5), é dada como composição de aplicações contínuas em  $z$  (veja a Figura 5.2), de onde tal continuidade é obtida pelos

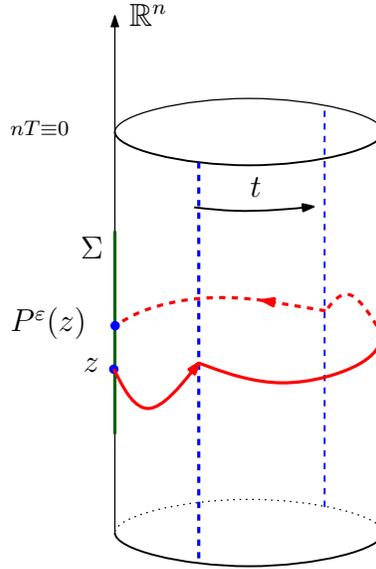


Figura 5.2: Aplicação de Poincaré.

resultados sobre dependência contínua das soluções de equações diferenciais contínuas sobre o parâmetro  $\varepsilon$  (veja, por exemplo, Teorema 1 de [36], capítulo II, seção 2). Logo, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno,  $P^\varepsilon(z)$  também é uma aplicação contínua em  $z$ .

Uma vez que, existe  $\bar{k} \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ , de modo que  $\bar{t} \in (t_{\bar{k}}, t_{\bar{k}+1})$ , então,

$$\begin{aligned} x(\bar{t}, z, \varepsilon) &= x_{\bar{k}}(\bar{t}, z, \varepsilon) \\ &= x_{\bar{k}-1}(t_{\bar{k}-1}, z, \varepsilon) + \varepsilon \int_{t_{\bar{k}-1}}^{\bar{t}} F(t, x(t, z, \varepsilon)) dt + \varepsilon^2 \int_{t_{\bar{k}-1}}^{\bar{t}} R(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon) dt, \end{aligned}$$

podemos proceder por indução em  $i$  e obter a afirmação.

**Afirmção 5.9.** *Dado o subconjunto compacto  $D_1 \subset D$ , se  $z \in D_1$ , então, a Aplicação de Poincaré  $P^\varepsilon(z)$  do Sistema de Filippov (1.5), para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, é dada por*

$$P^\varepsilon(z) = z + \varepsilon f_0(z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Se denotarmos

$$f(z, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^T F(t, x(t, z, \varepsilon)) dt + \varepsilon^2 \int_0^T R(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon) dt, \quad (5.5)$$

então, pela Afirmação 5.8, segue que,

$$P^\varepsilon(z) = x(T, z, \varepsilon) = z + f(z, \varepsilon).$$

Observe que existe subconjunto compacto  $D^+ \subset D$ , tal que  $x(t, z, \varepsilon) \in D^+$  para todo  $t \in [0, T]$ ,  $z \in \mathcal{D}_1$  e  $\varepsilon \in [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ . Uma vez que, a função  $R$  é contínua por partes em  $[0, T] \times K \times [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ , segue que, existe  $N_K > 0$  tal que  $R(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon) \leq N_K$ . Sendo assim,

$$\int_0^T R(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon) dt \leq \int_0^T N_K dt = TN_K = \mathcal{O}(1).$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, se  $t \in (t_i, t_{i+1})$ , então,

$$\begin{aligned} F(t, x(t, z, \varepsilon)) &= \frac{d}{dt} \int_{t_i}^t F(s, x(s, z, \varepsilon)) ds - \int_{t_i}^t \left( \frac{d}{dt} x(t, z, \varepsilon) \right) \nabla_x F(s, x(s, z, \varepsilon)) ds, \\ &= \frac{d}{dt} \int_{t_i}^t F(s, x(s, z, \varepsilon)) ds + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} f(z, \varepsilon) &= \varepsilon \int_0^T F(t, x(t, z, \varepsilon)) dt + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ &= \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(t, x(t, z, \varepsilon)) dt + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ &= \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{dt} \left( \int_{t_i}^t F(s, x(s, z, \varepsilon)) ds \right) dt + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ &= \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(s, x(t_{i+1}, z, \varepsilon)) ds + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} \|f(z, \varepsilon) - \varepsilon f_0(z)\| &\leq \left\| \varepsilon \int_0^T F(t, x(t, z, \varepsilon)) - F(t, z) dt \right\| + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} L_i \|x(t_{i+1}, z, \varepsilon) - z\| + \mathcal{O}(\|x(t_{i+1}, z, \varepsilon) - z\|^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ &\leq \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é decorrente da Afirmação 5.8.

Portanto, segue a igualdade

$$f(z, \varepsilon) = \varepsilon f_0(z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

de onde concluímos a afirmação.

**Afirmção 5.10.** *Existe  $\delta_0 > 0$  de modo que para todo  $0 < \delta \leq \delta_0$  existe  $a_\delta$  tal que  $f_\delta(a_\delta) = 0$  e para o qual a hipótese H2 é válida.*

Seja  $a \in V$  dado pela hipótese H2. Sabemos que  $f_0(z) \neq 0$  para todo  $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ . Consideremos a homotopia contínua  $\{f_\delta, 0 \leq \delta \leq 1\}$ . Suponhamos que exista sequência  $(z^i)_{i \in \mathbb{N}}$  em  $\partial V$  em  $[0, 1]$  tal que  $f_{\frac{1}{i}}(z^i) = 0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Uma vez que,  $\partial V$  é um conjunto fechado e a sequência  $(z^i)_{i \in \mathbb{N}}$  é limitada, segue que, existe uma subsequência convergente  $(z^{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ , tal que  $z^{i_j} \rightarrow z_0 \in \partial V$ , quando  $j \rightarrow \infty$ . Sendo assim,  $f_{\frac{1}{i_j}}(z^{i_j}) \rightarrow f_0(z_0)$ , quando  $j \rightarrow \infty$ . De onde, segue que,  $f_0(z_0) = 0$ , contradizendo a hipótese H2.

