

Coexistencia de ciclos límite
para un centro lineal no global
con puntos singulares

Set Pérez González

Director: Joan Torregrosa Arús

Septiembre de 2008

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	4
2. Configuración máxima, $\mathcal{Z}^M(n, k)$	10
2.1. Preliminares	10
2.2. $I(r)$ es una función racional	14
2.3. Una configuración máxima explícita	16
2.4. Configuraciones máximas explícitas para $n \leq 6$ y $k = 2$	18
3. Configuraciones realizables de $\mathcal{P}(1, 2)$	20
3.1. Simetría de las configuraciones realizables	21
3.2. Algunas configuraciones realizables y no realizables	23
3.3. Máximo número de ceros y configuraciones realizables	29
4. Diagrama de bifurcación para algunas de las configuraciones menores que $(3, 1, 2)$	32
4.1. Diagrama de bifurcación para x_0, x_1, x_2 fijos	33
4.1.1. Zonas de hasta dos cambios de signo	33
4.1.2. Zonas de 0, 1 y 2 ceros	37
4.2. Diagrama de bifurcación de $(3, 1, \omega)$	38
4.2.1. Zonas de hasta dos cambios de signo	38
4.2.2. Zonas de 0, 1 y 2 ceros	44

CAPÍTULO 1

Introducción

Dentro del estudio cualitativo de los sistemas diferenciales es, probablemente, la búsqueda de ciclos límite (órbita periódica aislada) el problema del que más referencias bibliográficas podemos encontrar y uno de los más interesantes. A su vez el enunciado aún abierto más conocido para problemas de este tipo es la segunda parte del problema 16 de Hilbert, que se puede plantear como sigue.

Para el sistema diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = P_n(x, y), \\ \dot{y} = Q_n(x, y), \end{cases} \quad (1.1)$$

donde P_n y Q_n son polinomios de grado n , ¿cuál es el número máximo de ciclos límite para todo P_n y Q_n posible? Y, ¿cuáles son sus posibles posiciones relativas para el sistema (1.1)?

Una de las técnicas más habituales para dar cotas inferiores de este número consiste en la perturbación de centros, ver [Pon34]. De esta forma, los ciclos límite bifurcan a partir de algunas de las órbitas periódicas del centro.

Para la búsqueda de ciclos límite para el sistema perturbado:

$$\begin{cases} \dot{x} = P_n(x, y) + \varepsilon f(x, y), \\ \dot{y} = Q_n(x, y) + \varepsilon g(x, y), \end{cases} \quad (1.2)$$

los métodos más habituales están íntimamente relacionados con la función de retorno de Poincaré y con las integrales abelianas. La idea es la siguiente: consideremos $P(r, \varepsilon)$ la función de primer retorno de Poincaré, ver Figura 1.1, para el sistema (1.2) definida sobre la sección transversal Σ parametrizada en $r \in [0, 1)$ y conteniendo al centro del problema no perturbado, $\Sigma(0)$, de tal manera que

$$r \in (0, 1) \mapsto P(r, \varepsilon) \in (0, 1) \text{ tal que } \Sigma(P(r, \varepsilon)) \text{ es el primer punto} \\ \text{de corte de la órbita de } \Sigma(r) \text{ con } \Sigma.$$

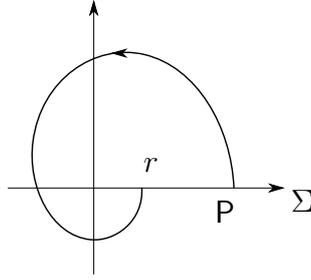


Figura 1.1: Aplicación de retorno de Poincaré, P .

Entonces las órbitas periódicas de (1.2) estarán localizadas allá donde aparezcan ceros de la función desplazamiento $d(r, \varepsilon) = P(r, \varepsilon) - r$. Ahora bien, se puede ver que considerando

$$d(r, \varepsilon) = \varepsilon d^0(r) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

si $d^0(r)$ no es idénticamente nula, entonces el número de ceros de $d(r, \varepsilon)$ se puede acotar por el de $d^0(r)$ contando multiplicidades para ε suficientemente pequeño. De hecho a cada uno de los ceros simples de d^0 le corresponde un cero de d , de manera que el número de ceros coincide a primer orden.

A partir de esta idea consideramos el problema 16 débil de Hilbert, planteado por V. I. Arnold en [Arn77] y [Arn83], para sistemas hamiltonianos.

