UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

CICLOS LÍMITE DE SISTEMAS HAMILTONIANOS PERTURBADOS Y CEROS DE INTEGRALES ABELIANAS

TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

SALOMÓN REBOLLO PERDOMO

ASESOR

DR. JESÚS R. MUCIÑO RAYMUNDO

AGOSTO DE 2007

Contenido

Introducción.

En la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, el estudio de ciclos límite es muy importante ya que estos proporcionan información relevante para la descripción del retrato fase de una ecuación diferencial. Sin embargo hallar los ciclos límite de una ecuación diferencial puede ser muy complicado. Prueba de esto es que por más de cien años la segunda parte del problema 16 de Hilbert [Hi](que enunciaremos en seguida) permanece sin solución.

Problema 1. Segunda parte del problema 16 de Hilbert. *Hallar la cota superior $\mathcal{H}(n)$ para el número de ciclos límite de la ecuación diferencial:*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{1}$$

donde $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son polinomios y n es el máximo de los grados de P y Q.

En relación a este problema los resultados más importantes conocidos hasta hoy son:

1. Cada ecuación diferencial (1) tiene un número finito de ciclos límite (ver [Ily91] y [Ec]).

2. La cota $\mathcal{H}(1)$ es cero (resultado elemental).

Sin embargo aún en el caso más sencillo no trivial ($n = 2$) la cota superior $\mathcal{H}(n)$ no se conoce.

Debido al poco éxito en esta dirección, gran parte del trabajo matemático relacionado con el Problema 1 esta dedicado a encontrar cotas inferiores para $\mathcal{H}(n)$. Para valores pequeños de n se conoce que:

$$\begin{array}{rll} \text{i)} & \mathcal{H}(2) \geq 4 & \text{(ver [Shi]),} \\ \text{ii)} & \mathcal{H}(3) \geq 12 & \text{(ver [YH]),} \\ \text{iii)} & \mathcal{H}(5) \geq 24 & \text{(ver [LCC]) y} \\ \text{iv)} & \mathcal{H}(7) \geq 57 & \text{(ver [KZ]).} \end{array} \tag{2}$$

Para el caso $n = 2$ la conjetura es que $\mathcal{H}(2) = 4$ (ver [Ga], pág. 141).

Ahora bien, aunque en un principio el Problema 1 fue planteado sobre el plano real $\mathbb{R}^2$; también es posible considerarlo sobre el plano complejo $\mathbb{C}^2$, ya que un ciclo límite (en $\mathbb{R}^2$) de la ecuación diferencial real (1) induce un ciclo límite en $\mathbb{C}^2$ de la complejificación de la ecuación (1), es decir, considerando $P, Q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ (ver [Ily02], pág. 340).

En este trabajo no estudiamos en general las ecuaciones del tipo (1), sino aquellas que estan cerca de sistemas Hamiltonianos, esto es, dados:

- Un polinomio $H : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ de grado $m + 1$,
- un parámetro complejo pequeño $\epsilon \in (\mathbb{C}, 0)$ y
- una 1-forma diferencial polinomial
$$\omega = B(x, y)dx - A(x, y)dy$$
de grado $n = \max\{\text{grado}(A), \text{grado}(B)\}$ sobre $\mathbb{C}^2$;

se considera la familia de ecuaciones diferenciales holomorfas (parametrizada por ϵ):
$$dH - \epsilon\omega = 0. \tag{3}$$
Esta es una idea clásica (ver [Pon], [Mel]).

A la ecuación diferencial $dH = 0$ (la ecuación diferencial inicial) le llamamos sistema Hamiltoniano y decimos que $-\epsilon\omega$ es una perturbación del sistema Hamiltoniano $dH = 0$. La pregunta general respecto a la familia (3) es:

> ¿Cómo cambian las propiedades geométricas y dinámicas de las soluciones de $dH = 0$ bajo la perturbación $-\epsilon\omega$?

Una primer respuesta es la siguiente: Para $\epsilon = 0$ el retrato fase del sistema Hamiltoniano $dH = 0$ es bien entendido ya que sus soluciones estan contenidas en las fibras (curvas algebraicas planas afines) del polinomio H. Esto implica que $dH = 0$ no posee ningún ciclo límite. Pero debido a la perturbación $-\epsilon\omega$, algunos ciclos de $dH = 0$ (clases de homotopía libre $[\gamma_c]$ de lazos γ_c contenidos en la fibras $H^{-1}(c)$ de H) pueden generar ciclos límite de la familia $dH - \epsilon\omega = 0$.