Sendo assim, podemos escolher  $\delta_0 > 0$  tal que  $0 \notin f_\delta(\partial V)$  para  $0 \leq \delta \leq \delta_0$ . Então, pelo item (iii) do Teorema 3.18 do Capítulo 3, concluímos que  $d_B(f_\delta, V, 0) \neq 0$  para  $0 \leq \delta \leq \delta_0$ . Sendo assim, pelo item (i) do Teorema 3.18 do Capítulo 3, existe  $a_\delta \in V$  tal que  $f_\delta(a_\delta) = 0$  para o qual é válida a hipótese H2.

O Teorema 4.1, do Capítulo 4, garante a existência de soluções periódicas  $\varphi_\delta(\cdot, \varepsilon)$  do sistema regularizado (5.2) para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, tal que,  $\varphi_\delta(0, \varepsilon) \rightarrow a_\delta$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Definamos  $z_{(\delta, \varepsilon)} = \varphi_\delta(0, \varepsilon)$ , deste modo

$$P_\delta^\varepsilon(z_{(\delta, \varepsilon)}) = z_{(\delta, \varepsilon)},$$

para todo  $0 < \delta \leq \delta_0$  e  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno.

**Afirmção 5.11.** *Existe  $z_\varepsilon$  tal que  $P^\varepsilon(z_\varepsilon) = z_\varepsilon$ .*

Para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, cada  $z_{(\delta, \varepsilon)}$  é ponto de alguma órbita periódica do sistema (5.4). Logo, a sequência  $(z_\varepsilon^i)_{i \in \mathbb{N}}$  com  $z_\varepsilon^i = z_{(\frac{1}{i}, \varepsilon)}$  é limitada. Portanto, existe uma subsequência convergente  $(z_\varepsilon^{i_j})$  tal que  $z_\varepsilon^{i_j} \rightarrow z_\varepsilon$ , quando  $j \rightarrow \infty$ . Sendo assim,  $f_{\frac{1}{i_j}}(z_\varepsilon^{i_j}) \rightarrow f_0(z_\varepsilon)$ , quando  $j \rightarrow \infty$ .

Afirmamos, então, que  $P^\varepsilon(z_\varepsilon) = z_\varepsilon$ .

Uma vez que

$$z_\varepsilon = \lim_{j \rightarrow \infty} z_\varepsilon^{i_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} P_{\frac{1}{i_j}}^\varepsilon(z_\varepsilon^{i_j}),$$

e

$$P^\varepsilon(z_\varepsilon) = P^\varepsilon\left(\lim_{j \rightarrow \infty} z_\varepsilon^{i_j}\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} P^\varepsilon(z_\varepsilon^{i_j}).$$

é suficiente provar que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left( P^\varepsilon(z_\varepsilon^{i_j}) - P_{\frac{1}{i_j}}^\varepsilon(z_\varepsilon^{i_j}) \right) = 0.$$

Porém

$$\begin{aligned} \left\| P^\varepsilon(z_\varepsilon^{i_j}) - P_{\frac{1}{i_j}}^\varepsilon(z_\varepsilon^{i_j}) \right\| &= \left\| \varepsilon f_0(z_\varepsilon^{i_j}) - \varepsilon f_{\frac{1}{i_j}}(z_\varepsilon^{i_j}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right\| \\ &\leq \varepsilon \left\| f_0(z_\varepsilon^{i_j}) - f_{\frac{1}{i_j}}(z_\varepsilon^{i_j}) \right\| + \|\mathcal{O}(\varepsilon^2)\| \end{aligned}$$

logo, dado  $\epsilon > 0$  podemos escolher  $j \in \mathbb{N}$  suficientemente grande e  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, de modo que

$$\left\| P^\varepsilon(z_\varepsilon^{i_{j_k}}) - P_{\frac{1}{i_{j_k}}}^\varepsilon(z_\varepsilon^{i_{j_k}}) \right\| < \epsilon.$$

Observe que tomamos o parâmetro  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno afim de controlar o termo  $\|\mathcal{O}(\varepsilon^2)\|$ , os demais termos são controlados por  $j \in \mathbb{N}$ .

**Afirmção 5.12.**  $a_\delta \rightarrow a$  quando  $\delta \rightarrow 0$ .

Suponhamos que  $a_\delta$  não converge para  $a$  e consideremos a sequência  $(a^i)_{i \in \mathbb{N}}$  com  $a^i = a_{\frac{1}{i}}$  para  $i \in \mathbb{N}$ .

A nossa suposição implica que existem  $\epsilon_0 > 0$  e uma subsequência  $(a^{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$  tal que  $\|a^{i_j} - a\| > \epsilon_0$ . Por outro lado  $(a^{i_j})_{j \in \mathbb{N}} \subset V$  é uma sequência limitada, logo existe uma subsequência convergente  $(a^{i_{j_k}})_{k \in \mathbb{N}}$ , tal que  $a^{i_{j_k}} \rightarrow \bar{a} \in \bar{V} \setminus \{a\}$ , quando  $k \rightarrow \infty$ . Sendo assim,  $f_{\frac{1}{i_{j_k}}}(z_\varepsilon^{i_{j_k}}) \rightarrow f_0(\bar{a})$ , quando  $k \rightarrow \infty$ . Contudo,  $f_\delta(a_\delta) = 0$  para  $0 < \delta \leq \delta$ , portanto,

$$f_0(\bar{a}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{\frac{1}{i_{j_k}}}(a^{i_{j_k}}) = 0,$$

contradizendo a hipótese H2. Sendo assim, concluímos que  $a_\delta \rightarrow a$  quando  $\delta \rightarrow 0$ .