Dado $H = H(x, y)$ un polinomio en x e y de grado $n + 1 \geq 2$, con curvas de nivel $\gamma_h \subseteq \{(x, y) : H(x, y) = h\}$ para $h_1 < h < h_2$ consideremos el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} + \varepsilon f(x, y), \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + \varepsilon g(x, y), \end{cases} \quad (1.3)$$

donde $\max(\text{grado}(f), \text{grado}(g)) = m \geq 2$. Con $\{\gamma_h\}_{h_1 < h < h_2}$ formando un continuo de curvas cerradas simples alrededor de (x_0, y_0) un centro de (1.3) para $\varepsilon = 0$.

Entonces podemos plantearnos la siguiente pregunta.

Para n y m enteros dados, ¿cuál es el máximo número de ceros aislados de la integral abeliana

$$I(h) = \oint_{\gamma_h} (f(x, y)dy - g(x, y)dx)? \quad (1.4)$$

En principio, este enunciado parece desligado del problema 16 de Hilbert original, pero se puede ver que en el caso de considerar sistemas hamiltonianos como el del enunciado de Arnold se tiene que:

$$I(h) = d^0(h),$$

para $d(h)$ definida para Σ cualquier sección transversal de γ_h parametrizada por $h \in (h_1, h_2)$.

Como referencia para saber más acerca del problema 16 de Hilbert se puede consultar el texto [Li03].

En este contexto, el problema principal que nos planteamos y que denotaremos por $\mathcal{P}(n, k)$, es calcular el número máximo de ciclos límite, $\mathcal{H}(n, k)$, para ε suficientemente pequeño, del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= y K(x, y) + \varepsilon P_n(x, y), \\ \dot{y} &= -x K(x, y) + \varepsilon Q_n(x, y), \end{cases} \quad (1.5)$$

donde P_n y Q_n son polinomios de grado n y $K(x, y) = \prod_{j=1}^k ((x - a_j)^2 + (y - b_j)^2)$.

Existen varias publicaciones en las que se plantean enunciados similares. Como por ejemplo [LLLZ00], [XH04a] y [XH04b] en los que $K(x, y)$ es la ecuación de una recta de puntos singulares simples y múltiples. En [BL07], se estudia el problema para el que $K(x, y)$ representa dos rectas perpendiculares de puntos singulares. Además algunos ejemplos de trabajos realizados en los que $K(x, y)$ representa un conjunto de puntos aislados son [GPT08] y [LLLZ02], alineados en el primero y dos puntos simples o uno doble en el segundo.

En la mayoría de los casos el estudio de ciclos límite que bifurcan de los niveles $H = h$ están localizados en el anillo de periodo que contiene el origen. En este trabajo se pretende estudiar este problema en todo el espacio. De hecho la principal dificultad estriba en controlar la aparición simultánea en los distintos anillos de periodo.

Para desarrollar nuestro trabajo hemos considerado que los ceros de $K(x, y)$ son todos simples y aislados. Dado que el caso de puntos alineados con el origen ya se estudió en [GPT08] supondremos pues que en nuestro caso no lo están. Como las áreas de búsqueda de ciclos límite son los espacios entre puntos consecutivos, supondremos que trabajamos con puntos situados a diferentes distancias del $(0, 0)$. Por la naturaleza del problema, el resultado es independiente de que se realicen giros u homotecias en \mathbb{R}^2 con centro el origen, por tanto sin pérdida de generalidad podremos suponer que $(a_1, b_1) = (1, 0)$ y para al menos una $j \in \{2, \dots, k\}$, $b_j \neq 0$.

El sistema (1.5), tras una reparametrización del tiempo se puede escribir como

$$\begin{cases} \dot{x} &= y + \frac{\varepsilon}{K(x, y)} P_n(x, y), \\ \dot{y} &= -x + \frac{\varepsilon}{K(x, y)} Q_n(x, y), \end{cases} \quad (1.6)$$

que para $\varepsilon = 0$ presenta un centro global. El sistema (1.6) se corresponde con un problema de perturbación de primer orden de un sistema hamiltoniano por medio de 2 funciones racionales y sus curvas de nivel, para $\varepsilon = 0$, vendrán dadas por ecuaciones del tipo

$$\gamma_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}. \quad (1.7)$$

De hecho para evitar problemas en la definición de la integral (1.4) vamos a considerar únicamente el problema en las regiones

$$\mathcal{R}_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \tilde{r}_j^2 = a_j^2 + b_j^2 < x^2 + y^2 < a_{j+1}^2 + b_{j+1}^2 = \tilde{r}_{j+1}^2\},$$

para $j = 0, \dots, k - 1$, donde $(a_0, b_0) = (0, 0)$ y $\mathcal{R}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_k^2 + b_k^2 < x^2 + y^2\}$.