Este hecho establece una conexión entre la perturbación de sistemas Hamiltonianos y la segunda parte del problema 16 de Hilbert. Esta conexión es muy importante ya que las desigualdades *iii*) y *iv*) de (2) se obtuvieron siguiendo esta idea (en el plano real). De esto se obtiene la siguiente variación del Problema 1:

Problema 2. Versión infinitesimal fuerte [Ily02]. *Hallar la cota superior* $\mathcal{H}(m,n) \in \mathbb{N}$, *dependiendo sólo de* $m+1 = grado(H)$ *y* $n = grado(\omega)$, *del número de ciclos de* $dH = 0$ *que bajo la perturbación* $-\epsilon\omega$, *generan ciclos límite de la familia* $dH - \epsilon\omega = 0$.

La herramienta más utilizada para determinar si un ciclo $[\gamma_{c_0}]$ de $dH = 0$ genera un ciclo límite de la familia $dH - \epsilon\omega = 0$ es la función desplazamiento asociada al ciclo $[\gamma_{c_0}]$ y a la familia $dH - \epsilon\omega = 0$. Su construcción requiere de los siguientes ingredientes:

- Una parametrización γ del lazo $\gamma_{c_0} \subset H^{-1}(c_0) \subset \mathbb{C}^2$.
- Un disco $D \subset \mathbb{C}^2$ transversal a las fibras $H^{-1}(c)$ de H en un punto p_0 de γ_{c_0} y que intersecta a cada fibra $H^{-1}(c)$ en a lo más un punto. Así D se parametriza por $H^{-1} : H(D) \to D$, $c \mapsto H^{-1}(c) \cap D$.

Para $\epsilon_0 \in \mathbb{C}$ suficientemente pequeño el disco D es transversal a las imagenes de las soluciones de la ecuación diferencial $dH - \epsilon_0\omega = 0$. Por lo tanto podemos elegir un disco pequeño $D_1 \subset \mathbb{C}$ centrado en $0 \in \mathbb{C} = \{\epsilon\}$, de tal forma que el polidisco $D_1 \times D \subset D_1 \times \mathbb{C}^2$ sea trasversal en el punto $(0, p_0) \in D_1 \times \mathbb{C}^2$ a las soluciones de la familia $dH - \epsilon\omega = 0$.

Como D esta parametrizado por $c \mapsto H^{-1}(c) \cap D$, entonces podemos darle al polidisco $D_1 \times D$ el sistema de coordenadas $\{(\epsilon, c)\}$.

Sabemos que existe un subconjunto abierto $U \subset D$ tal que la aplicación de holonomía asociada a γ (*i.e.* la aplicación de primer retorno de Poincaré en el caso complejo), $f_\gamma : D_1 \times U \to D_1 \times D$ está bien definida y por la construcción es holomorfa (ver [CN], pág. 63). Además para cada punto (ϵ, c) en $D_1 \times U$ existe una única curva $\gamma(\epsilon, c)$ (que depende sólo de γ) que une el punto (ϵ, c) con el punto $f_\gamma(\epsilon, c)$ (ver [CN], pág. 66). Notemos que las curvas $\gamma(0, c)$ son cerradas, por lo que existe un único lazo $\gamma_c := \gamma(0, c) \subset H^{-1}(c)$ que pasa por el punto de intersección del disco D con la fibra $H^{-1}(c)$.

Nosotros definimos la función desplazamiento asociada al ciclo $[\gamma_{c_0}]$ y a la familia $dH - \epsilon\omega = 0$ como la función:

$$L_\gamma : D_1 \times U \to \mathbb{C}, \quad (\epsilon, c) \mapsto ((H \circ f_\gamma) - H)(\epsilon, c),$$

la cual se puede expresar como:

$$L_\gamma(\epsilon, c) = \epsilon^k L_k(c) + O(\epsilon^{k+1}), \quad \text{con } k \geq 1. \tag{4}$$

(Ver Sección 1.2 para una descripción más amplia).

El criterio de Poincaré-Pontryagin dice que el ciclo $[\gamma_{c_0}]$ genera un ciclo límite de la familia $dH - \epsilon\omega = 0$ si y sólo si c_0 es un cero aislado de la función $L_k(c)$ (ver Teorema 1.1). Además, si $k = 1$ entonces la fórmula de Poincaré-Pontryagin nos dice que la función $L_1(c)$ esta dada por la integral Abeliana:

$$\begin{array}{rcl} L_1(c) : H(U) & \to & \mathbb{C} \\ c & \mapsto & \int_{[\gamma_c]} \omega \end{array}$$

donde $[\gamma_c]$ es la clase de homología del lazo $\gamma_c \subset H^{-1}(c)$ (ver Lema 1.1).