## 5 Demonstração do Teorema de Averaging para Sistemas Descontínuos

---

Pelas Afirmções 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12, concluímos que para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, existe  $z_\varepsilon$  tal que  $P^\varepsilon(z_\varepsilon) = z_\varepsilon$  e  $z_\varepsilon \rightarrow a$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Portanto, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, existe uma solução periódica  $\varphi(\cdot, \varepsilon)$  do sistema (1.5) tal que  $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow a$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$



---

---

# CAPÍTULO 6

---

## Demonstrações das Aplicações

Para demonstrarmos os Teoremas 2.7 e 2.9, temos que basicamente verificar que o conjunto de hipóteses H do Teorema 1.4 é satisfeito para os sistemas (2.3) e (2.7).

É imediato que a hipótese H1\*, dos Teoremas 2.7 e 2.9, implica na validade da hipótese H1, do Teorema 1.4, para os sistemas (2.3) e (2.7). Tal fato ficará claro nas demonstrações.

Uma vez que as funções  $\tilde{\mathcal{F}}$  e  $\hat{\mathcal{F}}$ , definidas respectivamente em (2.9) e (2.10), são, de fato, modificações, via mudanças de coordenadas, determinadas pelos Teoremas 2.4 e 2.5, da função promediada (1.2) definida no Teorema 1.4, a hipótese de existência dos zeros simples  $\Omega_0$  e  $\mathbf{z}_0$  dos respectivos Teoremas 2.7 e 2.9, implicará na validade da hipótese H2, do Teorema 1.4, respectivamente para os sistemas (2.3) e (2.7).

Finalmente, a hipótese H2\* dos Teoremas 2.7 e 2.9, implicará na validade da hipótese da Proposição 1.3, o que por sua vez implicará na validade das hipóteses H3 e H4 do Teorema 1.4, para os sistemas (2.3) e (2.7).

Antes de prosseguirmos com as demonstrações dos Teoremas 2.7 e 2.9, vamos relembrar a hipótese H2\* dos Teoremas 2.7 e 2.9.

$$(H2^*) \quad \partial_t g(t, \mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} g(t, \mathbf{x}) \cdot S_{\Lambda} \cdot \mathbf{x} \neq 0 \text{ para todo } (t, \mathbf{x}) \in \mathcal{M}_g.$$

## 6.1 Perturbação Autônoma

---

*Demonstração do Teorema 2.7.* Assumamos que

$$\Gamma(t, \mathbf{x}) = \Gamma(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad \Pi(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = \Pi(\mathbf{x}, \varepsilon).$$

Sendo assim, pelo Teorema 2.4, o sistema (2.1) é reduzido ao sistema (2.3) através da mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos(\lambda_1 \theta_1), & y_1 &= r_1 \sin(\lambda_1 \theta_1), \\ x_i &= r_i \cos(\lambda_i \theta_1 + \theta_i), & y_i &= r_i \sin(\lambda_i \theta_1 + \theta_i). \end{aligned}$$

A saber, para  $\theta = \theta_1$ ,

$$\Omega'(\theta) = \varepsilon \tilde{\mathbf{F}}(\theta, \Omega) + \varepsilon^2 \tilde{\mathbf{R}}(\theta, \Omega, \varepsilon),$$

onde

$$\tilde{\mathbf{F}}(\theta, \Omega) = \tilde{\mathbf{F}}_1(\theta, \Omega) + \text{sign}(\tilde{h}(\theta, \Omega)) \tilde{\mathbf{F}}_2(\theta, \Omega)$$

e

$$\tilde{\mathbf{R}}(\theta, \Omega, \varepsilon) = \tilde{\mathbf{R}}_1(\theta, \Omega, \varepsilon) + \text{sign}(\tilde{h}(\theta, \Omega)) \tilde{\mathbf{R}}_2(\theta, \Omega, \varepsilon),$$

com,  $\tilde{\mathbf{F}}_1, \tilde{\mathbf{F}}_2 : \mathbb{R} \times \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}_1, \tilde{\mathbf{R}}_2 : \mathbb{R} \times \tilde{D} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$  e  $\tilde{h} : \mathbb{R} \times \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , funções contínuas e  $T_\Lambda$ -periódicas na primeira variável.

Ainda pelo Teorema 2.4, sabemos que

$$\tilde{\mathbf{F}}(\theta, \Omega) = \tilde{\mathbf{F}}_1(\theta, \Omega) + \text{sign}(\tilde{h}(\theta, \Omega)) \tilde{\mathbf{F}}_2(\theta, \Omega),$$

com

$$\tilde{\mathbf{F}}_j(\theta, \Omega) = (F_j^1(\theta, \Omega), F_j^2(\theta, \Omega), \bar{F}_j^2(\theta, \Omega), \dots, F_j^n(\theta, \Omega), \bar{F}_j^n(\theta, \Omega)),$$