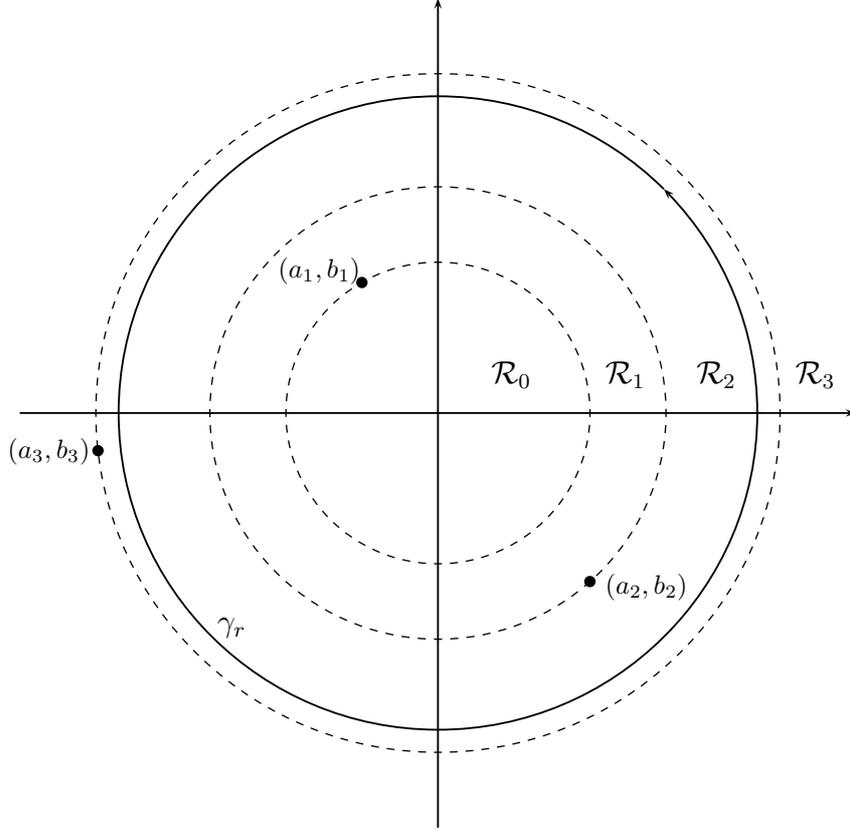


Figura 1.2: Situación de las singularidades (a_j, b_j) y las curvas γ_r .

La Figura 1.2 da el retrato de fase de (1.5) para $\varepsilon = 0$.

Estudiaremos únicamente el problema débil y nos restringimos a buscar el número de ceros de

$$I(r) = \oint_{\gamma_r} \frac{P_n(x, y)dy - Q_n(x, y)dx}{K(x, y)}, \quad (1.8)$$

la función de Poincaré-Melnikov o integral abeliana¹ asociada al sistema (1.6).

De hecho la expresión de $I(r)$ depende de la posición de γ_r , por lo que identificaremos I con el vector (I_0, \dots, I_k) donde $I_j(r) = I(r)$ cuando $\gamma_r \subset \mathcal{R}_j$ para $j = 0, \dots, k$, o equivalentemente $r \in J_j = (\tilde{r}_j, \tilde{r}_{j+1})$ con $j = 0, \dots, k$ donde $\tilde{r}_0 = 0$ y $\tilde{r}_{k+1} = \infty$.

La Proposición 2.6 demostrará que las funciones I_j son racionales por lo que el número máximo de ceros no nulos de I_j en J_j está acotado por el número de ceros no nulos de I_j . Este hecho motiva la siguiente definición:

Definición 1.1. Decimos que $\mathcal{Z}^M(n, k) = (\mathcal{Z}_0, \dots, \mathcal{Z}_k)$ es la configuración máxima de $\mathcal{P}(n, k)$ cuando \mathcal{Z}_j es el grado de \hat{I}_j para $j = 0, \dots, k$, donde \hat{I}_j es un polinomio que tiene exactamente los mismos ceros no nulos que I_j .