Por lo tanto, si logramos mostrar que la función $L_1(c)$ no es idénticamente nula y podemos acotar su número de ceros aislados entonces habremos acotado el número de ciclos de $dH = 0$ en U que generan ciclos límite de la familia.

En resumen, el criterio y fórmula de Poincaré-Pontryagin dan la conexión entre el problema de encontrar ciclos de $dH = 0$ que generan ciclos límite de la familia $dH - \epsilon\omega = 0$ y el problema de encontrar ceros aislados de la integral Abeliana de ω sobre los ciclos de $dH = 0$. Así se obtiene otra variación del Problema 1:

> **Problema 3. Versión infinitesimal débil [Ar].** *Hallar la cota superior $Z(m, n) \in \mathbb{N}$, dependiendo sólo de $m + 1 = grado(H)$ y $n = grado(\omega)$, del número de ceros aislados no triviales de la integral Abeliana:*
>
> $$\begin{array}{rcl} I(c) : \Delta & \to & \mathbb{C} \\ c & \mapsto & \int_{[\gamma_c]} \omega, \end{array}$$
>
> *donde $\Delta \subset \mathbb{C} = imagen(H)$ es un subconjunto simplemente conexo y $\{\gamma_c\}$ es una familia continua de lazos respecto al parámetro $c \in \Delta$, tal que la clase de homología $[\gamma_c]$ de cada lazo γ_c es no trivial en $H_1(H^{-1}(c), \mathbb{Z})$ el primer grupo de homología de la fibra $H^{-1}(c)$.*

Decimos que $c \in \Delta$ es un cero trivial de $I(c)$ si la fibra $H^{-1}(c)$ es simplemente conexa.

Para el Problema 3 el resultado más importante conocido es:

- $Z(m, n) \leq an$, donde a es una constante que depende sólo del grado de H (ver Teorema 6.26, pág. 177 en [Zo]).

La solución del Problema 3 proporciona información local para hallar la solución al Problema 2, sin embargo para su solución completa es útil considerar la integral Abeliana $I(c)$ de forma global, esto es, $I(c) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, pero existe un ingrediente que impone dificultades importantes para el estudio global de $I(c)$: la monodromía de H, pues esto implica que en general la integral Abeliana $I(c)$ sea multivaluada (ver Sección 2.1).

Así que el caso no trivial más tratable, para el Problema 3, es cuando el primer grupo de homología de la fibra genérica de H tiene sólo un generador, es decir, cuando la fibra genérica de H es una curva algebraica irreducible y biholomorfa a $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$. A los polinomios con esta propiedad se les llama primitivos de tipo $\mathbb{C}^*$ y su clasificación algebraica (*i.e.* salvo automorfismos algebraicos de $\mathbb{C}^2$ y $\mathbb{C}$) según [MS] y [Sa] esta dada por la familia:

$$\mathcal{S} = \left\{ x^k \left(x^l y - P(x) \right)^r \;\middle|\; \begin{array}{l} k, r, l \in \mathbb{N},\ (r,k) = 1,\ \deg(P(x)) < l \\ P(0) \neq 0 \text{ y si } l = 0 \text{ entonces } P(x) \equiv 0 \end{array} \right\}.$$

Nosotros usamos la familia $\mathcal{S}$ y probamos el siguiente:

Teorema 2.2. *Sea H un polinomio de grado $m+1 \geq 3$ en la familia $\mathcal{S}$. Si ω es una 1-forma polinomial de grado n entonces la integral Abeliana:*

$$\begin{array}{rcl} I(c) : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ c & \mapsto & \int_{[\gamma_c]} \omega, \end{array}$$

es una función polinomial. Además la cota superior para el número de ceros aislados no triviales de $I(c)$ es

$$Z(m,n) = \left[\frac{n+1}{m+1} \right],$$

donde $[\cdot]$ denota la parte entera.

Para el caso $m+1 = 2$ no sólo consideramos H de tipo $\mathbb{C}^*$ sino cualquier polinomio H de grado $m+1 = 2$ y probamos el siguiente resultado:

Teorema 3.1. *Sea $H : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ un polinomio de grado 2 y ω una 1-forma diferencial polinomial de grado n, entonces la integral Abeliana:*

$$\begin{array}{rcl} I(c) : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ c & \mapsto & \int_{[\gamma_c]} \omega \end{array}$$

es una función polinomial. Además la cota superior para el número de ceros aislados no triviales de I(c) es:

$$Z(1,n) = \left[\frac{n-1}{2} \right].$$

El siguiente grado de dificultad en el Problema 3 es cuando el polinomio H tiene monodromía global trivial y el primer grupo de la homología de la fibra genérica tiene al menos dos generadores. La clasificación algebraica de estos polinomios, según [NN1] y [NN2], esta dada en tres familias:

$$\mathcal{S}_1 := \left\{ y\prod_{l=1}^{r-1}(\beta_l - x)^{a_l} - h(x) \,\middle|\, r \geq 3 \right\},$$

$$\mathcal{S}_2 := \left\{ x^{p_1}\mathcal{S}^p\prod_{l=1}^{r-1}(\beta_l - x^{q_1}\mathcal{S}^q)^{a_l} \,\middle|\, r \geq 2 \right\},$$

$$\mathcal{S}_3 := \left\{ x^{q_1}\mathcal{S}^q + x^{p_1}\mathcal{S}^p\prod_{l=1}^{r-1}(\beta_l - x^{q_1}\mathcal{S}^q)^{a_l} \,\middle|\, r \geq 2 \right\},$$

donde $a_l \in \mathbb{N} - \{0\}$, $\beta_l \in \mathbb{C} - \{0\}$ con $\beta_l \neq \beta_{l'}$ si $l \neq l'$, $h(x)$ un polinomio de grado $< \sum_{l=1}^{r-1} a_l$, $0 \leq p_1 < p$, $0 \leq q_1 < q$ tal que $(pq_1 - qp_1) = \pm 1$ y $\mathcal{S} := x^k y - P(x)$ con $k \geq 1$ y $P(x)$ es un polinomio de grado $< k$.

Nosotros usamos estas tres familias para obtener el siguiente:

Teorema 4.3. *Sea $H : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ un polinomio con monodromía global trivial y sea ω una 1-forma diferencial polinomial de grado n. Entonces:*

a) La integral Abeliana:

$$\begin{array}{rcl} I_\tau(c) : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ c & \mapsto & \int_{[\gamma_c^\tau]} \omega, \end{array}$$

donde γ_c^τ es un elemento no nulo de $H_1(\mathcal{L}_c, \mathbb{Z})$, es una función polinomial

b) Si $H \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$ entonces el grado $d(n)$ del polinomio $I(c)$ se comporta de la siguiente forma:

1. *Si $H \in \mathcal{S}_1$, entonces $d(n) \leq n$.*
2. *Si $H \in \mathcal{S}_2$, entonces $d(n) = q(kn-1) + q_1 n$.*
3. *Si $H \in \mathcal{S}_3$, entonces*

$$d(n) \leq (kn-1)\left(q\left(\sum_{l=1}^{r-1} a_l - 1\right) + p\right) + n\left(q_1\left(\sum_{l=1}^{r-1} a_l - 1\right) + p_1\right)$$

si $r \geq 3$ o $r = 2$ y $a_1 > 1$; y

$$d(n) \leq \max\{p(kn-1) + np_1, q(kn-1) + nq_1\},$$

si $r = 2$ y $a_1 = 1$.

El grado $d(n)$ es una cota superior para el número de ceros aislados de la integral Abeliana $I(c)$.

Ahora, si la función $L_1(c)$ es idénticamente cero, entonces de acuerdo a la ecuación (4), es necesario conocer la función $L_2(c)$ para calcular el número de ciclos de $dH = 0$ que generan ciclos límite de la familia $dH - \epsilon\omega = 0$; si $L_2(c)$ también es idénticamente cero entonces necesitamos conocer $L_3(c)$ y asi sucesivamente hasta encontrar la primer función $L_k(c)$ no idénticamente nula o bien mostrar que todas las funciones $L_k(c)$ son nulas, lo que implica que $L_\gamma(\epsilon, c)$ es idénticamente cero y por lo tanto ningún ciclo de $dH = 0$ en U genera ciclo límite.

Sabemos que en general $L_k(c)$, con $k \geq 1$ no esta dada por una integral Abeliana, esto es, por la integral de una 1-forma racional sobre ciclos de $dH = 0$, ver [Ga05] pág. 664. Esto impone dificultades importantes para hallar la solución al Problema 2. Sin embargo existen ejemplos para los cuales las funciones $L_k(c)$ siempre estan dadas por integrales Abelianas (por ejemplo cualquier polinomio primitivo H de grado 2 de tipo $\mathbb{C}^*$, ver Sección 3.1, Corolario 3.4 y también [Ga05] pág. 681).