onde, para  $i = 2, 3, \dots, n$  e  $j = 1, 2$ , temos

$$\begin{aligned} F_j^i(\theta, \Omega) &= \frac{-1}{\lambda_1 r_1 r_i} [\lambda_i r_i (G_j^1(\Psi(\theta, \Omega)) \sin(\lambda_1 r_1) - \bar{G}_j^1(\Psi(\theta, \Omega)) \cos(\lambda_1 \theta)) \\ &\quad + \lambda_1 r_1 (\bar{G}_j^i(\Psi(\theta, \Omega)) \cos(\lambda_i \theta + \theta_i) - G_j^i(\Psi(\theta, \Omega)) \sin(\lambda_1 \theta + \theta_i))], \\ \bar{F}_j^i(\theta, \Omega) &= -G_j^i(\Psi(\theta, \Omega)) \cos(\lambda_i \theta + \theta_i) - \bar{G}_j^i(\Psi(\theta, \Omega)) \sin(\lambda_i \theta + \theta_i), \\ \bar{F}_j^1(\theta, \Omega) &= -G_j^1(\Psi(\theta, \Omega)) \cos(\lambda_1 \theta) - \bar{G}_j^1(\Psi(\theta, \Omega)) \sin(\lambda_1 \theta), \end{aligned}$$

e

$$\tilde{h}(\theta, \Omega) = g(\Psi(\theta, \Omega)),$$

com

$$\begin{aligned} \Psi(\theta, \Omega) &= (r_1 \cos(\lambda_1 \theta), r_1 \sin(\lambda_1 \theta), r_2 \cos(\lambda_2 \theta + \theta_2), r_2 \sin(\lambda_2 \theta + \theta_2), \dots \\ &\quad \dots, r_n \cos(\lambda_n \theta + \theta_n), r_n \sin(\lambda_n \theta + \theta_n)). \end{aligned}$$

Das expressões acima, concluímos que as funções  $\tilde{\mathbf{F}}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}_2$  e  $\tilde{h}$  são  $T_\Lambda$ -periódicas na primeira variável e localmente Lipschitz na segunda variável e deduzimos que o mesmo vale para as funções  $\tilde{\mathbf{R}}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}_2$ .

Derivando a função  $\tilde{h}$  em  $\theta$  temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta}(\theta, \Omega) &= \frac{\partial}{\partial \theta}(g \circ \Psi)(\theta, \Omega) \\ &= \nabla g(\Psi(\theta, \Omega)) \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}(\theta, \Omega). \end{aligned}$$

Por sua vez

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}(\theta, \Omega) = S_\Lambda \cdot \Psi(\theta, \Omega).$$

Segue, então, que

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta}(\theta, \Omega) = \nabla g(\Psi(\theta, \Omega)) \cdot S_\Lambda \cdot \Psi(\theta, \Omega).$$

Observe que se  $(\theta, \Omega) \in \tilde{\mathcal{M}}$ , então,  $\mathbf{x} = \Psi(\theta, \Omega) \in \mathcal{M}_g$ . Como  $\partial_t g(t, \mathbf{x}) = 0$  segue, pela hipótese H2\*, que

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta}(\theta, \Omega) = \partial_t g(t, \mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \cdot S_\Lambda \cdot \mathbf{x} \neq 0,$$

para todo  $(\theta, \Omega) \in \tilde{\mathcal{M}}$ . Sendo assim, pela Proposição 1.3, as hipóteses H3 e H4 são satisfeitas para o sistema reduzido (2.3).

Aplicando o Teorema 1.4 concluímos que para cada zero simples  $\Omega_0 = \mathcal{R}_0 + \Phi_0$  do sistema (2.9), e para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, existe uma solução periódica  $\Omega(\theta, \varepsilon)$  do sistema reduzido (2.3) de modo que  $\Omega(\theta, \varepsilon) \rightarrow \Omega_0$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Sendo assim, existe uma solução periódica  $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$  do sistema (2.1) tal que  $|\mathbf{x}(t, \varepsilon)| \rightarrow |\mathcal{R}_0|$ . De fato,

$$|\mathcal{R}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2}.$$

Temos, então, demonstrado o teorema. □

---

## 6.2 Perturbação Não Autônoma

---

*Demonstração do Teorema 2.9.* Pelo Teorema 2.5, o sistema (2.1) é equivalente ao sistema (2.7) pela mudança de coordenadas

$$\mathbf{y}(t) = e^{-tS_\Lambda} \mathbf{x}(t).$$

A saber

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \varepsilon \hat{\mathbf{F}}(t, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \hat{\mathbf{R}}(t, \mathbf{y}, \varepsilon),$$

onde

$$\hat{\mathbf{F}}(t, \mathbf{y}) = \hat{\mathbf{F}}_1(t, \mathbf{y}) + \text{sign}(\hat{h}(t, \mathbf{y})) \hat{\mathbf{F}}_2(t, \mathbf{y})$$

e

$$\hat{\mathbf{R}}(t, \mathbf{y}, \varepsilon) = \hat{\mathbf{R}}_1(t, \mathbf{y}, \varepsilon) + \text{sign}(\hat{h}(t, \mathbf{y})) \hat{\mathbf{R}}_2(t, \mathbf{y}, \varepsilon),$$

com,  $\hat{\mathbf{F}}_1, \hat{\mathbf{F}}_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ ,  $\hat{\mathbf{R}}_1, \hat{\mathbf{R}}_2 : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  e  $\hat{h} : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$ , funções contínuas,  $T_\Lambda$ -periódicas na primeira variável.