¹Ambas son equivalentes sobre el plano [Per01]

Como veremos a lo largo del trabajo no es posible conseguir valores de las singularidades ni de las perturbaciones para los que se obtengan estos valores máximos simultáneamente, aunque sí se puede conseguir este máximo cuando se estudia un único anillo de periodo. La simultaneidad sugiere definir la noción de configuración realizable y la de orden parcial de las configuraciones.

Definición 1.2. Decimos que (z_0, \dots, z_k) es una configuración realizable de $\mathcal{P}(n, k)$ si existen (a_j, b_j) , $j = 1, \dots, k$ y P_n, Q_n para los que se tienen simultáneamente z_j ceros de I_j en J_j para $j = 0, \dots, k$.

El hecho de que tengamos configuraciones vectoriales nos permite definir una relación de orden parcial.

Definición 1.3. Decimos que $(z_0, \dots, z_k) \leq (\tilde{z}_0, \dots, \tilde{z}_k)$ si $z_j \leq \tilde{z}_j$ para todo $j = 0, \dots, k$.

Con esta relación de orden está claro que $(3, 1, 0) \leq (3, 1, 2)$ pero $(2, 2, 2) \not\leq (3, 1, 2)$ y $(3, 1, 2) \not\leq (2, 2, 2)$.

Definición 1.4. Decimos que $\mathcal{Z}(n, k) = (\mathcal{Z}_0, \dots, \mathcal{Z}_k)$ es una configuración maximal de $\mathcal{P}(n, k)$ si es realizable y no existe otra configuración realizable mayor que $\mathcal{Z}(n, k)$.

Aunque la racionalidad de I demostrará que la configuración máxima existe y es única no siempre es realizable, por lo que la noción de configuración maximal toma una relevancia especial. Además, el problema $\mathcal{P}(n, k)$ puede presentar distintas configuraciones maximales. Además con esta definición, el problema débil asociado a $\mathcal{P}(n, k)$ es equivalente a buscar el máximo valor de $|\mathcal{Z}(n, k)|$.

En el Capítulo 2 demostraremos que, en el caso general, la integral abeliana I , dada (1.8), es una función racional. Como se verá a lo largo del trabajo no es simple dar solución al problema planteado para cualquier k por lo que gran parte se desarrolla para $k = 2$. El resultado principal del capítulo da una cota explícita para $\mathcal{Z}^M(n, 2)$.

Teorema A. Si $k = 2$ tenemos que

$$\mathcal{Z}^M(n, 2) \leq \left(n + 4, n + 5, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + 4 \right),$$

con $|\mathcal{Z}(n, 2)| \leq 2n + \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + 13$, donde $|\cdot|$ es la norma de la suma en \mathbb{N}^{k+1} y es $\lceil \cdot \rceil$ la parte entera.

Esta cota, $\mathcal{Z}^M(1, 2) \leq (5, 6, 4)$, se mejora en la Sección 2.4 a partir del cálculo explícito y se ve que el valor es $\mathcal{Z}^M(1, 2) = (3, 2, 3)$. Además un cálculo más detallado para valores de n bajos, refleja que el resultado no es ni mucho menos óptimo ya que parece que una menor cota máxima es $|\mathcal{Z}(n, 2)| \leq 2n + \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + 5$. Este hecho se debe, principalmente, a que en el cálculo explícito se dan gran cantidad de simplificaciones que disminuyen el grado de los polinomios.

En el Capítulo 3 desarrollaremos un estudio exhaustivo sobre la simultaneidad en la existencia de ceros de I para el problema $\mathcal{P}(1, 2)$, con $(a_1, b_1) = (1, 0)$ y $(a_2, b_2) = (a, b)$ tal que $a^2 + b^2 > 1$. El resultado principal nos da todas las configuraciones realizables de este caso.

Teorema B. El número máximo de ceros de $\mathcal{P}(1, 2)$ es 6. Las únicas configuraciones maximales son $(3, 1, 2)$, $(2, 2, 2)$, $(2, 1, 3)$ y una configuración es realizable si y solo si es menor o igual que alguna de las máximas.

Para finalizar, en el Capítulo 4 daremos una aproximación teórica y una aproximación numérica del diagrama de bifurcación en (a, b) de las configuraciones de tipo $(3, 0, w)$ y $(3, 1, w)$, con $w \in \{0, 1, 2\}$.