En particular el polinomio $H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ tiene la propiedad de que $L_k(c)$ siempre es una integral Abeliana. Iliev usa ésto para dar una cota superior del número de ceros aislados de la función $L_k(c)$ en términos de k y $n = \text{grado}(\omega)$, tal cota es $\left[\frac{k(n-1)}{2}\right]$ (ver [Ili]). Del artículo de Gavrilov [Ga01] se sigue que $\mathcal{H}(1,2) = 2$, sin embargo para $n > 2$ la cota $\mathcal{H}(1,n)$ es aún deconocida.

Nosotros estudiamos el Problema 2 cuando $H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ y ω es de la forma $\omega = g(x)dx - f(x)dy$, obteniendo el siguiente resultado:

Teorema 3.2. *Sea $H = (x^2+y^2)/2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ y ω es una 1-forma diferencial polinomial de grado n de la forma: $\omega = g(x)dx - f(x)dy$ entonces*

$$\mathcal{H}(1,n) = 2\left[\frac{n}{2}\right] - 1.$$

La demostración se basa en lo siguiente:

- Si $L_1(c)$ no es idénticamente cero entonces $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ es la cota para el número de ciclos de $dH = 0$ que generan ciclos límite de la familia $dH - \epsilon\omega = 0$. Además $\left[\frac{n-1}{2}\right] \leq 2\left[\frac{n}{2}\right] - 1$.

- Si $L_1(c)$ es idénticamente cero entonces se calcula explícitamente la función $L_2(c)$ obteniendo que $2\left[\frac{n}{2}\right] - 1$ es la cota superior para el número de sus ceros aislados y por lo tanto es la cota superior para el número de ciclos de $dH = 0$ que generan ciclos límite.

- Si $L_1(c)$ y $L_2(c)$ son idénticamente cero entonces se demuestra que todas las funciones $L_k(c)$ son idénticamente cero, por lo que ningún ciclo de $dH = 0$ genera ciclo límite de la familia.

Notemos que $dH - \epsilon\omega = 0$ se puede escribir como el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y + \epsilon f(x) \\ \dot{y} &= -x + \epsilon g(x), \end{cases}$$

el cual es un sistema de tipo Liénard polinomial. El estudio de los ciclos límite de sistemas de Liénard polinomiales (*i.e.* $g(x) \equiv 0$) fue propuesto por M. W. Hirsch y S. Smale (ver [HS] pag. 226 y [Sm] pag. 284). A. Lins, W. de Melo y C. C. Pugh en [LMP] construyeron ejemplos de sistemas de Liénard polinomiales de grado $2k+1$ y $2k+2$ que tiene exactamente k ciclos límite. Nuestro resultado permite:

1. Obtener ejemplos como los construidos en [LMP].

2. Construir sistemas de tipo Liénard polinomiales (con $g(x) \not\equiv 0$) de grado n con exactamente $2\left[\frac{n}{2}\right] - 1$ ciclos límite.

Para finalizar, se bosqueja de forma breve el desarrollo del trabajo.

En el Capítulo 1 describimos:

- Los ciclos de un sistema Hamiltoniano (real o complejo) $dH = 0$ y los fenómenos que pueden aparecer bajo la perturbación $-\epsilon\omega$.

- La función desplazamiento asociada a la familia $dH - \epsilon\omega = 0$ y las herramientas necesarias para determinar cuando un ciclo de $dH = 0$ genera un ciclo límite de la familia.

- Las 1-formas diferenciales polinomiales ω que son significativas para el Problema 2.

En el Capítulo 2 realizamos:

- Una descripción del estudio de integrales Abelianas.

- El estudio de integrales Abelianas para polinomios H de tipo $\mathbb{C}^*$ de grado ≥ 3. La demostración del Teorema 2.1 y algunas observaciones sobre el número de ciclos de $dH = 0$ que generan ciclos límite.

- Una descripción de la curva de Ilyashenko asociada a la familia $dH - \epsilon\omega = 0$ y sus propiedades para polinomios H de tipo $\mathbb{C}^*$.

El Capítulo 3 contiene:

- El estudio de integrales Abelianas para polinomios H de grado 2 y la prueba del Teorema 3.1.
- Un estudio detallado de los sistemas de tipo Liénard (en su forma infinitesimal). Logrando con esto la prueba del Teorema 3.2.
- La forma de la curva de Ilyashenko asociada a la familia $dH - \epsilon\omega = 0$ para polinomios H de grado 2 y de tipo $\mathbb{C}^*$.

En el Capítulo 4 resolvemos el Problema 2 para polinomios con monodromía global trivial. La solución sigue el siguiente camino:

- Se da la clasificación algebraica de polinomios con monodromía global trivial en tres familias.
- Para cada una de las tres familias se resuelve el Problema 2, culminando con la demostración del Teorema 4.3.