Ainda pelo Teorema 2.4, sabemos que

$$\hat{\mathbf{F}}(t, \mathbf{y}) = \hat{\mathbf{F}}_1(t, \mathbf{y}) + \text{sign}(\hat{h}(t, \mathbf{y})) \hat{\mathbf{F}}_2(t, \mathbf{y}), \text{ onde}$$

$$\hat{\mathbf{F}}_1 = e^{-tS_\Lambda} \Gamma_1(t, e^{tS_\Lambda} \mathbf{y}), \quad \hat{\mathbf{F}}_2 = e^{-tS_\Lambda} \Gamma_2(t, e^{tS_\Lambda} \mathbf{y}) \quad \text{e} \quad \hat{h}(t, \mathbf{y}) = g(t, e^{tS_\Lambda} \mathbf{y}).$$

Das expressões acima, concluímos que as funções  $\hat{\mathbf{F}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{F}}_2$  e  $\hat{h}$  são  $T_\Lambda$ -periódicas na primeira variável e Lipschitz na segunda variável e deduzimos que o mesmo vale para as funções  $\hat{\mathbf{R}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{R}}_2$ .

Derivando a função  $\hat{h}$  em  $t$  temos

$$\begin{aligned}\partial_t \hat{h}(t, \mathbf{y}) &= \partial_t g(t, e^{tS_\Lambda} \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{x}} g(t, e^{tS_\Lambda} \mathbf{y}) \cdot \frac{\partial}{\partial t} (e^{tS_\Lambda} \mathbf{y}) \\ &= \partial_t g(t, e^{tS_\Lambda} \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{x}} g(t, e^{tS_\Lambda} \mathbf{y}) \cdot S_\Lambda \cdot e^{tS_\Lambda} \mathbf{y} \\ &= \partial_t g(t, \mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} g(t, \mathbf{x}) \cdot S_\Lambda \cdot \mathbf{x}.\end{aligned}$$

Observe que se  $(t, \mathbf{y}) \in \hat{\mathcal{M}}$ , então,  $(t, \mathbf{x}) = (t, e^{tS_\Lambda} \mathbf{y}) \in \mathcal{M}_g$ . Logo, pela hipótese H2\*, segue que,

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial t}(t, \mathbf{y}) = \partial_t g(t, \mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} g(t, \mathbf{x}) \cdot S_\Lambda \cdot \mathbf{x} \neq 0,$$

para todo  $(t, \mathbf{y}) \in \hat{\mathcal{M}}$ . Sendo assim, pela Proposição 1.3, as hipóteses H3 e H4 são satisfeitas para o sistema (2.7).

Aplicando o Teorema 1.4 concluímos que para cada zero simples  $\mathbf{z}_0$  do sistema (2.11), e para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, existe uma solução periódica  $\mathbf{y}(t, \varepsilon)$  do sistema reduzido (2.3) de modo que  $\mathbf{y}(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{z}_0$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Sendo assim, existe uma solução periódica  $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$  do sistema (2.1) tal que  $\mathbf{x}(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{z}_0$ .

Temos, então, demonstrado o teorema. □



---

---

# CAPÍTULO 7

---

## Conclusões Finais e Direções Futuras

Nesta seção, faremos um resumo do projeto que será desenvolvido no programa de doutorado, o qual é uma continuação natural do programa aqui iniciado.

---

### 7.1 Introdução

---

Na presente dissertação, estendemos, para uma classe de Sistemas de Filippov, o resultado da Teoria de Averaging que estuda a existência e persistência de soluções periódicas em sistemas de equações diferenciais. Os resultados clássicos, desta teoria, assumiam que tal sistema fosse no mínimo de classe  $C^2$  (Veja por exemplo [41] e [35]). Em [11] Buica e Llibre, utilizando, principalmente, a teoria de grau de Brouwer (veja, por exemplo, [8]), provaram o mesmo resultado assumindo somente a hipótese de continuidade do sistema.

O trabalho desenvolvido em [24], por Llibre, Novaes e Teixeira, constante nesta dissertação, abriu um leque de possibilidades para possíveis extensões e generalizações

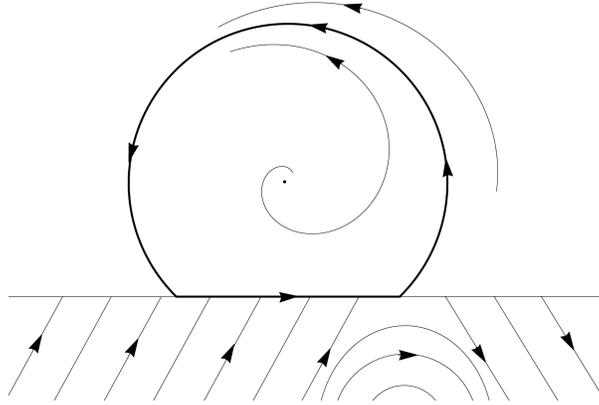


Figura 7.1: Ciclo limite com deslize.

de teoremas similares para classes de Sistemas de Filippov.

No doutorado, seguindo a linha aqui iniciada, temos o intuito de generalizar resultados existentes na Teoria Clássica de Equações Diferenciais.

Nossa principal meta é estabelecer condições para a existência de conjuntos minimais, típicos da Teoria de Sistemas Dinâmicos Não Suaves, tais como, órbitas fechadas e/ou ciclos limites com deslize, ciclos típicos passando por pontos de tangências, entre outros (veja as Figuras 7.1, 7.2 e 7.3).

---

## 7.2 Convenções Preliminares

---

No final do Capítulo 1, introduzimos a classe  $\mathcal{C}$  de Sistemas de Filippov Regulares de maneira não formal. Aqui tentaremos formalizar esse conceito.

### 7.2.1 Sistemas de Filippov Regulares Perturbados

Sejam  $D$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $X, Y : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções contínuas e  $h : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$  função de classe  $C^1$  tendo 0 como valor regular. Como no Capítulo 1, denotemos o conjunto  $h^{-1}(0)$  por  $\mathcal{M}$  e o conjunto  $(\{0\} \times D) \setminus \mathcal{M}$  por  $\Sigma_0$ .

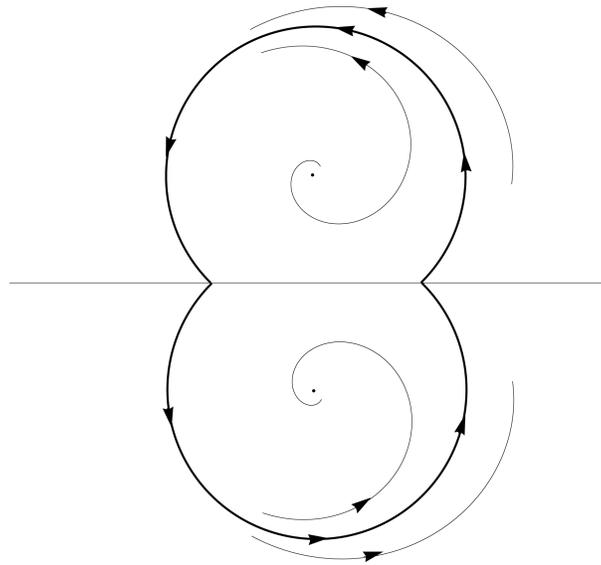


Figura 7.2: Ciclo limite típico.

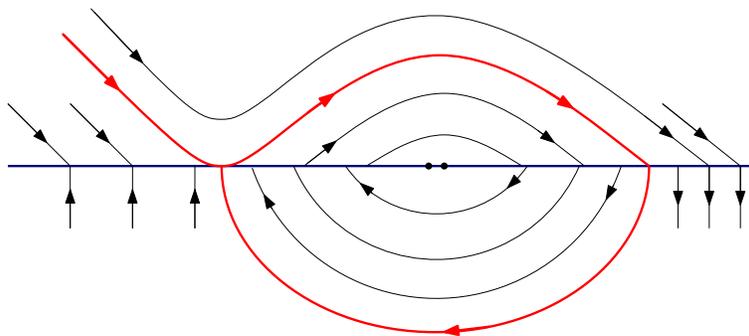


Figura 7.3: Órbita pseudo-homoclínica.

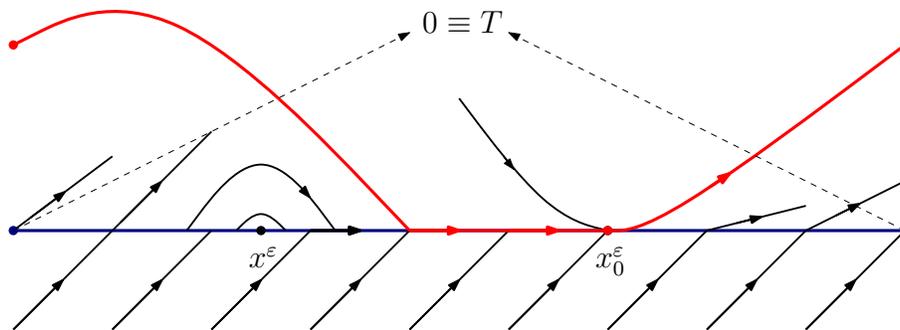


Figura 7.4: Ciclo limite com deslize no cilindro.

Definamos assim o Sistema de Filippov Contínuo por Partes

$$x'(t) = Z(t, x, \varepsilon) = \begin{cases} X(t, x, \varepsilon), & \text{se } h(t, x) > 0, \\ X(t, x, \varepsilon) + Y(t, x, \varepsilon)2, & \text{se } h(t, x) = 0, \\ Y(t, x, \varepsilon), & \text{se } h(t, x) < 0, \end{cases} \quad (7.1)$$

o qual pode ser denotado por  $Z = (X, Y)_h$ .

Fixados  $(t, x) \in \mathbb{R} \times D$ , assumamos que as aplicações

$$\varepsilon \rightarrow X(t, x, \varepsilon) \quad \text{e} \quad \varepsilon \rightarrow Y(t, x, \varepsilon)$$

sejam duas vezes diferenciáveis em  $\varepsilon = 0$ . Assumamos também que as expansões por Series de Taylor das funções  $X$  e  $Y$ , em  $\varepsilon = 0$ , sejam dadas por

$$X(t, x, \varepsilon) = \varepsilon X_1(t, x) + \varepsilon^2 X_2(t, x, \varepsilon) \quad \text{e} \quad Y(t, x, \varepsilon) = \varepsilon Y_1(t, x) + \varepsilon^2 X_2(t, x, \varepsilon)$$

com  $X_1, Y_1 \neq 0$ .

A variedade de descontinuidade  $\mathcal{M}$  não é, necessariamente, conexa, sendo assim, dado  $p \in \mathcal{M}$ , denotamos por  $\mathcal{M}_p$ , a componente conexa de  $\mathcal{M}$  contendo o ponto  $p$ .

### 7.2.2 Classe $\mathcal{C}$ de Sistemas de Filippov Regulares

Consideremos um Sistema de Filippov Regular Perturbado do tipo (7.1). Definamos

$$F_1 = \frac{X_1 + Y_1}{2} \quad \text{e} \quad F_2 = \frac{X_1 - Y_1}{2}.$$

Denotemos por  $\mathcal{C}$  a classe de Sistemas de Filippov Regulares Perturbados, para os quais, são válidas as seguintes hipóteses.

(i)  $X$ ,  $Y$  e  $h$  são  $T$ -periódicas com respeito a  $t$  e são localmente Lipschitz com respeito a  $x$ ;

(ii) se  $\partial_t h(p) = 0$ , para algum  $p \in \mathcal{M}$ , então, existe uma função contínua e positiva  $\xi_p : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$\left( \partial_t h \langle \nabla_x h, F_1 \rangle + \varepsilon \frac{\langle \nabla_x h, F_1 \rangle^2 - \langle \nabla_x h, F_2 \rangle^2}{2} \right) (t, x) \geq \varepsilon \xi_p(t, x)$$

para todo  $(t, x) \in \mathcal{M}_p$ ;

(iii) dado  $z \in \Sigma_0$ , os zeros da aplicação  $h_z : t \mapsto h(t, z)$ , para  $0 \leq t \leq T$ , são isolados.

A classe  $\mathcal{C}$  de Sistemas de Filippov Regulares Perturbados, é em suma, sistemas para os quais a variedade de descontinuidade, restrita a subconjuntos compactos, é do tipo *Costura*, para  $|\varepsilon| > 0$  suficientemente pequeno.

---

## 7.3 Objetivos

---

O projeto, a ser desenvolvido, se divide em duas partes principais. Na primeira parte, concentraremos nossa atenção no estudo de Sistemas de Filippov dentro da classe  $\mathcal{C}$ . Na segunda parte buscaremos resultados similares para sistemas com características mais gerais. Detalharemos, a seguir, o estudo a ser feito em cada uma das partes do projeto.

### 7.3.1 Parte 1

A primeira parte do projeto é uma continuação natural do estudo que fizemos nesta dissertação. Abordaremos, em princípio, dois problemas gerais.

Primeiramente, devemos procurar hipóteses adicionais dentro da classe  $\mathcal{C}$  de Sistemas de Filippov Regulares que garantam a existência de órbitas homoclínicas.

O estudo de órbitas homoclínicas, em sistemas contínuos, é feito utilizando-se o Método de Melnikov (Veja, por exemplo, [42]). Tal método, quando considerado, somente, problemas planares, é equivalente ao Método de Averaging. Sendo assim, iniciaremos o estudo, deste tópico, levando em consideração Sistemas de Filippov no plano. Na Figura 7.3, temos um exemplo típico de órbita (pseudo)homoclínica que aparece em Sistemas de Filippov.

O segundo problema, consiste no estudo da *Perturbação de Sistemas Isócronos*. Em [10], para o caso contínuo, são dadas condições sobre o sistema não perturbado e sobre as perturbações para a persistência de alguma órbita periódica.

Considere o problema de perturbação

$$\dot{x}(t) = F_0(t, x) + \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon). \quad (7.2)$$

Assumindo que, para  $\varepsilon = 0$ , o sistema (7.2) possua um conjunto de soluções periódicas de mesmo período, queremos encontrar condições sob  $F_0$ ,  $F_1$  e  $R$  que garantam a existência e persistência de soluções periódicas para  $|\varepsilon| \neq 0$  suficientemente pequeno. Mais ainda, não queremos, necessariamente, impor como hipótese a continuidade das funções envolvidas, assumiremos hipóteses que garantam que a variedade de descontinuidade, relacionada ao sistema (7.2) seja do tipo Costura.

### 7.3.2 Parte 2

Na Parte 1 deste projeto, fixaremos nossa atenção nos Sistemas de Filippov Regulares para os casos em que a variedade de descontinuidade é do tipo Costura. Já na se-

gunda parte, abordaremos os Sistemas de Filippov Regulares porém com a variedade de descontinuidade admitindo regiões do tipo Deslize e ou Escape (veja a Figura 7.1).

Temos o intuito de obter resultados semelhantes aos obtidos para a classe  $\mathcal{C}$  de Sistemas de Filippov Regulares. Uma vez que, quando a variedade de descontinuidade não é restrita apenas a regiões do tipo costura, podem aparecer, no sistema perturbado, órbitas periódicas com o chamado *Fenômeno de Deslize* (veja a Figura 7.1).

### 7.3.3 Casos Não Regulares

Paralelamente, aos problemas abordados nas partes 1 e 2 do projeto, atacaremos alguns casos, via mudança de coordenadas, no qual o conjunto de descontinuidade não é dado por uma variedade regular. Tais problemas tem como motivação fenômenos físicos envolvendo, basicamente, osciladores não lineares (ver [2]) e a Teoria do Controle (Ver [4]).



---

# BIBLIOGRAFIA

- [1] E. V. APPLETON, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **21** (1922), London.
- [2] A. A. ANDRONOV, A.A. VITT E S. E. KHAIKIN, *Theory of oscillators*, International Series of Monographs In Physics **4** (1966), Pergamon Press.
- [3] A. A. ANDRONOV E A. WITT, *Arch. für electroth* **24** (1930).
- [4] A. D. BAZYKIN, *Nonlinear dynamics of interacting populations*, River-Edge, NJ: World Scientific, 1998.
- [5] N. N. BOGOLIUBOV, *On some statistical methods in mathematical physics*, Izv. vo Akad. Nauk Ukr. SSR, Kiev, 1945.
- [6] N. N. BOGOLIUBOV E N. KRYLOV, *The application of methods of nonlinear mechanics in the theory of stationary oscillations*, Publ. 8 of the Ukrainian Acad. Sci. Kiev, 1934.
- [7] B. BROGLIATO, *Nonsmooth mechanics*, New York: Springer-Verlag, 1999.
- [8] F. BROWDER, *Fixed point theory and nonlinear problems*, Bull. Amer. Math. **9** (1983), 1–39.

- [9] G. BUTTAZZO, A. FREDIANI E R. DILÃO, *Variational analysis and aerospace engineering*, Springer Optimization and Its Applications **33** (2009), Springer.
- [10] A. BUICĂ, J.P. FRANÇOISE E J. LLIBRE, *Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter*, Communication on Pure and Applied Analysis **6** (2007), 103–111.
- [11] A. BUICA E J. LLIBRE, *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*, Bulletin des Sciences Mathématiques **128** (2004), 7–22.
- [12] P.T. CARDIN, T. CARVALHO E J. LLIBRE, *Limit cycles of discontinuous piecewise linear differential systems*, International J. Bifurcation and Chaos **21** (2011), 3181-3194.
- [13] C. C. CHICONE, *Ordinary differential equations with applications*, Texts in Applied Mathematics **34** (1999), Springer.
- [14] S. N. CHOW, C. LI E D. WANG, *Normal forms and bifurcation of planar vector fields*, Cambridge University Press, 1994.
- [15] J. CORTÉS, *Discontinuous dynamical systems: A tutorial on solutions, nonsmooth analysis, and stability*, arXiv:0901.3583v1 [math.Ds].
- [16] F. DUMORTIER, *Singularities of vector fields on the plane*, Journal of Differential Equations **23** (1977), 53–106.
- [17] P. FATOU, *Sur le mouvement d'un système soumis à des forces à courte période*, Bull. Soc. Math. France **56** (1928), 98–139.
- [18] A. F. FILIPPOV, *Differential equations with discontinuous righthand side*, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.
- [19] C. HENRY, *Differential equations with discontinuous righthand side for planning procedure*, Journal of Economic Theory **4** (1972), 541–551.

- [20] T. ITO, *A Filippov solution of a system of differential equations with discontinuous right-hand sides*, Economic Letters, **4** (1979), 349–354.
- [21] M. KESTEVEN, *On the mathematical theory of clock escapements*, American Journal of Physics **46** (1978), No 2, 125–129.
- [22] N. N. KRASOVSKII, *Stability of motion. Applications of Lyapunov’s second method to differential systems and equations with delay*, Stanford, CA: Stanford University Press, 1963. Translated from Russian by J. L. Brenner.
- [23] V. KRIVAN, *On the Gause predator–prey model with a refuge: A fresh look at the history*, Journal of Theoretical Biology **274** (2011), 67–73, .
- [24] J. LLIBRE, D.D. NOVAES E M.A. TEIXEIRA, *Averaging methods for studying the periodic orbits of discontinuous differential systems*, arXiv:1203.0498v1 [math.DS].
- [25] J. LLIBRE, D.D. NOVAES E M.A. TEIXEIRA, *On the periodic solutions of a generalized smooth and non-smooth perturbed planar double pendulum with small oscillations*, arXiv:1203.0498v1 [math.DS].
- [26] J. LLIBRE E F. RONG, *On the number of limit cycles for discontinuous piecewise linear differential systems in  $\mathbb{R}^{2n}$  with two zones*, to appear in Int. J. of Bifurcation and Chaos.
- [27] J. LLIBRE, P.R. DA SILVA AND M.A. TEIXEIRA, *Regularization of discontinuous vector fields on  $\mathbb{R}^3$  via singular perturbation*, J. Dynamics and Differential Equations **19** (2007), 309-331.
- [28] J. LLIBRE, P.R. DA SILVA E M.A. TEIXEIRA, *Synchronization and non-smooth dynamical systems*, J. Dynamics and Differential Equations **24** (2012), 1–12.
- [29] J. LLIBRE E M.A. TEIXEIRA, *Limit cycles for  $m$ -piecewise discontinuous polynomial Liénard differential equations*, arXiv: [math.DS]

- [30] J. LLIBRE E M.A. TEIXEIRA, *Regularization of discontinuous vector fields in dimension three*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **3** (1997), 235-241.
- [31] J. LLIBRE E M.A. TEIXEIRA, *Global asymptotic stability for a class of discontinuous vector fields in  $\mathbb{R}^2$* , Dynamical Systems. An International Journal **22** (2007), 133-146.
- [32] N. G. LLOYD, *Degree theory*, Cambridge University Press, 1978.
- [33] N. MINORSKY, *Nonlinear oscillation*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, 1962.
- [34] B. E. PADEN E S. S. SASTRY, *A Calculus for computing Filippov's differential inclusion with application to the variable structure control of robot manipulators*, IEEE Transactions on Circuits and Systems **34** (1987), no. 1, 73-82.
- [35] J. SANDERS E F. VERHULST, *Averaging method in nonlinear dynamical systems*, Applied Mathematical Sciences **59** 1985, Springer.
- [36] J. SOTOMAYOR, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
- [37] J. SOTOMAYOR E M.A. TEIXEIRA, *Regularization of discontinuous vector field*, International Conference on Differential Equation, Lisboa, 1995, 207-223, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998.
- [38] J. J. STOKER, *Nonlinear vibrations*, Interscience Publishers, New York, 1950.
- [39] M. A. TEIXEIRA, *Perturbation theory for non-smooth systems*, Encyclopedia of Complexity and Systems Science **22** (2009), 6697-6719, Springer New York.
- [40] B. VAN DER POL, *Phil. Mag.* **43** (1922).
- [41] F. VERHULST, *Nonlinear differential equations and dynamical systems*, Universitext, Springer, 1991.

- [42] S. WIGGINS, *Global bifurcation and chaos: analytical methods*, Springer–Verlag New York Inc., 1988.